BnF Gallica

Cours de géométrie appliquée : 1ère partie, La géométrie appliquée au dessin : Ombres usuelles - Projections cotées - [...]

Source gallica.bnf.fr / Ecole nationale des ponts et chaussées

BnF Gallica

Pillet, Jules-Jean (1842-1912). Auteur du texte. Cours de géométrie appliquée : 1ère partie, La géométrie appliquée au dessin : Ombres usuelles - Projections cotées - Perspective - Théorie du lavis / Jules Pillet. 1885.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :
- La réutilisation non commerciale de ces contenus ou dans le cadre d'une publication académique ou scientifique est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source des contenus telle que précisée ci-après : « Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF ».
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service ou toute autre réutilisation des contenus générant directement des revenus : publication vendue (à l'exception des ouvrages académiques ou scientifiques), une exposition, une production audiovisuelle, un service ou un produit payant, un support à vocation promotionnelle etc.

CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter
utilisation.commerciale@bnf.fr.

Source gallica.bnf.fr / Ecole nationale des ponts et chaussées

17,813

École Nationale des Ponts et Chaussées.

Cours Préparatoires.

17,813

Cours de Géométrie Appliquée

de

Mr Pillet

Chef des Travaux Graphiques, Professeur du Cours.

1re Partie.

La Géométrie appliquée au dessin.

I. Ombres usuelles.

II. Projections cotées.

III. Perspective.

IV. Théorie du Lavis.

ÉCOLE NATIONALE BIBLIOTHÈQUE DES PONTS ET CHAUSSÉES

1885.

ENPC02-COU-4-17813-1885

1ère PARTIE.

I. Ombres usuelles. — II. Projections cotées. — III. Perspective linéaire. — IV. Théorie du Lavis.

I. — Ombres usuelles (Rayon à 45°).

1ère Leçon. § 1. — *Généralités.* — La théorie des ombres a pour but, connaissant la position d'une ou plusieurs sources de lumière, de déterminer sur la surface des corps les portions de ces surfaces qui sont éclairées et celles qui, ne l'étant pas, sont dites : dans l'ombre.

On nomme *rayon lumineux* la ligne droite suivant laquelle, dans un milieu homogène, se propage la lumière.

La lumière est dite *au flambeau*, lorsque la source lumineuse est à distance finie. Elle est dite *au Soleil*, lorsque la source est à une distance suffisamment grande pour que les rayons lumineux puissent être considérés comme parallèles entre eux. (*fig. 2*)

Lorsqu'un corps est en présence d'une source lumineuse les rayons qui émanent de cette dernière se classent par rapport à l'objet, en trois catégories :

1° Les rayons *incidents* qui sont arrêtés par la surface de l'objet et qui l'éclairent plus ou moins suivant leur angle d'incidence.

2° Les rayons *latéraux* qui passent à côté de l'objet et vont en éclairer d'autres.

3° Les rayons *limites ou tangents* qui servent de transition entre les deux précédents.

Ces derniers sont les plus importants à considérer. Si la surface est complète ils lui sont tangents et forment par leur ensemble le *cône d'ombre* dans le cas d'un flambeau, (*fig. 1*) le *cylindre d'ombre* de la surface, (*fig. 2*) dans le cas de la lumière au soleil.

Fig. 1.

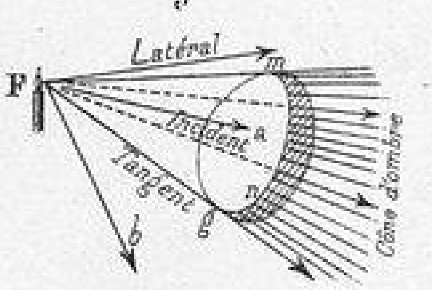
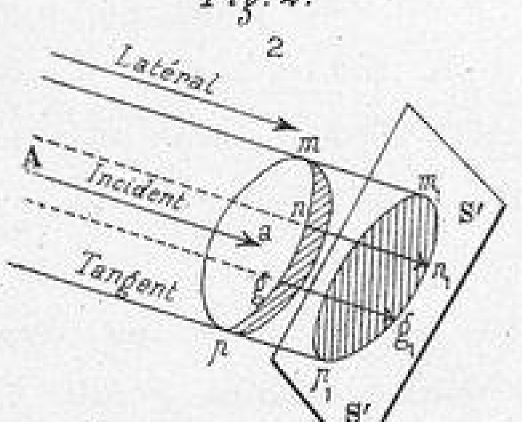


Fig. 2.



La ligne de contact m n g de ce cône ou de ce cylindre se nomme la *séparatrice d'ombre et de lumière*. La partie dans l'ombre se nomme *l'ombre propre* de la surface.

Si la surface est limitée par un contour linéaire ; si c'est un disque par exemple, ou un polyèdre, dans ce cas les rayons limites ne sont plus tangents dans l'acception rigoureuse du mot ; ils passent par la ligne de délimitation du contour ou par certaines arêtes du polyèdre, que l'on apprend à reconnaître.

Le problème des ombres et celui de la perspective ou des

projections sont une seule et même question.

Si on imagine, au lieu d'une source de lumière, un point de vue, les rayons lumineux deviennent des rayons visuels.

Les rayons lumineux tangents qui déterminent la *séparatrice*, deviennent les rayons visuels de contour apparent: En les prolongeant (*fig. 2*) jusqu'à une surface (plane ou autre) et en les y arrêtant ils donnent dans le premier cas *l'ombre portée* de la première surface sur la seconde prise comme *écran*, dans le second l'image de la première sur la seconde prise comme *tableau*.

Le problème des ombres dans le cas de la lumière au soleil est identique à celui des projections obliques c'est à dire de la *Perspective cavalière*.

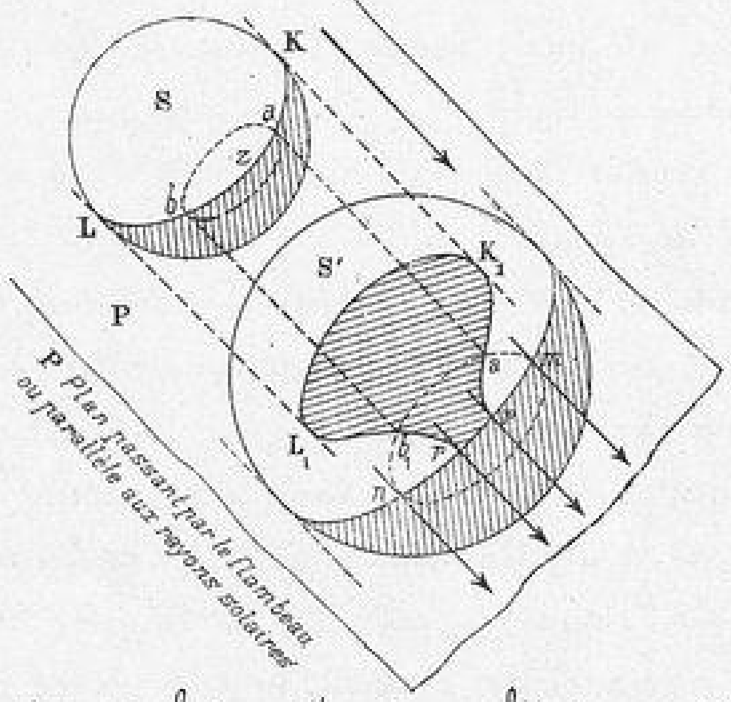
L'ombre portée par un objet sur un plan n'est autre chose qu'une perspective cavalière de cet objet sur ce plan.

§2. – Méthodes générales pour la recherche des ombres.

Elles se ramèneront à trois:

1° Méthode de plans sécants (*fig. 3*). – Soient deux surfaces en présence S et S'. On coupe par des plans susceptibles de contenir des rayons lumineux c'est à dire passant par le flambeau, ou parallèles aux rayons lumineux, dans le cas du soleil.

Fig. 3.

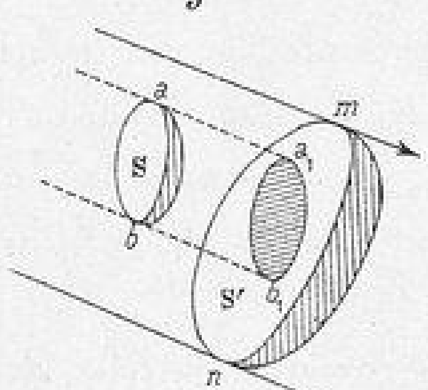


On obtient ainsi 2 courbes auxiliaires; une dans chaque surface. On mène à chacune d'elles des tangentes lumineuses, ce qui donne en a et b, sur la 1^re^ courbe et en m et n sur la seconde des points des séparatrices.

Les premières, tangentes en a et b, prolongées, rencontrent la seconde courbe en a_1 et b_1 ce qui donne des points de l'ombre portée par la première surface sur la seconde.

On répète l'opération autant de fois qu'il est nécessaire et en joignant les points de même espèce par des courbes continues, on obtient en K.a.b.L, puis en m.p.p.n. les deux séparatrices et en $K_1 a_1 p p b_1 L_1$ l'ombre portée par S sur S'.

Fig. 3 bis.

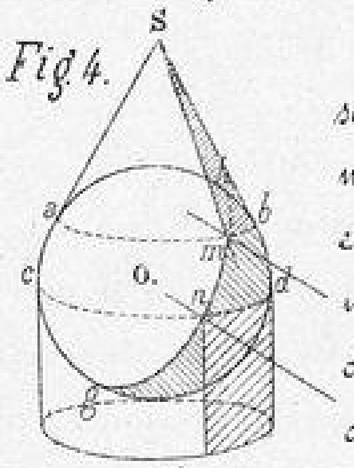


Nota. – Les points p et p où l'ombre portée se perd dans l'ombre propre se nomment des points de perte. Ils n'existent pas toujours. (Voir fig. 3 bis). Dans ce dernier cas l'ombre est dite fermée, et dans le premier elle est dite ouverte. Nous donnons plus loin l'énoncé d'un théorème sur les tangentes à la courbe d'ombre portée, aux points de perte.

Cette méthode est en général d'une application pénible. Elle convient très bien pour trouver certains points particuliers des lignes d'ombre.

2° *Méthode des surfaces circonscrites.* — Soit une surface (une sphère, par exemple, pour fixer les idées) dont on veut déterminer la séparatrice (fig. 4).

Fig. 4.



On lui circonscrit une surface plus simple, un cône par exemple, dont on sait trouver facilement la séparatrice S m (droite, dans le cas du cône); le point m où cette droite rencontre la courbe de contact a b du cône et de la surface est un point de la séparatrice de cette dernière (évident). On pourrait prendre un cylindre tangent le long de la courbe c d et donnant en n un autre point de la séparatrice. En joignant par une courbe continue les points m n etc...... on aura la séparatrice cherchée.

Remarque. — Sauf pour des points tout à fait particuliers, la séparatrice S m de la surface circonscrite auxiliaire n'est pas tangente à celle k.m.n.g. de la surface donnée. Autrement dit : il ne suffit pas que deux surfaces se raccordent pour que leurs lignes d'ombre propre le fassent également. (fig. 4 bis). On verra en géométrie descriptive qu'il faut de plus, pour qu'il y ait raccordement des lignes d'ombre, que les surfaces soient osculatrices. (Sera démontré dans la 3e partie du cours).

Fig. 4 bis.

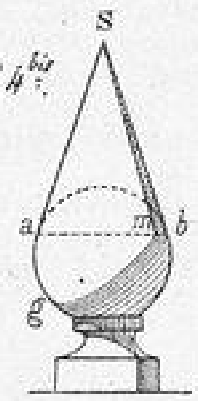
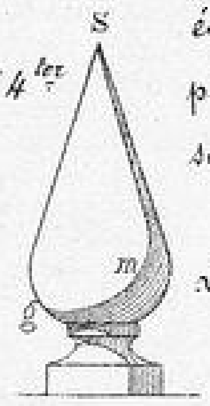


Fig. 4 ter.



Il y aurait raccordement, (fig. 4 ter) si le profil était tracé à la main, comme on doit toujours le faire en architecture.

3° *Méthode des ombres portées auxiliaires ou méthode des projections obliques.* — Soient (fig. 5) deux surfaces S et S', sur lesquelles on veut faire toutes les recherches d'ombres.

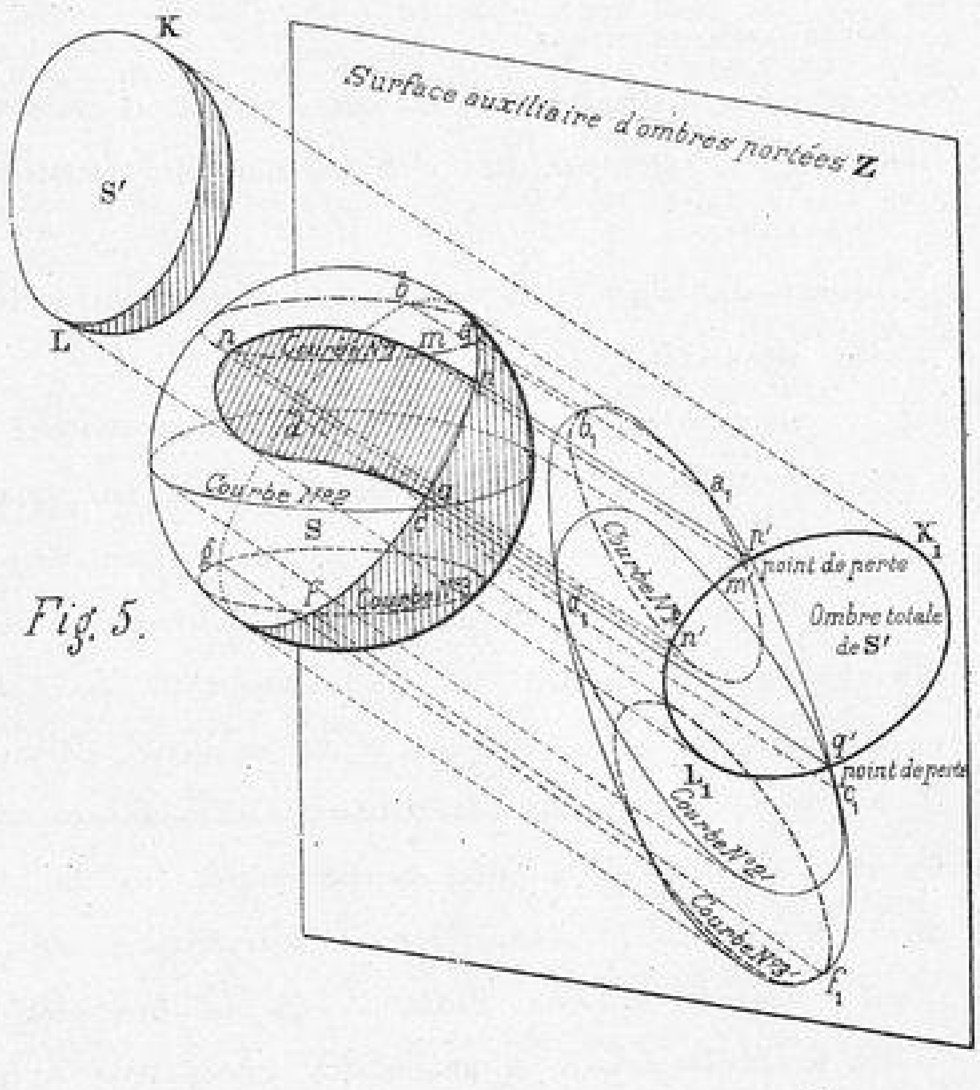


Fig. 5.

1° Ombre propre de la surface S.

On trace sur la surface S une série de courbes N° 1, N° 2, N° 3 convenablement choisies, c'est-à-dire choisies aussi simples que possible : si la surface est réglée on choisira les génératrices rectilignes ; si la surface est de révolution on prendra les cercles qui constituent les parallèles ; etc.

On prend arbitrairement une surface auxiliaire, ordinairement un plan Z, sur lequel, on cherche en N° 1', N° 2', N° 3' les ombres portées par ces courbes.

On démontre facilement, comme on le fait pour les contours apparents, que l'ombre portée totale de la surface S est l'enveloppe des ombres N° 1', N° 2', N° 3' portées par les courbes choisies.

On trace donc cette enveloppe tangente aux ombres portées auxiliaires, N° 1', N° 2'......., on détermine les points de contact a, b_1, c, d_1, f_1 etc.... de l'enveloppée, et, remontant par des rayons lumineux inverses de ces points aux courbes de l'espace, on obtient en a. b. c. d des points de la séparatrice de la surface S.

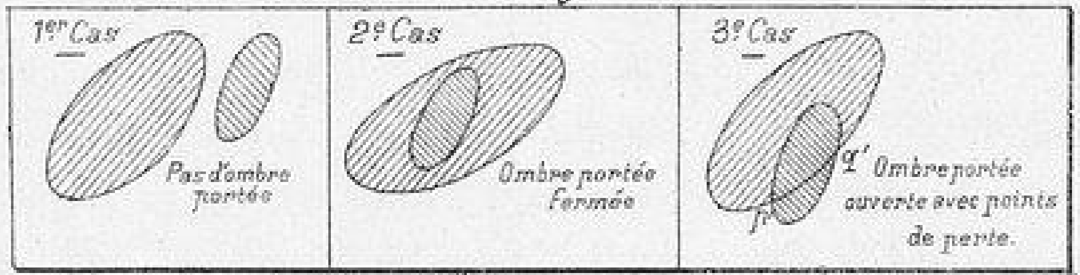
2°. Ombre portée par la surface S' sur la surface S.

On cherche comme ci-dessus l'ombre totale portée par la surface S' sur le plan auxiliaire. (La figure n'indique pas les constructions faites à cet effet).

On prend les points de rencontre m' n'...... de cette seconde ombre portée avec les ombres portées partielles N° 1'. N° 2' etc..... des courbes de la surface S et, remontant par des rayons lumineux inverses de ces points aux courbes de l'espace, on obtient en m n des points de l'ombre portée cherchée.

Points de perte: Les points p' et q' où se coupent les ombres portées totales permettent, comme l'indique la figure, de remonter aux points de perte p et q sur la surface S.

Fig. 5 bis.



Remarques. – Cette méthode est générale; c'est celle dont l'application est ordinairement la plus facile. Le plan auxiliaire, au lieu d'être choisi arbitrairement, peut être donné par l'épure même. Au lieu d'un plan on pourra prendre toute autre surface auxiliaire: un cône, un cylindre........ Il est rare que dans les applications il n'y ait pas de surfaces sur lesquelles les ombres portées soient demandées. Dans ce cas, ces surfaces serviront d'auxiliaires pour l'application de la méthode des projections obliques.

Nota. – L'aspect des ombres portées auxiliaires, *fig.* 5 bis, permet de reconnaître les divers cas de l'ombre portée dans l'espace.

§ 3 – Théorèmes généraux.

Théorème 1. – (Théorème des contours apparents).

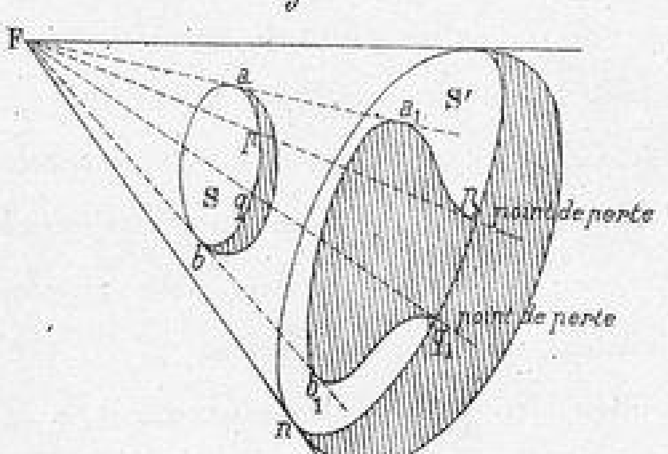
Le contour apparent d'une surface, sa séparatrice, et sa courbe d'ombre portée sur toute autre surface, ont en projection ou en perspective des tangentes lumineuses (1) communes.

On voit ce théorème observé sur les figures 3, 5 et 5 ter ci-contre. (Démonstration facile à faire).

Théorème 2. – (Théorème des points de perte). *fig.* 5 ter.

En tout point de perte p, ou q, d'une ombre portée dans une ombre propre, la tangente à l'ombre portée est le rayon lumineux, non seulement en projection mais encore dans l'espace.

Fig. 5 ter.



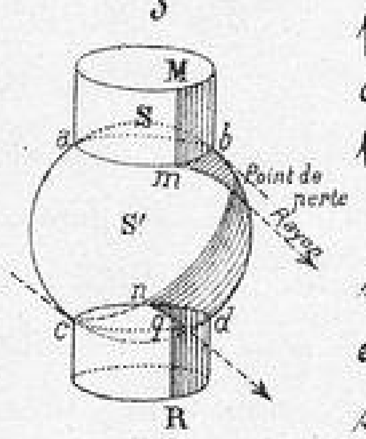
En effet ce rayon est une génératrice du cylindre (2) d'ombre de la surface qui porte ombre et par suite il appartient au plan tangent à ce cylindre. D'autre part il appartient au plan tangent à la surface qui reçoit l'ombre puisque le point de perte est sur la séparatrice de cette dernière. Il est donc l'intersection de ces deux plans tangents et par suite il est la tangente à la courbe d'ombre portée; qui n'est autre chose que l'intersection du premier cylindre d'ombre et de la seconde surface.

(1) Par abréviation, une tangente lumineuse est une tangente qui passerait par la source lumineuse.
(2) ou du Cône. Sur la figure 5 ter c'est un Cône d'ombre.

(Voir figures 3, 5 et 5^ter). Ce théorème ne subit d'exception que dans le cas très particulier où les deux points de perte se rapprocheraient et arriveraient à se confondre en un seul[1].

Théorème 3. – (Théorème des surfaces qui se coupent) fig. 6. – Lorsque deux surfaces se coupent suivant une courbe a b, l'ombre portée par la première sur la seconde, commence au point m où la séparatrice de la première rencontre l'intersection, et, en ce point, elle est tangente à cette intersection.

Fig. 6.



En effet, en m, la tangente à la courbe d'intersection a b, est l'intersection des plans tangents aux deux surfaces. La tangente à l'ombre portée en ce même point m est l'intersection du plan d'ombre de la première surface en m, (lequel est aussi tangent à cette surface) avec le plan tangent à la seconde. Les deux mêmes plans donnent donc par leur intersection, à la fois, la tangente à la courbe a b et celle à la courbe m p, ce qu'il faut démontrer.

L'application de ces trois théorèmes permet dans beaucoup de cas, en ne cherchant qu'un nombre très restreint de points des lignes d'ombre, de les tracer cependant avec beaucoup de précision et dans leurs véritables mouvements.

§ 4. – Le rayon à 45°, et son rabattement à l'angle φ.

En dessin géométrique on considère les rayons lumineux comme émanant du soleil. Ils sont donc parallèles entre eux et, de plus, on les choisit parallèles à la diagonale d'un cube (fig. 7) qui aurait deux de ses surfaces parallèles aux plans de projection et par conséquent une troisième de profil. – On nomme quelquefois ce cube le cube de lumière.

Ce rayon a pour principal avantage de faire des angles égaux avec les plans qui servent à figurer les élévations, les plans et les coupes des objets. Nous désignerons cet angle par la lettre grecque φ.

Les projections font (fig. 8) des angles à 45° avec la ligne de terre.

Rabattement du rayon à 45°. – Si on le rabat en A'S₁ sur le plan vertical (fig. 8) il fait alors avec la ligne de terre l'angle φ.

On a : $\mathrm{Tang.}\,\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où on déduit par des calculs trigonométriques faciles à effectuer :

$\mathrm{Sin.}\,\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\mathrm{Cos.}\,\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ et $\mathrm{Cos.}\,2\varphi = \frac{1}{3}$

Équerre à l'angle φ (fig. 9) très utile pour les tracés d'ombres usuelles.

Fig. 7.

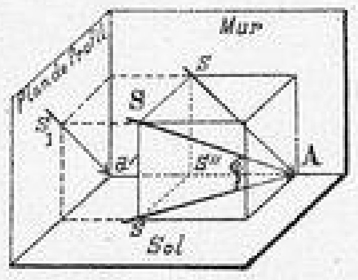


Fig. 8.

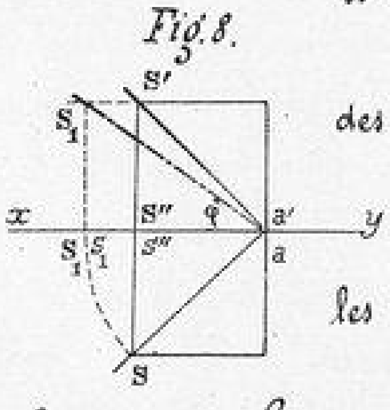
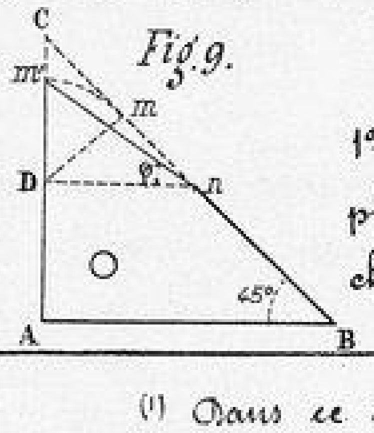


Fig. 9.



§ 5. – Ombres portées sur des plans de front. – fig. 12.

1° Par un point. Soit A a un point situé à une distance, d = 20^mm, d'un plan de front XY. On a en A, a, son ombre portée sur le mur, obtenue en cherchant la trace verticale du rayon lumineux issu du point a A.

---

[1] Dans ce cas, les cordes communes aux indicatrices du cylindre d'ombre et de la surface, donneraient les tangentes à la courbe d'ombre portée. Sera démontré dans la 2e partie du cours.

On remarque que l'ombre A_1 en élévation est située à droite et au-dessous de A (Élévation du point) à une distance égale à la saillie ($\delta = 20^{mm}$) du point A en avant du mur de front. De telle sorte que la connaissance de cette saillie suffit seule, sans avoir recours au plan, pour trouver l'ombre portée.

2° Par une droite verticale BC et 3° par une droite fronto-horizontale EF.

La première BC porte ombre en $B_1 C_1$ à une distance à <u>droite</u> de son élévation égale à la saillie; Pour la seconde c'est au-<u>dessous</u> de son élévation qu'il faut compter la saillie.

3° Figure plane de front (un cercle O par exemple).

Elle porte ombre en vraie grandeur. Cette ombre s'obtient en déplaçant l'élévation *à droite* et *en dessous*, de deux longueurs successivement égales à la saillie de la figure de front.

Fig. 10.

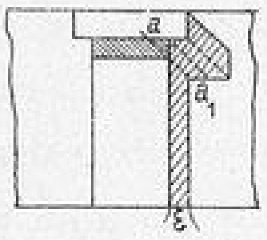
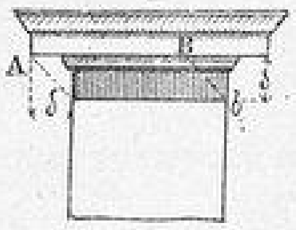


Fig. 11.



Pour un cercle en particulier il suffit de chercher comme ci-dessus, en O_1, sans se servir du plan, en n'utilisant que la saillie, l'ombre du centre et de tracer un cercle égal au cercle donné.

(*applications: fig. 10 et 11, ombres d'un larmier*).

4° Droite debout (*fig. 12*) Soit par exemple l'arête LK d'un mur perpendiculaire au plan vertical.

Le plan d'ombre d'une pareille droite est lui-même perpendiculaire au plan vertical et, par suite, l'ombre c'est-à-dire son intersection avec le mur et même avec tout autre objet, une sphère par exemple, se projette suivant une droite qui, se confondant avec la projection des rayons lumineux, est une ligne à 45°.

Fig. 12.

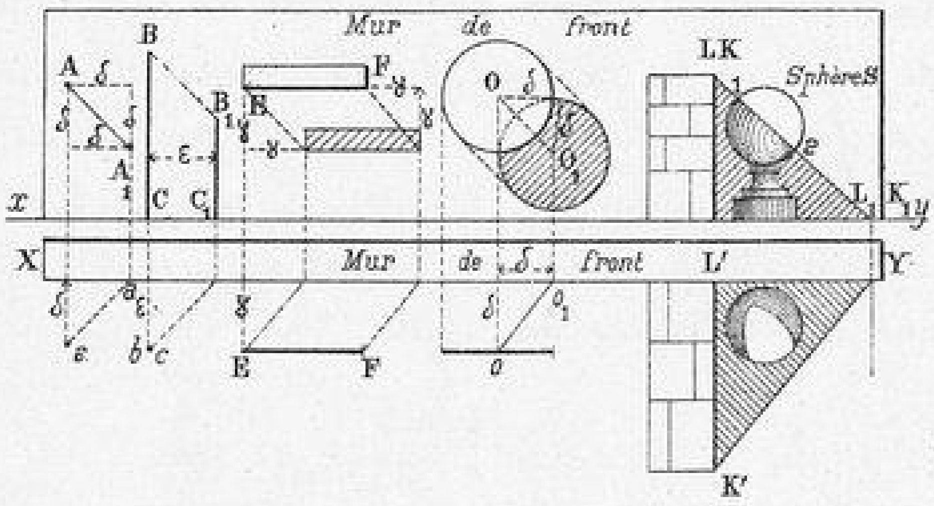
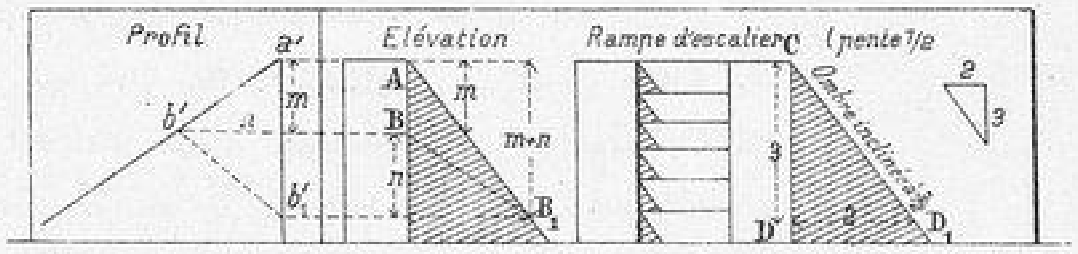


Fig. 13.



5° Droite de profil, inclinée sur le plan horizontal à la pente $\frac{m}{n}$ (*fig. 13*).

Il est facile de voir, en cherchant l'ombre AB, que cette droite est inclinée sur le plan horizontal à la pente $\frac{n+m}{m}$.

Exemple. – Une droite debout. Sa pente est 0, la pente de son ombre est $\frac{1}{1}$ c'est-à-dire qu'elle est inclinée à 45° ce que nous avons vu plus haut.

Une droite à 45°, de profil, c'est-à-dire inclinée à une pente $\frac{1}{1}$, aurait son ombre inclinée à la pente $\frac{1+1}{1} = \frac{2}{1}$.

Une rampe d'escalier (*fig. 13*) est en général inclinée à la pente $\frac{1}{2}$: La pente de son ombre est $\frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ (3 de hauteur pour 2 de base).

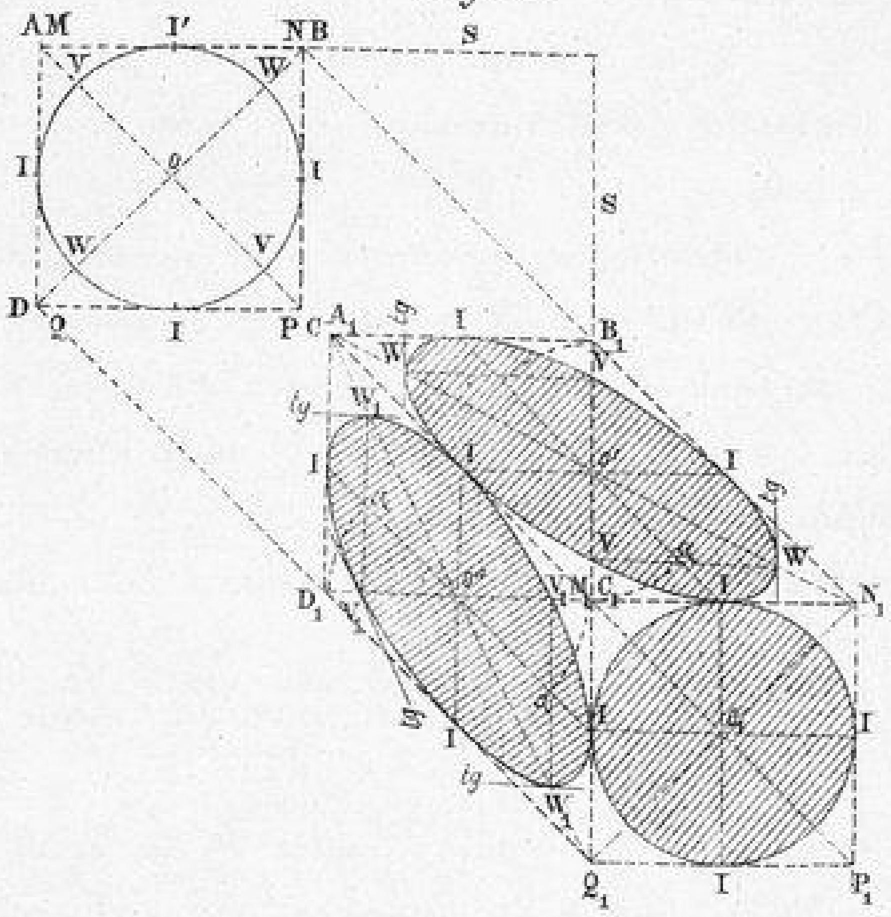
<u>2e Leçon.</u> § 6. *Ombres portées par un cercle, et par un cube sur un plan de front.*

Le plus ordinairement, un cercle se présente de front, de niveau ou de profil.

Supposons que nous ayons inscrit un cercle dans 3 des faces d'un cube, dont l'élévation serait ABCD (*fig. 14*). Cherchons d'abord l'ombre portée par le cube.

On connaît, je suppose, la saillie de la face la plus rapprochée du mur. On en déduit, comme ci-dessus, en $A_1 B_1 C_1 D_1$ l'ombre de cette face. C'est un carré. Le carré le plus en avant ayant une saillie plus grande que celle du précédent de toute la longueur du côté du cube on aura son ombre $M_1 N_1 P_1 Q_1$ en déplaçant le précédent carré en dessous et à droite de deux longueurs successivement égales à ce côté.

Fig. 14.

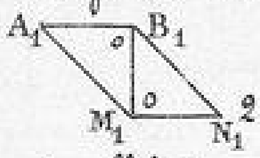


Cela met les 2 diagonales $A_1 C_1$ et $M_1 P_1$ en prolongement l'une de l'autre et fait coïncider les 2 sommets M_1 et C_1.

On joint les sommets $A_1 C_1 - B_1 N_1 - D_1 Q_1 - M_1 P_1$ et on a ainsi une perspective cavalière reproduisant l'ombre porté par le cube.

On fait sur cette figure les remarques suivantes:

1° La face supérieure du cube est un carré de niveau; il porte ombre suivant le parallélogramme $A_1 B_1 M_1 N_1$ dont la figure est facile à retenir: En effet: Un de ses côtés $A_1 B_1$ est horizontal, l'autre est à 45°, sa petite diagonale $B_1 M_1$ est verticale et égale au plus petit côté. L'autre diagonale $A_1 N_1$ est inclinée à la pente $\frac{1}{2}$.-



Deux équerres à 45°, $A_1 B_1 M_1$ et $B_1 M_1 N_1$, mises côte à côte donnent une idée de ce parallélogramme.

2° Si on inscrivait un cercle dans cette face il porterait ombre suivant l'ellipse inscrite dans ce parallélogramme. Cette ellipse toucherait les côtés aux quatre points milieux I, I.....

Les points V, V, situés sur la petite diagonale (nous les nommerons les points de petite diagonale) partagent la moitié $0'B_1$ de cette dernière dans un rapport $\frac{o'V}{o'B_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ = (sensiblement) 0,07. La tangente en ces points est parallèle à la grande diagonale. Elle a donc une pente $\frac{1}{2}$. Les points W, W (points de grande diagonale) situés sur la grande diagonale, la partagent aussi dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 0,7 (sensiblement). Les tangentes en ces points sont parallèles à la petite diagonale; elles sont donc verticales.

Telle est l'ellipse, ombre portée par un cercle de niveau. Il est important de savoir la tracer sans hésitation et sans en chercher d'autres points que ceux qui viennent d'être trouvés.

3° Le carré de profil porte ombre suivant le parallélogramme $A_1 D_1 Q_1 M_1$, et le cercle de profil suivant l'ellipse qui y est inscrite. C'est la même ellipse que la précédente que l'on aurait fait tourner autour de la droite $A_1 C_1$.

Les points importants sont: les points de milieux I, I, ... Les points de petite diagonale $V_1 V_1$ et les points de grande diagonale W_1 et W_1. Aux points $V_1 V_1$ la tangente est inclinée à $\frac{2}{1}$, aux points W_1 et W_1 elle est horizontale.

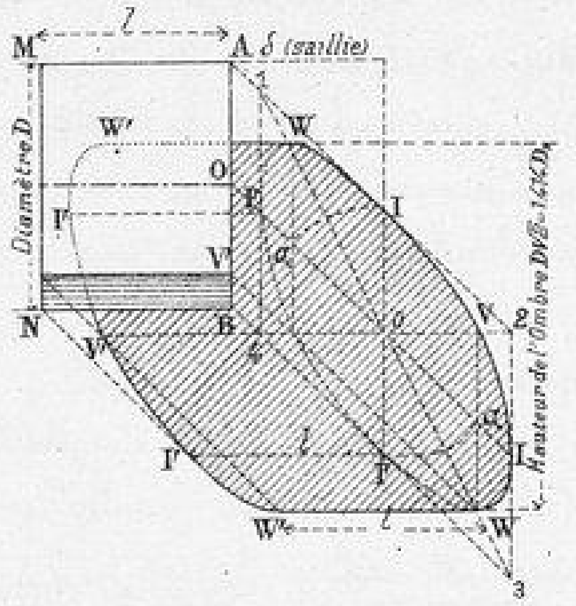
§ 7. Applications: Architecture.

(a). Ombre d'un fût de colonne: dont l'axe serait de niveau et de front (fig. 15).

On obtient en OV' par la connaissance de la saillie l'ombre portée par l'axe sur le mur. On construit sur o comme centre le parallélogramme, ombre du carré de profil.

Dans ce parallélogramme on inscrit l'ellipse connue. Les tangentes aux points W W de grande diagonale sont horizontales et donnent les ombres portées par les génératrices d'ombre propre du cylindre.

Fig. 15.



En remontant par un rayon lumineux inverse de W en V' on aura un point V' d'ombre propre du cylindre. La séparatrice est la génératrice.

L'ombre portée par la base de gauche s'obtient en déplaçant la précédente parallèlement à elle-même, de toute la longueur du cylindre.

Remarque importante. – L'épaisseur de l'ombre portée par le cylindre est plus grande que le diamètre, d, de ce dernier. Elle est égale à $d\sqrt{2}$ ou sensiblement 1.4 d, ou encore exactement égale à 4 fois la distance OV' entre l'ombre propre du cylindre et la projection de son axe.

(b). Ombre d'un fût de colonne vertical (*fig. 16*) : Tout à fait analogue à la précédente ; inutile de l'expliquer.

(c). Ombre portée par une arcade de profil et par la même arcade en coupe (*fig. 17 et 18*).

On tracera deux fois l'ombre précédente, c'est à dire l'ombre d'un cercle de profil. – L'épure se comprend facilement. Remarquer le point de brisure K, intersection des 2 ellipses.

Si l'arcade est coupée par un plan de front mené par son axe, l'ombre (*fig. 18*) se composera des moitiés des deux ellipses réunies par l'horizontale $D_1 C_1$ ombre portée par la ligne de coupe CD faite sur la clef de l'arcade. – De plus, dans l'intrados nous aurons un fragment d'ellipse $A_1 K_1$ ombre portée par le cercle de gauche de l'arcade, sur cet intrados. (Sera démontré plus loin ; Ombre du Pont).

Fig. 16.

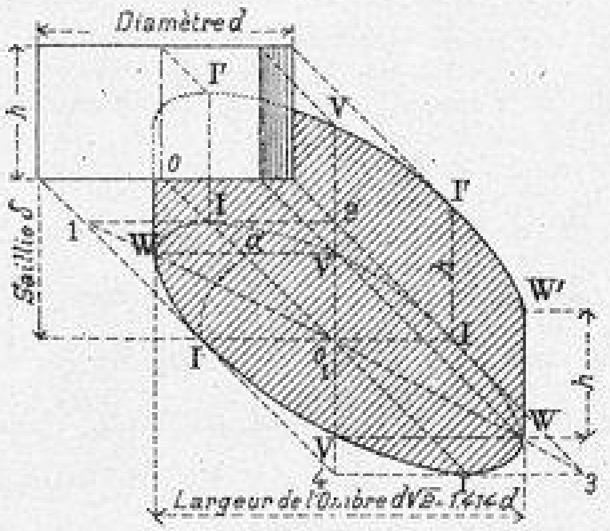


Fig. 17.

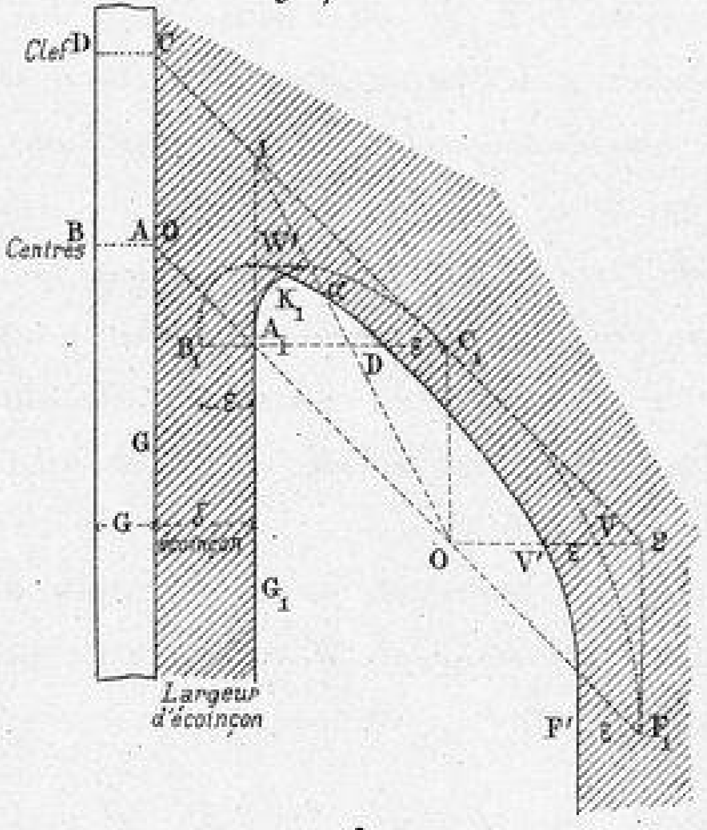


Fig. 18.

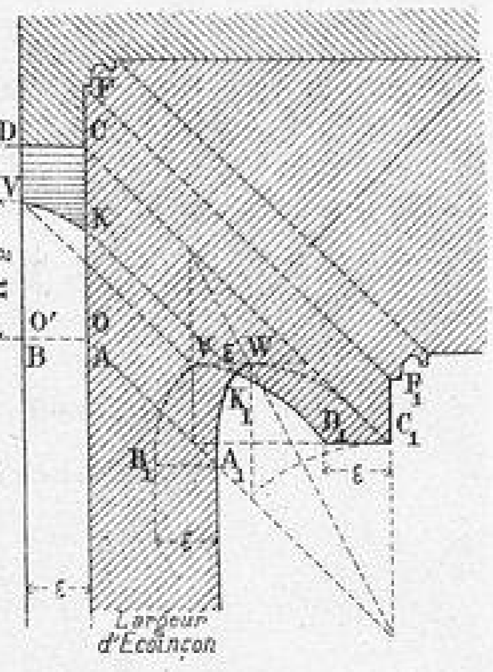
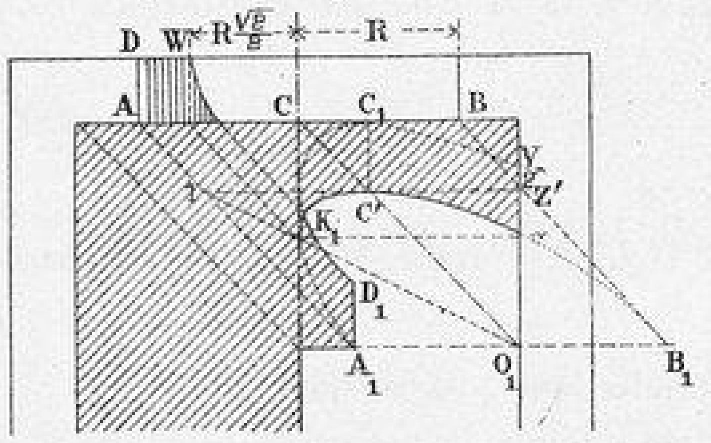


Fig. 19.



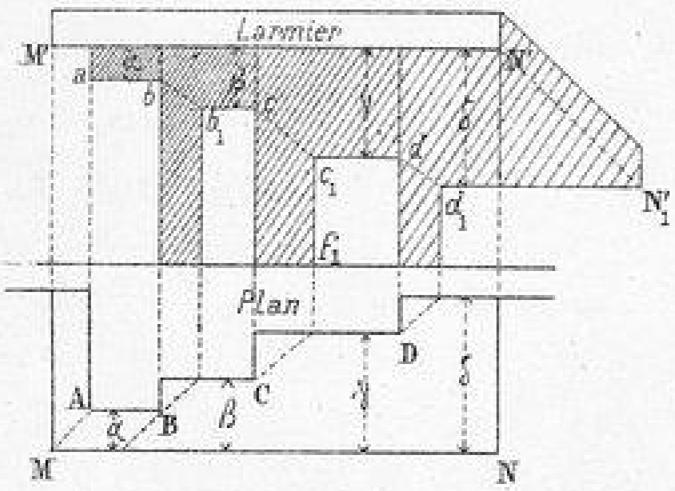
(d). Ombre d'une ouverture cylindrique, faite dans le plafond d'une salle carrée (*fig. 19*) Explications inutiles.

§ 8. –

§ 8. Ressaut des ombres.

(a) Droite MN, parallèle à la ligne de terre, portant ombre sur une série de plans de front (Architecture, larmier portant ombre sur des murs de front).

Fig. 20.



On voit facilement que l'ombre se décroche en ab–b₁ c–c₁ d ...... etc. et reproduit les saillies successives des murs, c'est-à-dire le profil de ces murs pris en projection horizontale.

Un point tel que b, ou c, ou d se nomme un point limite et l'ombre ressaute de C situé sur l'arête en c_1 situé sur l'ombre primitivement tracée du larmier MN. Donc c_1 est aussi un point de l'ombre portée par l'arête cC. Cette ombre est la verticale $c_1 f_1$. Les points tels que c_1 d_1 se nomment des points de brisure. En ces points viennent se croiser les ombres de deux lignes différentes.

(b) Architecture. – Ombre d'un larmier de front, sur des moulures à génératrices verticales, ou bien: Ombre portée par l'arête verticale d'un mur ou d'un bandeau sur des moulures parallèles à la ligne de terre. (Fig. 21 et 21^bis^).

1° Décrochement de l'ombre: La ligne d'ombre reproduit, en sens inverse, le profil même de la moulure. – On peut donc, sans se servir d'un plan ni d'une coupe et, si l'on connaît seulement le profil de la moulure, et en plus le reculement d'une seule génératrice, tracer la ligne d'ombre. (Fig. 21 et 21^bis^).

La coupe donne en 1, 2, 3, 4, 5, 6 le profil de la moulure. La saillie de l'arête 1 en arrière de la ligne verticale NR qui porte ombre étant connue, permet de tracer en a, b, c, d .... en prenant a comme point de départ, le profil de la moulure, copié sur celui de la coupe. (Il serait donc inutile de tracer cette coupe).

Fig. 21.

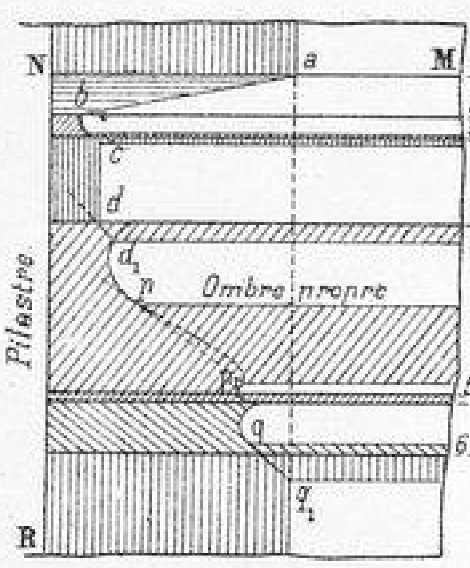
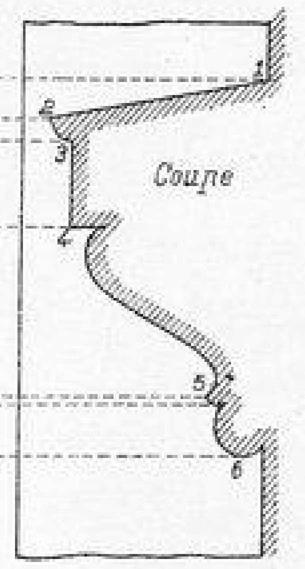


Fig. 21^bis^



C'est l'ombre géométrique portée par la ligne NR sur la moulure. On nomme cette courbe le décrochement de l'ombre. Il y a des lignes inutiles et il y manque les ombres propres des divers cylindres qui constituent les éléments de cette moulure ainsi que les ombres que ses différentes parties portent les unes sur les autres.

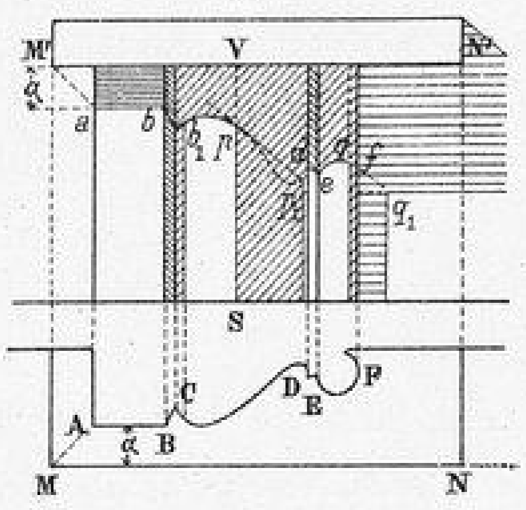
2° Ressaut de l'ombre: On complète de la manière suivante: 1° On mène par tous les points limites, tels que d_1, p_1, que nous nommerons des points limites anguleux des rayons qui font ressauter l'ombre de d en d_1. Par d_1 passe une des ombres portées $d_1 d_2$ par la moulure sur elle-même;

2° On mène les tangentes à 45°, aux points tels que p et q, ce qui donne les points de perte ou points limites tangentiels et, en même temps, les points de départ des lignes d'ombres propres;

3° Ces tangentes prolongées en p_1 et en q_1 jusqu'à leurs rencontres avec le profil tracé

à priori, donnent en p_1 et q_1 d'autres ombres portées par la moulure sur elle-même.

Fig. 22.



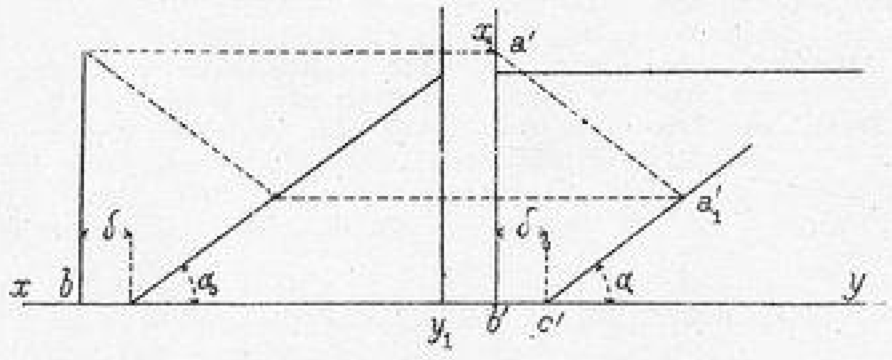
On voit (fig. 22) un autre exemple du décrochement et du ressaut des ombres. C'est l'ombre portée par un larmier parallèle à la ligne de terre sur une série de moulures verticales (baguette, filets, talon ......).

Le profil de la moulure est reproduit, à priori, en a b d e .. etc. on sépare ensuite les points limités anguleux b d ..... et les points de tangence à 45° p. q...... et on achève comme ci-dessus, après avoir fait <u>ressauter</u> ces points en p_1 et q_1.

§ 9. Ombre portée par une droite verticale sur un plan parallèle à la ligne de terre.

C'est un cas particulier du problème précédent.

Fig. 23.

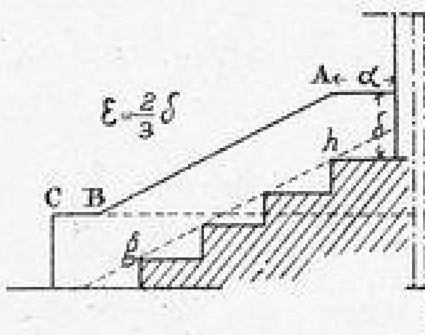


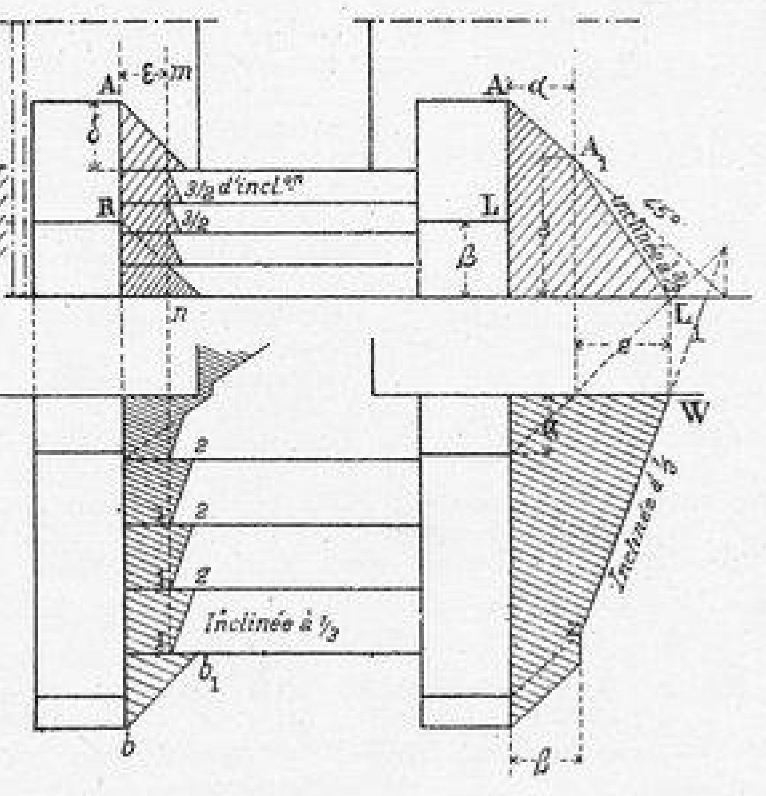
L'ombre est une droite $c'a'_1$, inclinée sur l'horizontale du même angle α que le plan fait avec le plan horizontal, et commençant en c' à une distance b'c' du pied de la droite, égale à la saillie de ce pied, en avant de la trace horizontale du plan.

§ 10. Applications à l'architecture.

(a) Ombres d'un escalier avec rampe descendante.

Fig. 26. Fig. 24.





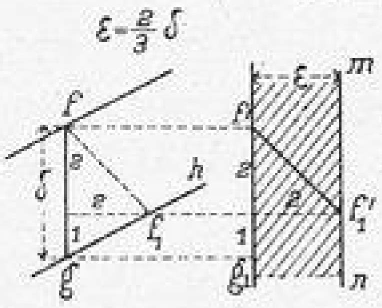


Fig. 26^bis^ Fig. 25.

L'escalier est incliné comme à l'ordinaire, à 1 de hauteur pour 2 de base. — En élévation (fig. 24), la rampe donne de A en A_1 une ligne d'ombre à 45°. — La saillie α fait connaître A_1 et l'ombre A_1L_1 portée par la rampe inclinée, est penchée à 3 pour 2. (Voir § 5). De même, les petites ombres portées sur les faces antérieures des marches sont inclinées à 3 pour 2. — Leurs points de départ sur les arêtes sont sur une même droite m n dont la distance ε à la droite AB est les $\frac{2}{3}$ de la hauteur δ de la droite AB au-dessus d'un plan fictif g h, (fig. 26 et 26^bis^) qui passerait

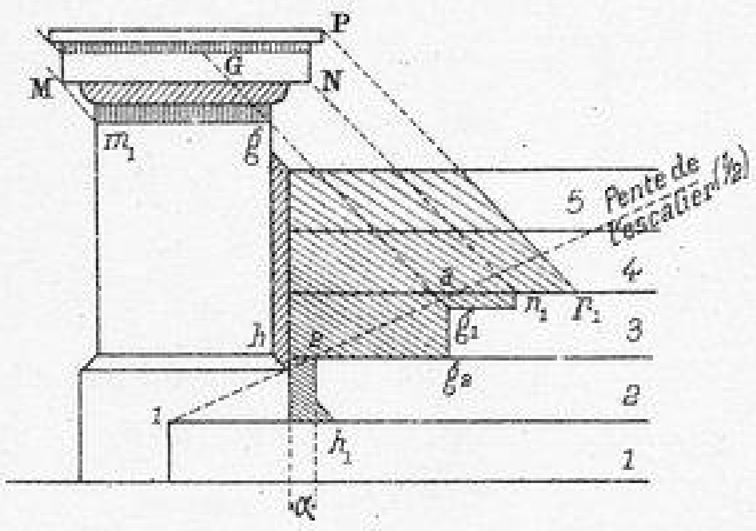
par toutes les arêtes saillantes des marches.

En plan la rampe donne, sur le sol et sur les dessus des marches des ombres telles que ZW inclinées à 1 pour 3. – etc. etc.

(b). Ombres d'un piédestal sur un escalier. (fig. 27).

1° La saillie α (supposée connue) de l'arête g h en avant de la marche N° 2, donne à priori en 2 h_1 l'ombre portée sur la face antérieure de la marche N° 2. 2° Par le point 2 on mène la ligne 2 3, 4 .... inclinée à la pente de l'escalier (ici un de hauteur pour 2 de base) et on en déduit le décrochement d'ombre $3 g_1 g_2$. 3° On cherche l'ombre propre $m_1 g$ du piédestal et on fait ressauter de g en g_1 le point limite g ...... etc... etc... Le reste de l'épure se comprend facilement.

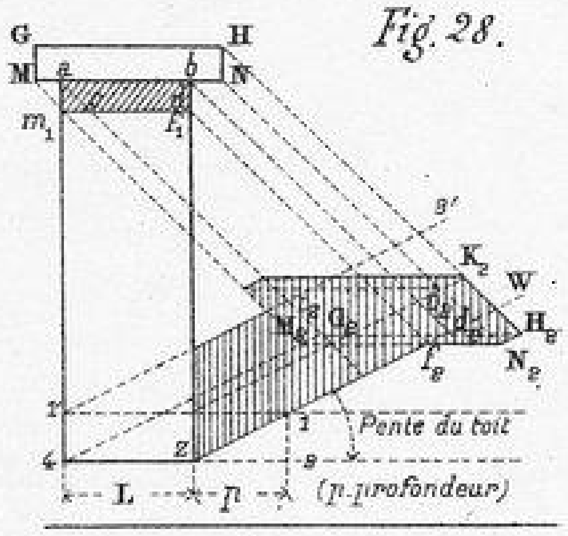
Fig. 27.



(c). Ombre d'une cheminée sur un toit (fig. 28).

1° Au pied Z de l'arête de la cheminée sur le toit, on mène ZW, incliné à la pente (supposée connue) du toit. 2° Portant de Z en 2, la profondeur p (connue) de la cheminée, on déduit sur la droite ZW, le point 1 et ensuite 1', pied sur le toit de l'arête postérieure de gauche; 1'3', parallèle à ZW, est l'ombre de cette arête. 3° en $a_2\, c_2\, b_2\, d_2$ on a le parallélogramme, virtuel, d'ombre portée par a b c d de l'espace. 4° On cherche en $m_1 f_1$ l'ombre du larmier sur le corps de la cheminée. 5° On fait ressauter cette ombre en $N_2\, H_2\, K_2$, et on remarquera que G_2 et M_2 sont sur une même ligne $4\, M_2\, G_2$ inclinée à la pente du toit et issue du point 4; de même K_2 et b_2 sont sur une même ligne à la pente du toit.

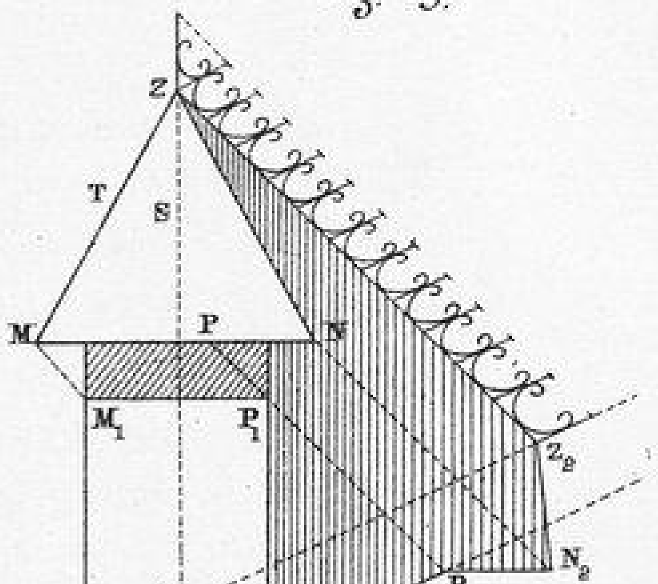
Fig. 28.



(d) Ombre d'une lucarne sur un toit.

1° La verticale $b P_1$ donne une ombre $b P_2$, inclinée à la pente du toit. 2° On prend en $M_1 P_1$ l'ombre portée du toit de la lucarne sur la face antérieure. 3° On suppose que le toit S de la croupe a la même pente que les pans latéraux T: il en résulte que l'arête MZ, et par suite le sommet Z sont dans un même plan vertical à 45°, avec $a M_1$; donc Z porte ombre en Z_2 sur la ligne $a Z_2$ inclinée à la pente du toit etc. 4° Ombre d'une crête (Voir le croquis).

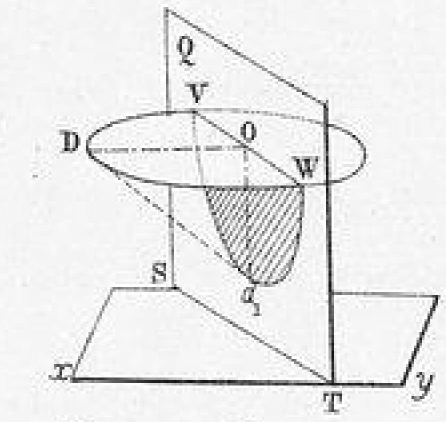
Fig. 29.



§ 11. Ombre d'un cercle horizontal sur un mur vertical fuyant à 45°.

En perspective (fig. 30) le plan Q, vertical et

Fig. 30.



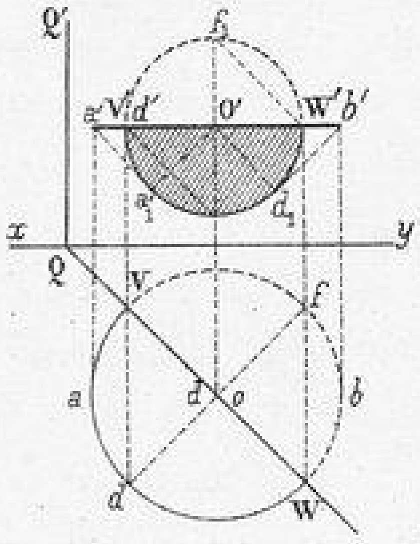


Fig. 31.

Fig. 32.

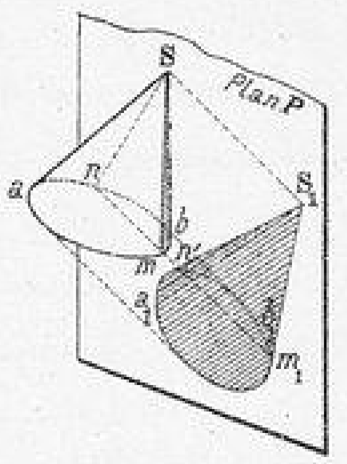
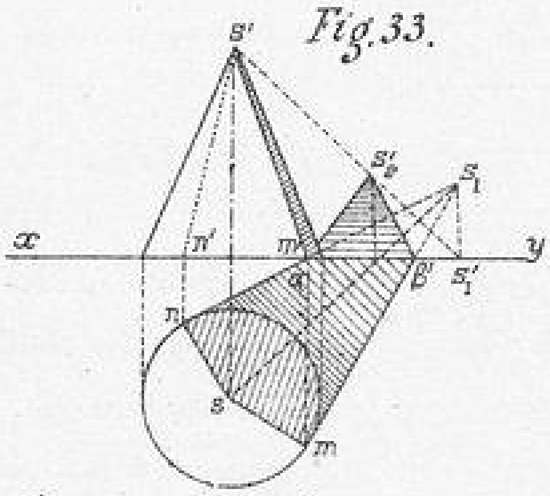


Fig. 33.



incliné à 45° sur la ligne de terre, est coupé par un cercle horizontal VDW ; on suppose que le centre O est dans le plan Q.

Nous appellerons un pareil plan : Mur fuyant à 45°.

Epure (fig. 31). Deux diamètres à angle droit VW et f d à angle droit du cercle, donneront 2 diamètres conjugués O'd'₁ et V'W' de l'ellipse d'ombre portée. Remarquer : 1° que ces diamètres sont à angle droit ; 2° qu'ils sont égaux ; donc l'ombre portée se projette suivant un cercle. – Il passe par les points V' et W', à 45°.

3ème Leçon.

§ 12. Ombre du cône (fig 32).

Méthode générale : 1° Prendre un plan auxiliaire quelconque P, sur lequel on cherche en $a_1 b_1$ l'ombre portée par la base et en S_1 celle du sommet. 2° Mener les 2 tangentes $S_1 m_1$ et $S_1 n_1$. 3° Remonter par des rayons inverses de m_1 en m et de n_1 en n sur la base ; l'ombre propre est S m et S n.

Remarque : Le plan P sera choisi : ou bien passant par la base a b ; alors il est inutile de chercher l'ombre portée de cette base ; ou bien passant par le sommet ; il est inutile de chercher l'ombre du sommet.

Epure : 1ère Méthode. – En cherchant l'ombre portée sur le plan horizontal (fig. 33).

1° On a en $S_1 S'_1$ l'ombre portée du sommet sur le plan horizontal ; 2° On mène les deux tangentes $S_1 m$ – $S_1 n$ à la base ; ce qui donne l'ombre portée du cône ; 3° les génératrices d'ombre propre sont S m S'm' et S n S'n' ; 4° On prend en S'_2 l'ombre portée du sommet sur le mur ; et on joint aux points de pliure α et B, où la première ombre portée coupe la ligne de terre ; ce qui donne en α S'_2 B l'ombre portée sur le mur.

2° Méthode : Emploi du mur fuyant à 45°.

Fig. 34.

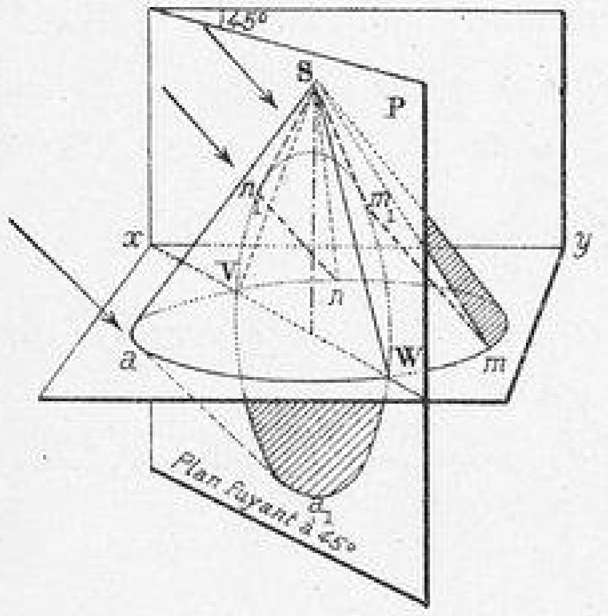
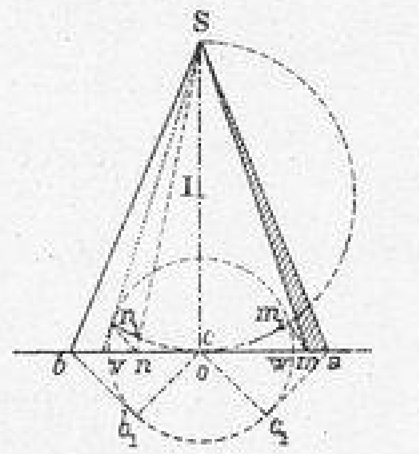


Fig. 35.



Solution dans l'espace (fig. 34).

1° On prend un mur fuyant à 45°, P, passant par l'axe et, par suite, contenant le sommet S ; 2° on y cherche en $V a_1 W$ l'ombre portée par la base (§. 11). On sait qu'elle passe par les points à 45°, V et W, de la base et que, en projection verticale, cette ombre sera projetée suivant un cercle ; 3° Le sommet S étant dans le plan P est à lui-même son ombre portée ;

4° On mène les tangentes $S n_1$ et $S m_1$ à l'ombre de la base ; 5° Par des rayons lumineux $m_1 m$ et $n_1 n$ on reporte m_1 en m et n_1 en n sur la base : L'ombre propre du cône est Sm et Sn.

(fig. 35). Epure : Soit $S a b$, le cône, d'axe vertical, et donné en élévation. 1° On cherche en $V b_1 W$ le cercle, ombre portée de la base sur le mur fuyant à 45° ; 2° On lui mène les tangentes par le point S_1 et on prend en m_1 et n_1 les points de contact ; le tracé le plus exact consiste, du point I milieu de $S O$, comme centre, à décrire une circonférence ; 3° Par des rayons à 45° $m_1 m$ et $n_1 n$ on reporte les points m_1 et n_1 sur la base : L'ombre propre est déterminée par les génératrices $S m$ (vue) et $S n$ (cachée).

§ 13. Cône à 45° – Cône à l'angle φ – Cône sans ombre.

Fig. 36.

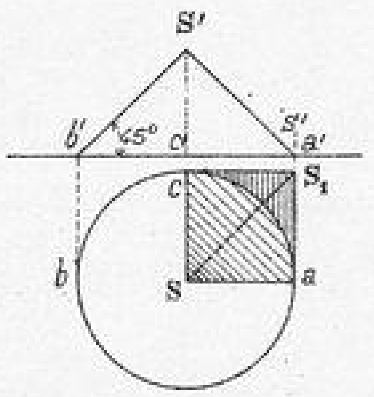
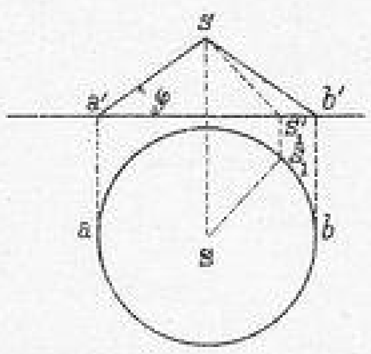


Fig. 37.



1° Cône dont l'angle à la base est de 45°. (fig. 36).

En faisant la construction du § 12, on voit que les lignes d'ombre propre $S a$ et $S c$, sont l'une la génératrice du contour apparent vertical $S a$ $S'a'$ du cône, et l'autre la génératrice centrale $S c$ $S'c'$ – Le cône a le quart de sa surface $a S c$ dans l'ombre ; – Cette ombre est toute entière cachée en élévation (fig. 36).

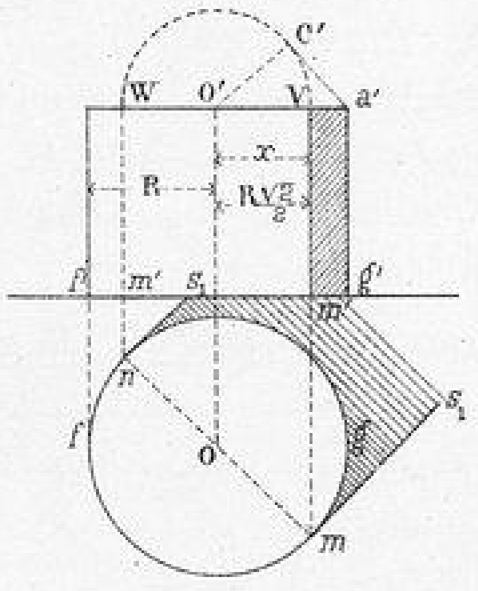
2° Cône dont l'angle à la base est φ.

Le rayon lumineux du sommet $S S_1$ ne quitte pas la surface du cône, puisque lui-même est incliné à l'angle φ. Donc S_1, ombre portée du sommet, tombe sur la base. L'ombre propre se réduit à une ligne $S S_1$ – En réalité il n'y a pas d'ombre (fig. 37).

3° à plus forte raison tout cône plus aplati que le cône à l'angle φ, n'a pas d'ombre propre.

§ 14. Ombre du cylindre.

Fig. 38.



En le considérant comme limite d'un cône dont le sommet serait à l'infini, on est conduit à mener à la base les deux tangentes à 45°, $m S_1$ et $n S_1$: Les génératrices d'ombre propre sont m' et n'.

Elles passent donc par les points à 45° de la base V et W et le tracé par le cercle $O'C'$ les donne simplement (fig. 38).

Remarque : Soit x la distance à l'axe, de la génératrice d'ombre propre ; on a $x = \frac{R\sqrt{2}}{2} = 0{,}707\,R$, c'est-à-dire sensiblement $\overline{O'V} = 0{,}7\,R$, ou $\overline{Va'} = 0{,}3\,R$.

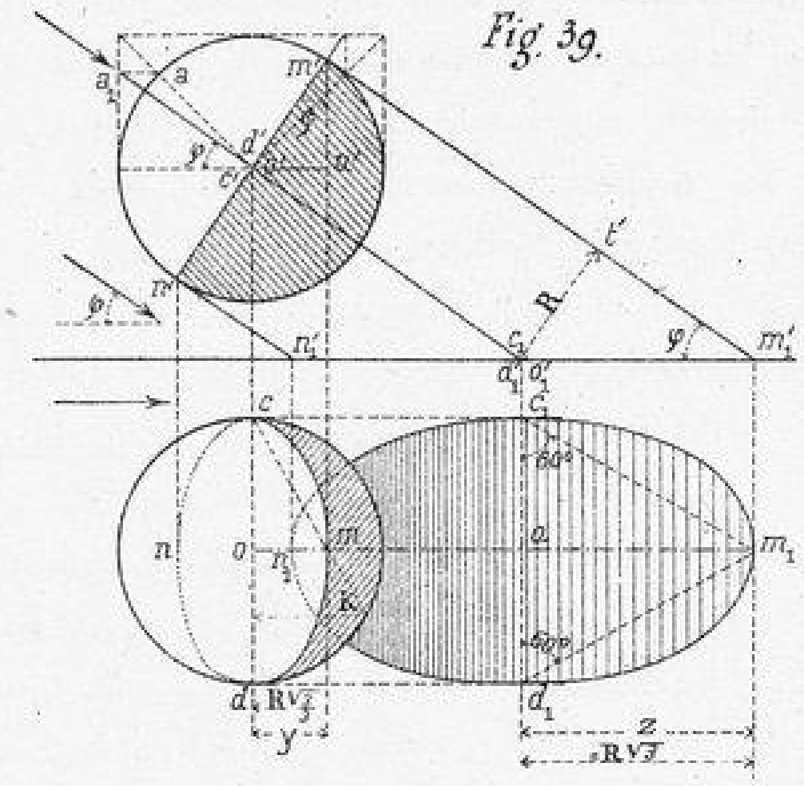
§ 15. Ombre de la sphère. – Ombre propre.

1er cas : Le rayon lumineux a été rendu parallèle au mur, c'est-à-dire projeté à l'angle φ. (fig. 39).

En élévation l'ombre propre est un cercle projeté suivant la droite $m' n'$ perpendi-

culaire au rayon φ. En plan ce sera une ellipse ; projection du cercle $m'n'$. Ses deux axes sont cd et mn.

Fig. 39.



<u>Calcul de y</u>. (demi petit axe). On a sur l'élévation $y = \overline{o'u'} = R \sin \varphi$: mais $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ donc $y = R\frac{\sqrt{3}}{3}$. Donc : <u>Le petit axe de l'ellipse d'ombre propre de la sphère est égal au tiers du côté du triangle équilatéral inscrit dans le contour apparent</u>. Construction pratique : Prendre $dK = R$; joindre Kc, et la rencontre en m avec le rayon central OO_1 donne l'extrémité du petit axe.

§ 15 bis. Ombre portée sur le plan horizontal.

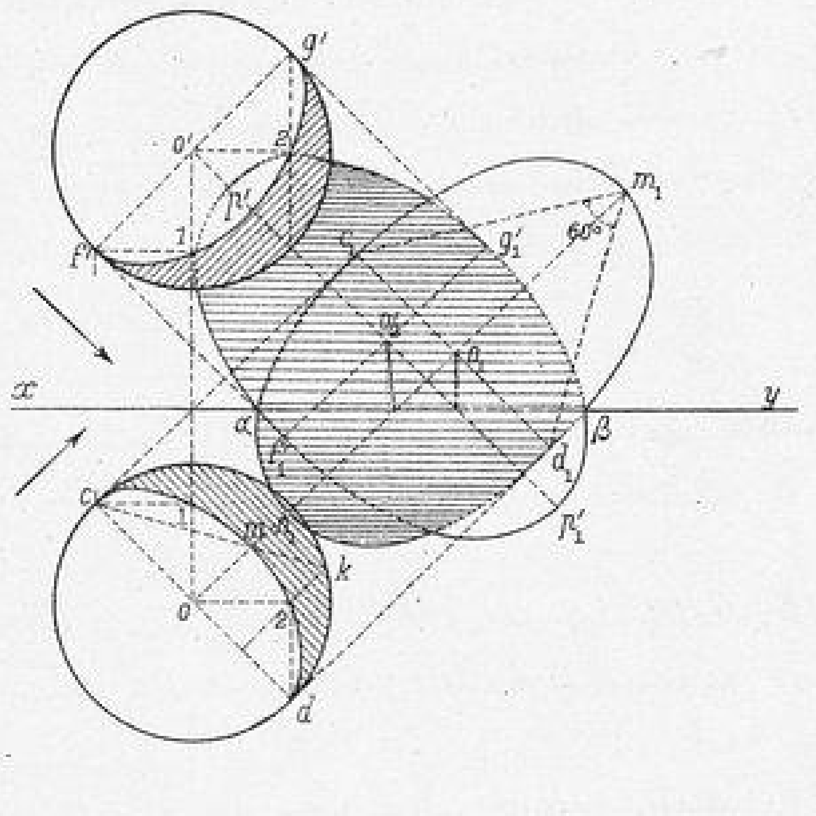
C'est l'ellipse $o_1 - n_1 m_1 c_1 d_1$; son petit axe c_1d_1 est égal au diamètre et perpendiculaire au rayon lumineux. Son demi grand axe $Z = o_1m_1$, est facile à calculer. On a sur l'élévation : $Z \sin \varphi = R$. d'où $Z = \frac{R}{\sin \varphi}$ et $Z = R\sqrt{3}$; d'où le tracé suivant :

1° Prendre $Z = 3$ fois y ; ou 2° Sur c_1d_1 comme base, construire des triangles équilatéraux ; les sommets n_1 et m_1 sont les extrémités du grand axe.

§ 16. Ombre de la sphère dans le cas général.

1° <u>En plan</u> : On a en O_1 l'ombre portée du centre : - Le petit axe de l'ellipse d'ombre portée est c_1d_1 perpendiculaire au rayon lumineux et égal au diamètre de la sphère ; - le grand axe o_1m_1 s'obtient par le triangle équilatéral (§ 15 bis). - L'ombre propre : grand axe cd, diamètre de la sphère ; Petit axe obtenu comme § 15., en om.

Fig. 40.



Nota : Les points à 45° d et c, projetés sur les diamètres $o2$ et $o1$, donnent en 1 et 2, des points de l'ellipse (sera démontré au § 17).

2° <u>Ombre en élévation</u> : Ayant en o_2 l'ombre portée par le centre sur le mur (la saillie du centre suffit pour la déterminer) on achève exactement comme pour le plan.

<u>Remarque</u> : Les <u>points de pliure</u> α β, où la première ellipse d'ombre portée rencontre la ligne de terre, appartiennent aussi à l'ellipse, ombre portée sur le mur.

(a) Ombre propre d'un tore.

§ 17. Ombre propre des surfaces de révolution.

(a) Ombre propre d'un tore (en élévation). (fig. 41).

Les points sur le contour apparent s'obtiennent en m et n par les tangentes à 45° (§ 3. Théorème des contours apparents). Par raison de symétrie le point m" projeté sur l'axe s'obtiendra en menant l'horizontale m m". Le point K sur l'équateur s'obtiendra à l'aide du cercle OSK construit comme on vient de le voir pour les cylindres.

Fig. 41.

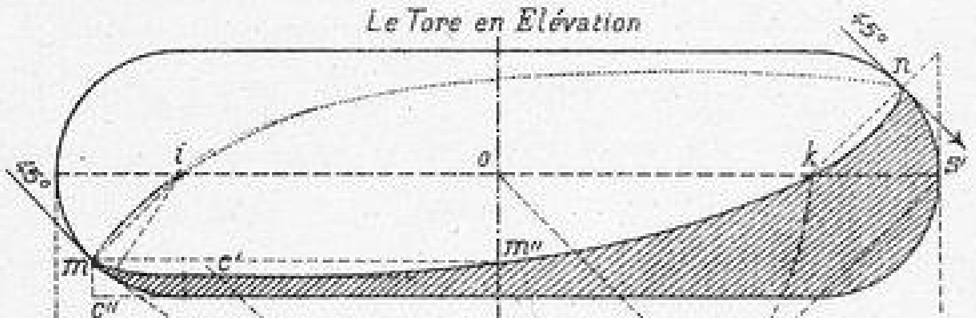


Fig. 42.

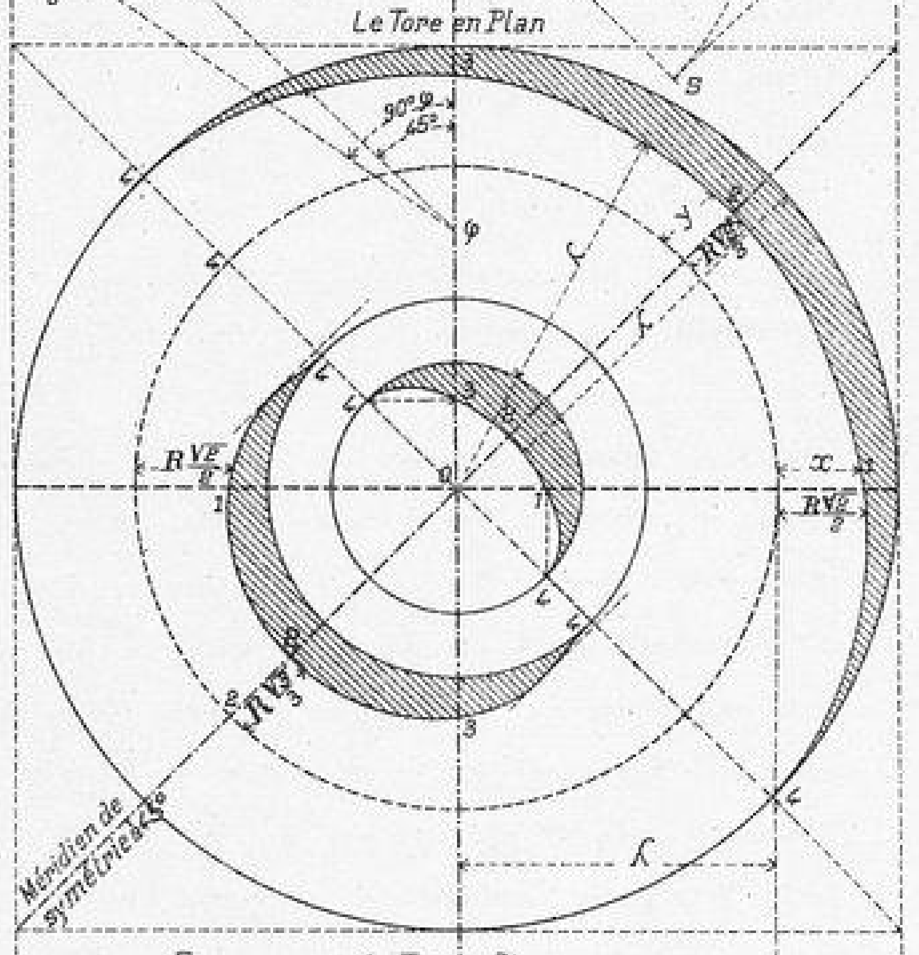
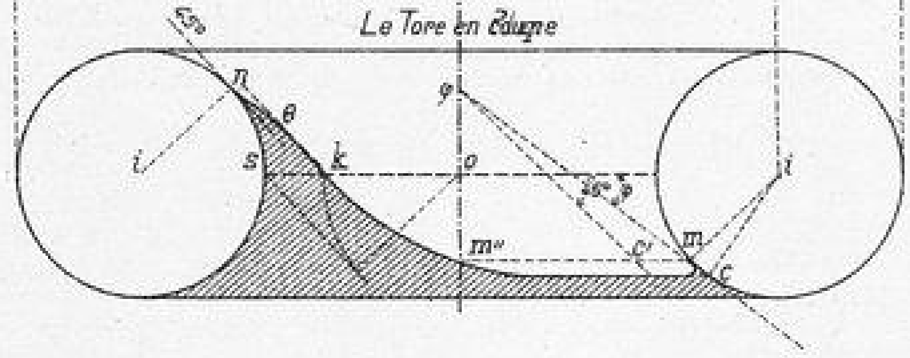


Fig. 43.



Pour trouver le point le plus bas c', on appliquera la méthode des plans sécants. On suppose que le méridien à 45° parallèle aux rayons lumineux a été amené de front entraînant avec lui le rayon lumineux qui se projette alors à l'angle φ.

On mène donc au méridien principal la tangente φc" à l'angle φ puis on ramène le point de tangence c" à sa place en c' par une rotation inverse.

Dans ce mouvement, le point φ situé sur l'axe ne bouge pas. Le point c" se déplacera horizontalement, le rayon φ redevient rayon à 45° ce qui donne le point le plus bas c'.

On a de cette manière cinq points rapidement obtenus et les tangentes en trois de ces points, ce qui suffit largement dans la pratique.

(b). Coupe.

L'ombre du même tore vu en coupe s'obtiendrait de la même manière (fig. 43) seulement elle se compliquerait de la recherche du point de passage θ. Dans la pratique on n'obtient ce point qu'approximativement en se fondant sur la propriété de la courbe d'ombre, d'y être tangente au rayon lumineux.

Il est évident que sur toutes les autres surfaces de révolution on tracera l'ombre propre par les mêmes procédés rapides que ceux que l'on vient d'indiquer.

(c). Ombre du tore en plan (fig. 42).

Points sur l'équateur 4, 4, obtenus obtenus par les tangentes à 45° - Points 1 et 1 - 3 et 3 sur les méridiens de front et de profil obtenus en menant à la méridienne principale, en élévation, les tangentes à 45° et ramenant ces points. - Point le plus haut et le plus bas 2.2. dans le méridien de symétrie à 45°, obtenus en menant à la méridienne des tangentes à l'angle φ, et ramenant.

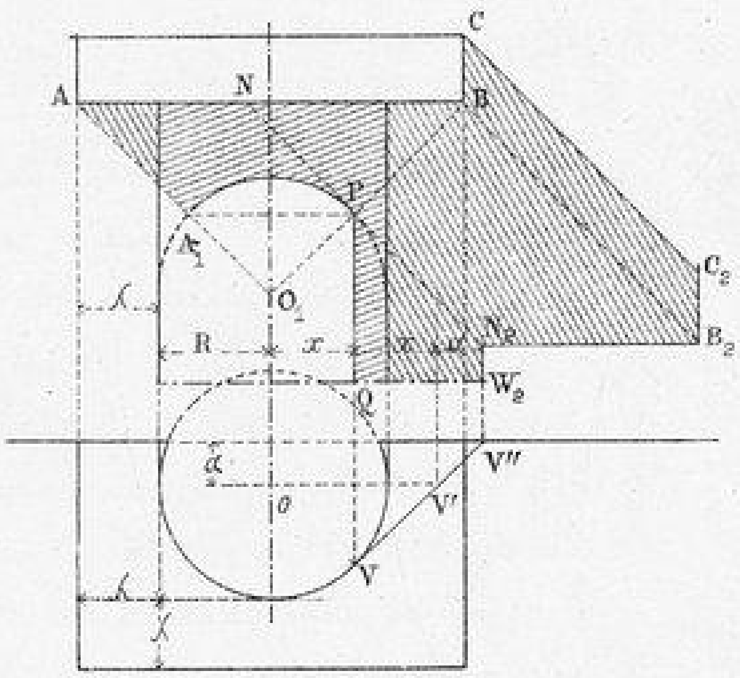
Remarque: L'ombre est une conchoïde de l'ellipse 424, ombre propre de la sphère centrale. (facile à démontrer).

Ombres portées sur les cylindres en relief.

§ 18. Ombre du tailloir. (fig. 43 bis).

Le tailloir fait, par rapport au nu de la colonne une saillie h, la même de tous les côtés.

Fig. 43 bis



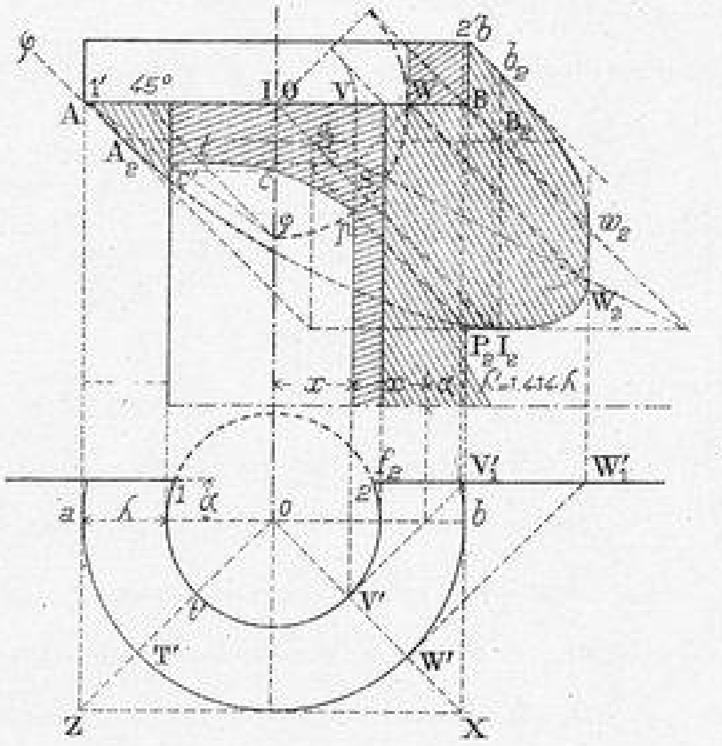
On suppose l'axe de la colonne dégagé hors du mur d'une quantité α, ordinairement égale à $1/3$ R.

L'ombre portée sur le fût est, d'après la théorie du ressaut des ombres, un cercle décrit de O_1 comme centre. – Ce cercle n'est à conserver qu'entre A_1 ombre de l'angle A du tailloir et P, point de perte (tangente à 45°). PQ est l'ombre propre du fût; son ombre portée sur le mur est en N_2, à une distance de l'ombre propre égale à $x + \alpha$.

Le reste de l'épure se comprend facilement; on voit qu'il est inutile de se servir du plan; la connaissance du dégagement α de l'axe est suffisante.

§ 19. Ombre du listel saillant. (Colonne dégagée de $1/3$ de R). (fig. 44).

Fig. 44.



1° Chercher en W et V comme il a été indiqué les ombres propres des deux cylindres.

Le cercle OW, prolongé jusqu'à l'axe donne en φ le point d'arrivée du rayon φ mené par A.

2° Point de perte. Le même cercle OW, recoupe la génératrice d'ombre propre du fût (V_1V) au point de perte p. – (La tangente à l'ombre portée y est à 45°).

3° Point le plus haut. – On applique pour ce point t, la méthode des plans sécants; par raison de symétrie il est dans le plan OZ, dit plan de symétrie à 45°.

On rabat de front ce plan; il devient le méridien principal; T' vient en a A; le rayon φ mené par A recoupe le méridien du petit cylindre en un point que l'on ramène en t par une rotation inverse de 45°.

Remarque. En menant la droite WS, inclinée à 45° et ramenant symétriquement à l'axe S, en t, on obtient le point le plus haut d'une manière peut-être plus simple.

Les points t et p, avec leurs tangentes, suffisent pour tracer la courbe.

4° Point dans l'axe c. – La courbe tracée le donne; mais on pourrait l'obtenir directement (question à chercher): dans le dessin pratique il est inutile de l'obtenir directement.

5° Point sur le contour apparent de gauche c'. – Il est, par raison de symétrie (indiquée plus haut), au même niveau que le point dans l'axe c. Il serait facile de l'obtenir directement; c'est une question à chercher.

§ 19bis. – Ombres portées sur le mur.

On connait le dégagement α (ordinairement $= \frac{1}{3} r$) de l'axe de la colonne. – On en déduit en $A_2 B_2$ situé à α au-dessous de AB, l'ombre du diamètre AB qui est de front dans la base du listel. – L'Ellipse d'ombre portée $A_2 I_2 W_2 B_2$ se trace comme il a été dit.

L'ombre portée de la colonne $p_2 f_2$ est à une distance de son ombre propre pV égale à $x + \alpha$.

Remarques : 1° p point de perte et p_2 point de brisure, sont à 45° l'un sur l'autre. – 2° de même pour W et W_2. – 3° (*important*) L'ombre portée $w_2 W_2$ du listel, déborde l'ombre portée $p_2 f_2$ du fût d'une quantité $h' = h\sqrt{2}$, soit $1{,}414\ h$, c'est-à-dire environ 1 fois $\frac{1}{2}\ h$; – h étant la saillie du listel sur le fût.

§ 20. – Cette ombre du listel se présente dans d'autres positions (*fig. 45*) et aussi dans les portiques circulaires ; Temple de Vesta, etc.

Fig. 45.

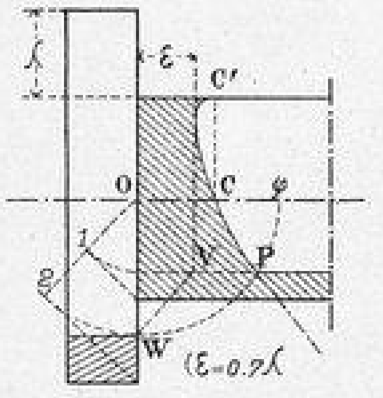
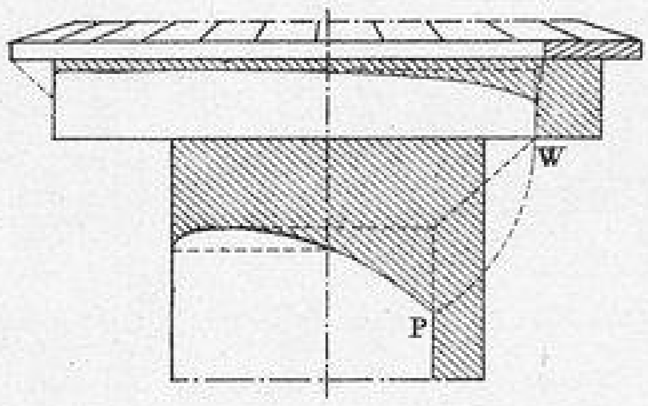


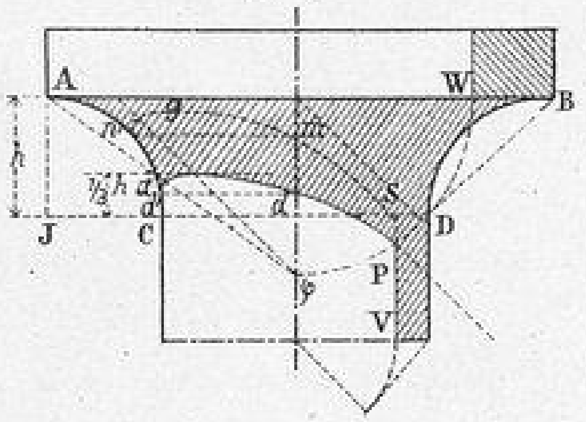
Fig. 46.



Temple circulaire. – Les colonnes sont supposées être enlevées : Pour en avoir l'ombre il faudrait avoir recours au plan. (*fig. 46*).

§ 21. – Ombre du listel avec congé circulaire. (*fig. 47*).

Fig. 47.



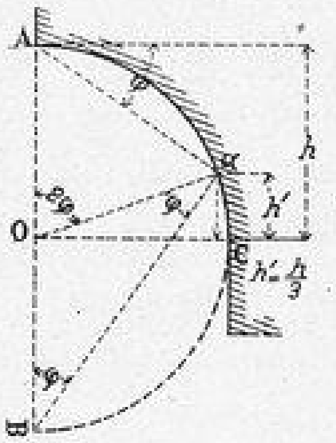
1° Les ombres propres W et vS, se tracent comme à l'ordinaire. L'ombre propre du fût vS, se continue, sans se raccorder, par l'ombre propre, virtuelle d'ailleurs, S m g n, du tore en creux qui constitue le congé (Voir ombre du tore).

2° Le point de perte p ; comme au § 20.

3° Le point le plus haut α'. – Mener par A le rayon φ ; prendre en α son recoupement avec le congé et ramener en α' par une rotation inverse de 45°.

Remarque. – La figure ci-contre (*fig. 48*) fait voir que l'angle α O A est égal à 2φ ; et l'on a en appelant h' la hauteur du point α au-dessus de c, et h celle du congé : $h' = h \cos 2\varphi$. Et comme $\cos 2\varphi = \frac{1}{3}$; on a $h' = \frac{1}{3} h$.

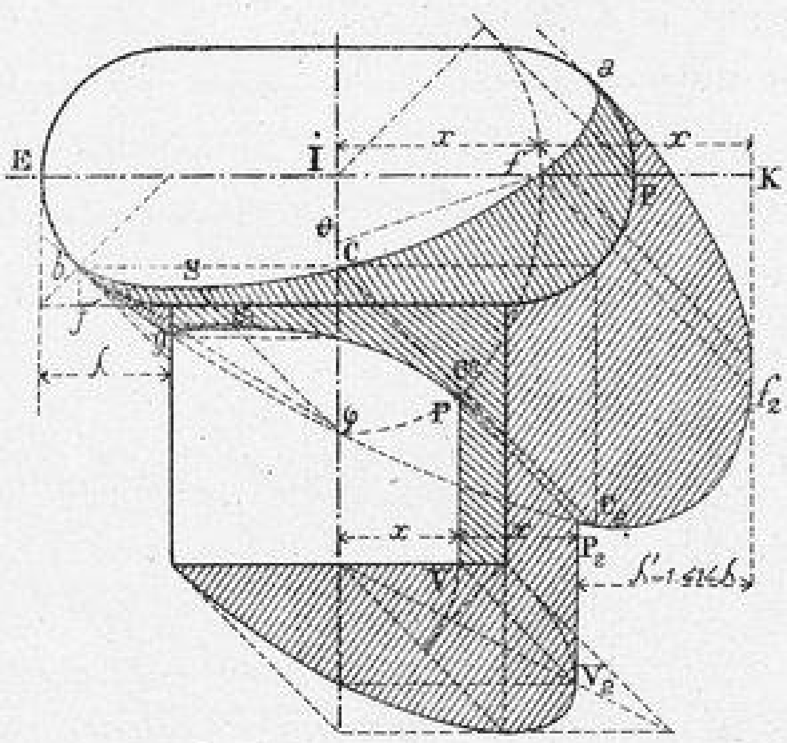
Fig. 48.



§ 22.

§ 22. Ombre de l'astragale ; c'est-à-dire ombre d'un tore sur un cylindre ayant le même axe que lui.

Fig. 49.



On supposera que la colonne n'est pas dégagée c'est-à-dire que son axe est sur le mur.

Si l'axe était dégagé d'une quantité α, cela reculerait d'autant les ombres portées sur le mur.

1° Ombre propre du tore (voir §17). b et a, points de contours apparents (tangentes à 45°) – h est ramené horizontalement dans l'axe en C. sur le méridien de profil. – Point f sur l'équateur : on a If ou $X = \overline{IF}\frac{\sqrt{2}}{2}$; le point f porte ombre sur le mur en f_2 et on a : fK = If, de même le point C porte ombre en C_2, et C_2 est à plomb de d, car la saillie de c est égale à cd. – Point S, le plus bas, obtenu en menant la tangente φ, au méridien et ramenant le point de tangence g, en S_1. – Le point S porte ombre en S_1 sur le cylindre, ce qui donne le point le plus haut de l'ombre portée sur le cylindre. En φ, situé sur l'axe, on a l'ombre portée de S sur le mur.

L'ombre portée du tore sur le mur est donc :

b (tangente à 45°) – K (sur le contour apparent) – φ (sur l'axe, tg^{te} à 45°) – C_2 (tangente horizontale) – f_2 (tangente verticale) et a (tg^{te} à 45°).

2° Ombre du fût : Elle est tracée en pV comme à l'ordinaire. – L'ombre portée est p_2V_2 obtenue en doublant la distance x.

Remarque. – Le point de brisure p_2, remonté à 45° sur pv, donnera le point de perte de l'ombre portée par le tore sur le cylindre (tangente à 45°). – Cette ombre portée peut donc se tracer C' ; nous en avons assez de points et ce sont les plus importants.

§ 22 bis. – Recherche directe du point de perte. – Courbe ovale, ou Ombre portée du tore sur le mur auxiliaire fuyant à 45°

Fig. 50.

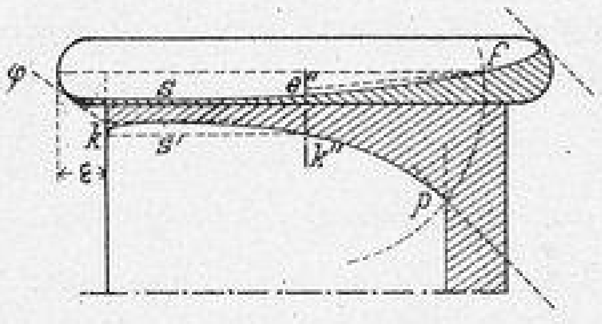
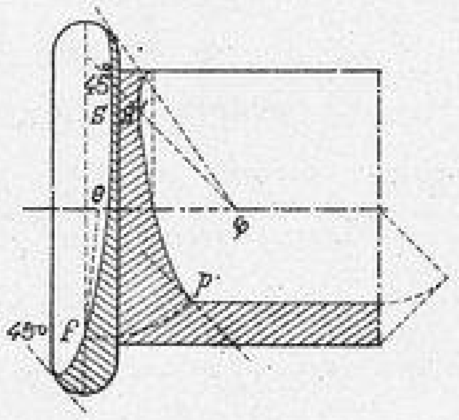


Fig. 51.



Cette ombre auxiliaire que nous nommerons la courbe ovale du tore, à cause de sa forme fPφ (ce n'est pas une ellipse) nous sera nécessaire pour les épures des leçons suivantes. – Nous la considérerons comme l'enveloppe des ombres portées sur le mur fuyant à 45°, par les parallèles du tore ; (on sait que ces ombres de parallèles sont des cercles). L'équateur donne le cercle 1f, et fournit ainsi le point f de la courbe ovale (tangente verticale). – Le parallèle à 45°, donne un cercle de rayon CC''', et donne le point C' de la courbe ovale (tangente à 45°). Enfin le point φ, sur l'axe, est l'ombre portée du point S ; il appartient à la courbe ovale (tangente horizontale). – Cette courbe ovale rencontre en P l'ombre propre PV du fût, qui est aussi dans le mur à 45°, donc P est le point de perte.

Remarque : En prenant un point θ situé sur l'axe, au tiers environ de C I, et décrivant de ce point comme centre, avec θ f pour rayon, un cercle ; ce cercle peut remplacer, sans erreur sensible, la courbe ovale ; surtout si, comme dans les figures 50 et 51, le cercle générateur r du tore a un rayon très petit par rapport au rayon R de la colonne.

4ème Leçon.

Ombres portées sur les cylindres en creux.

§ 23. - Ombre d'un cylindre de machine à vapeur, en coupe, avec son piston en saillie.

Fig. 52.

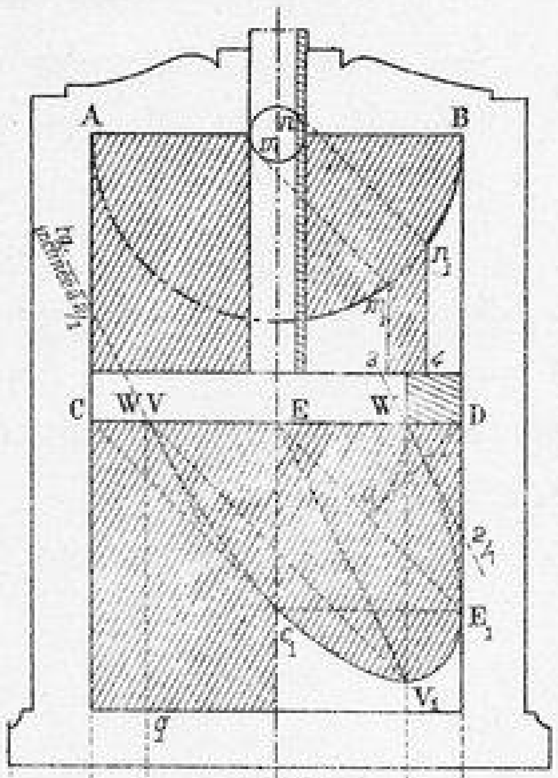
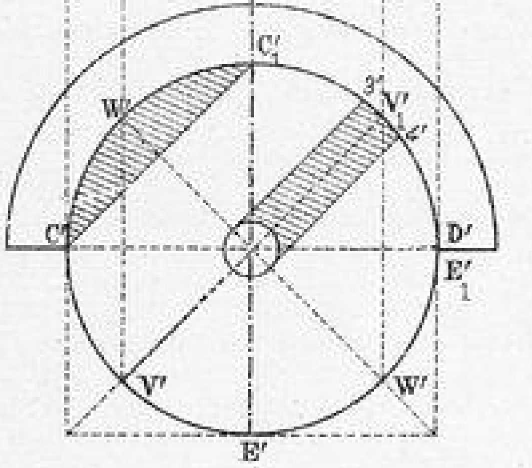


Fig. 53.



1° *Ombre du couvercle AB.* - La droite AB, coupe du couvercle, donne une ombre portée qui (voir Ressaut des ombres) est un demi-cercle décrit sur AB comme diamètre.

L'ombre m, 3 et n, 4 de la tige du piston s'obtient en inscrivant le cercle m n dans la tige et lui menant des tangentes à 45°.

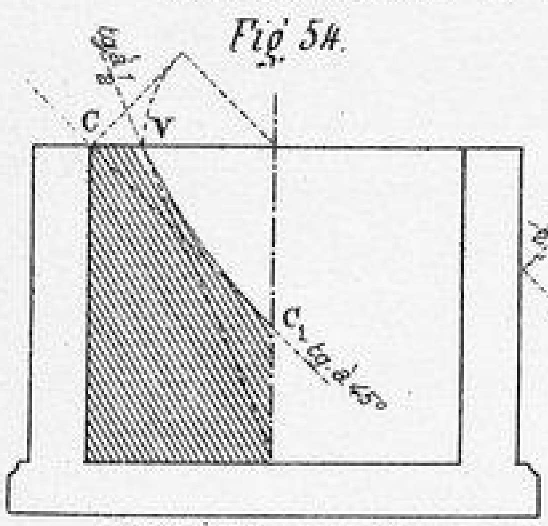
2° *Ombre du piston saillant.* - Chercher en W, l'ombre propre réelle, du piston et en Vq l'ombre propre virtuelle, du cylindre creux.

L'ombre est portée par le cercle saillant CD dans le cylindre creux qui a ce même cercle pour base. Donc d'après ce théorème connu : « Lorsque deux surfaces « du second degré ont une courbe d'entrée plane, la courbe « de sortie est plane également », l'ombre est une section plane du cylindre et, par suite, c'est une ellipse. Deux diamètres à angle droit du cercle (par exemple W W' et V'V') donneront 2 diamètres conjugués de l'Ellipse. - En élévation (fig. 52) V W est conjugué de EV_1 et comme EV_1 est incliné à 2 de hauteur pour 1 de base, les tangentes aux points de départ V et W sont inclinées à 2 pour 1. etc.. etc.. Suivre l'épure.

Remarque : C porte ombre en C_1 dans l'axe (tangente à 45°) et E porte ombre en E_1 ; (contour apparent - tangente verticale).

§ 24. - Ombre d'un cylindre ouvert, ou Ombre du Pont.

Fig. 54.



Cylindre ouvert (en coupe)

Fig. 55.

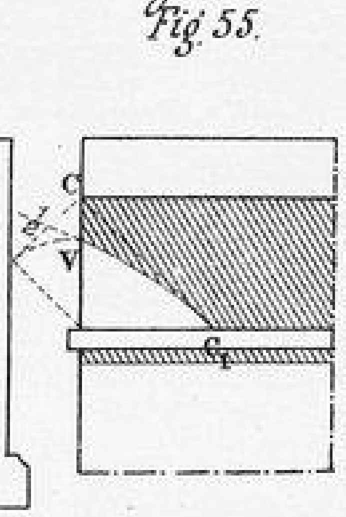
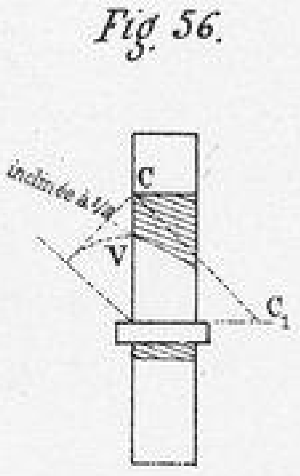


Fig. 56.

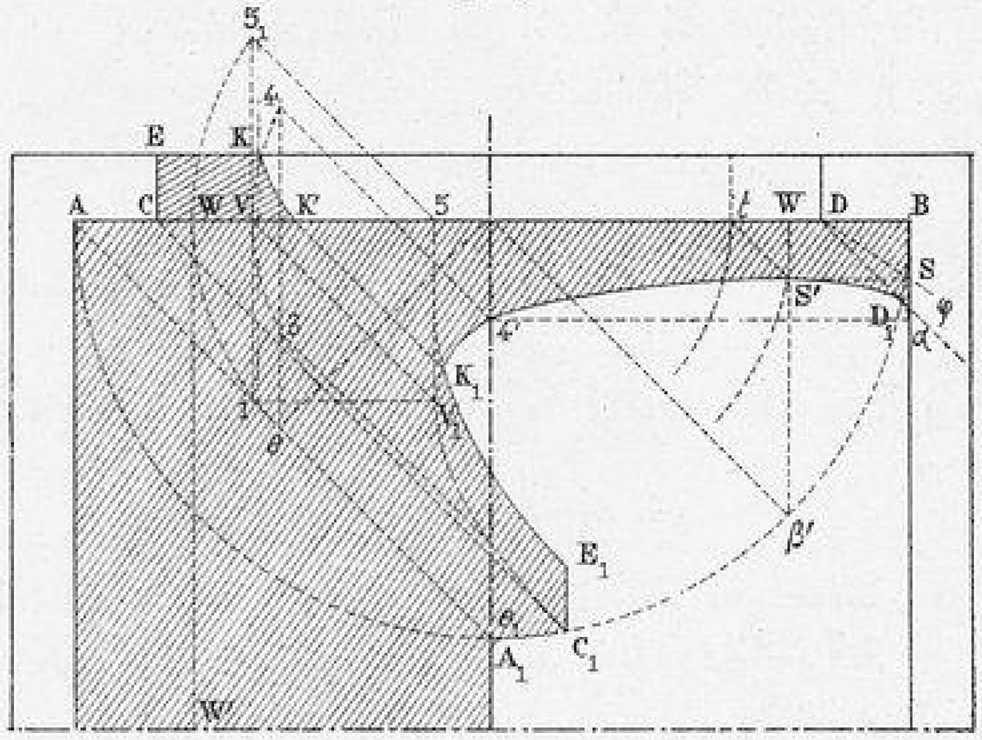


Explications inutiles.

§ 25.

§ 25. – Ombre du listel rentrant, en coupe. – arc doubleau.

Fig. 57.



1° La droite AB donnerait (fig. 57), comme ombre, le demi-cercle AA_1B, d'où l'on déduit en C_1 l'ombre de C, et en D_1 l'ombre du point D, où la droite AB est rompue par le Listel.

2° Ombre du demi-cercle rentrant COD; ce sera la courbe passant par les points : C_1 (tangente à 45°); V_1 (tangente verticale, ombre du point V, à 45°, du cercle CD); S' (point le plus haut, tangente horizontale) et D_1 ombre du point D, (tangente à 45°). Donnons quelques détails pour obtenir ces points.

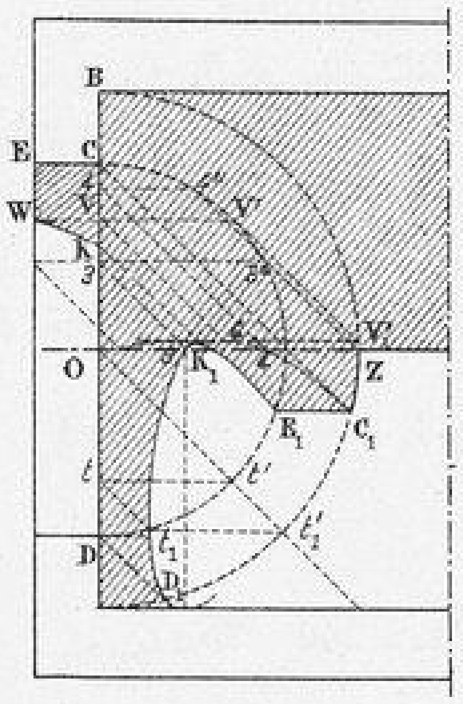
(a) Point V_1 le plus à gauche. – Il est l'ombre du point V, à 45° du cercle CD. Or V du cercle CD est dans le mur fuyant à 45°. Quelle est la génératrice du cylindre creux, de base A, dont l'ombre auxiliaire sur le mur fuyant à 45° est la droite 1V ? Reponse : C'est la droite $5V_1$; donc V porte ombre en V_1 sur cette droite. – Ajoutons la remarque suivante, facile à démontrer : V_1 est sur l'horizontale du point 1.

(b) Points 4' et b' dans l'axe. – Remonter θ_1 en θ, par la ligne à 45°, prendre les points 3 et 4 de recoupements avec le cercle OV, etc.....

(c) Point le plus haut S'. – En employant le rayon φ.

§ 25 bis. – Même problème. Autre méthode plus simple. – (le cylindre est horizontal).

Fig. 58.



Traçons les deux cercles décrits sur AB et CD comme diamètres et considérons-les comme une coupe (fig. 58) faite sur les deux cylindres et rabattue sur le coté droit.

1° Point V_1 (le plus haut) ; sur la figure 57 C'était le point le plus à gauche. – V_1 est obtenu en cherchant l'ombre de V ; projeté en coupe en V' ; donnant ombre sur le grand cylindre en V_1' relevé en V_1.

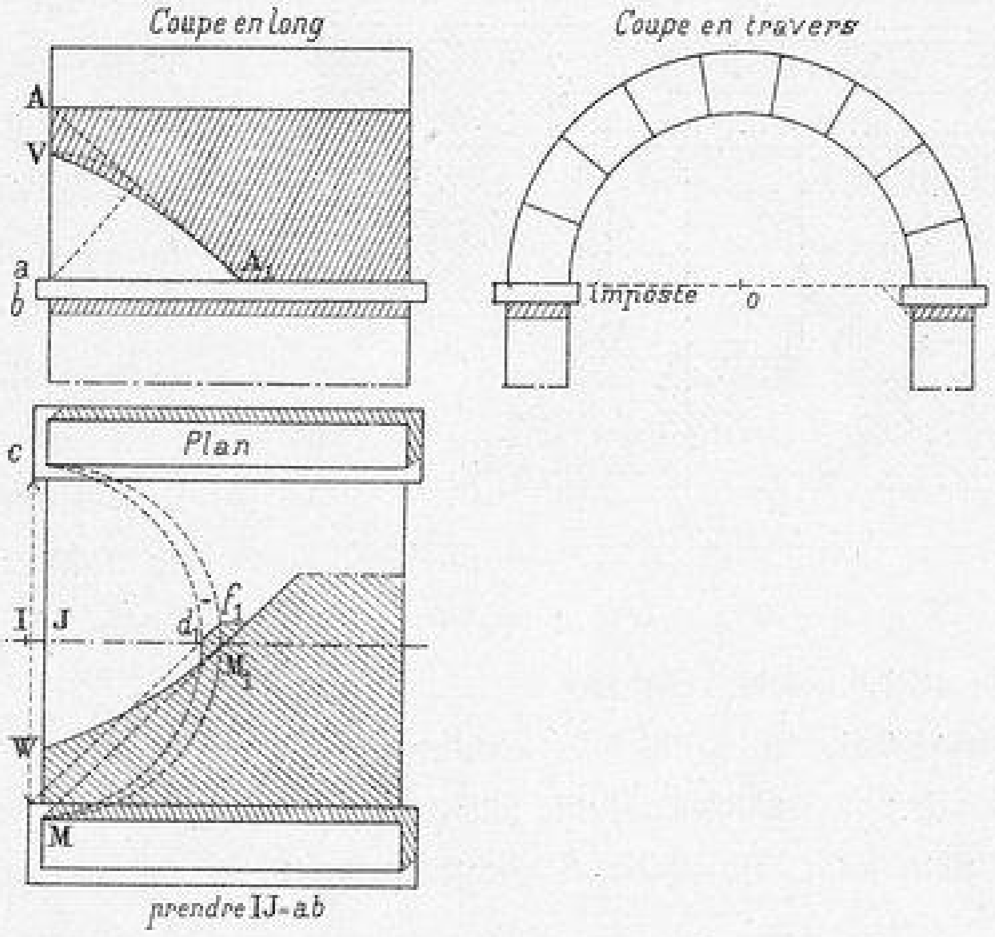
2° Points dans l'axe 3' 4'.

3° Point le plus à gauche t_1' t_1 : dans le méridien à 45°. $ot't_1'$ ..... etc.

Architecture : applications aux voûtes.

§ 26. – Un berceau. (Plan et coupes).

Fig. 59.



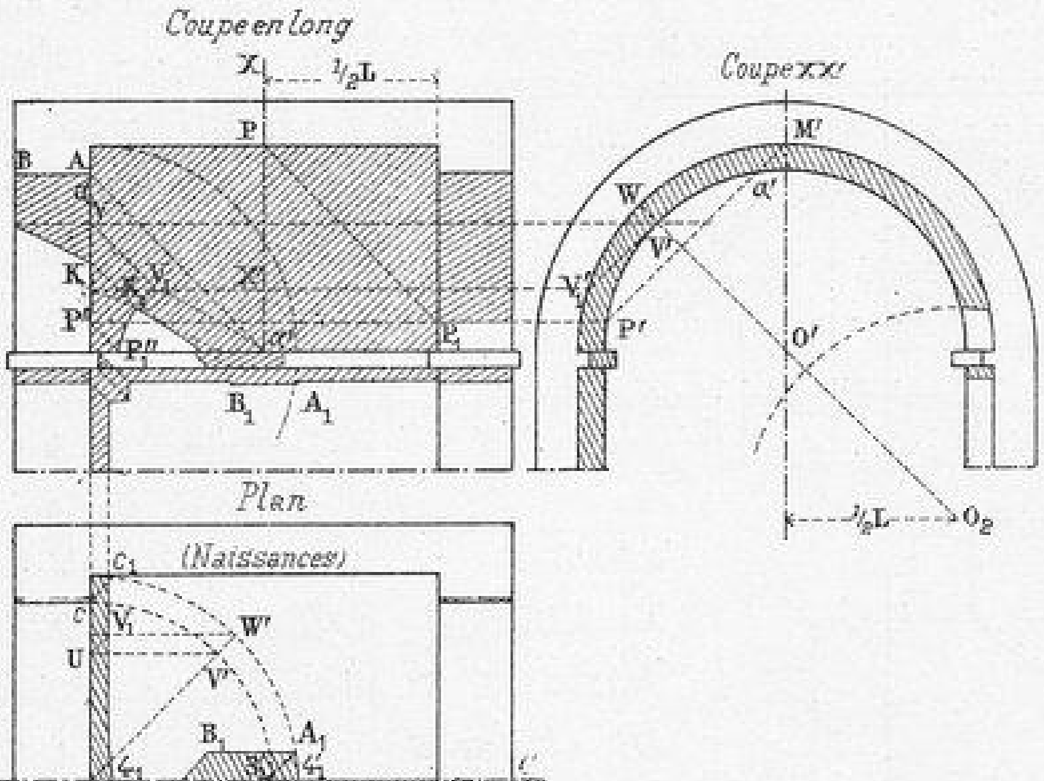
1° V, W sont les points de départ à 45° (tangente inclinée à $\frac{1}{2}$. Ombre du pont)

2° A_1 ou M_1 sur la génératrice située dans l'axe sont les ombres portées par les points A et M ; avec tangentes à 45°.

3° En plan : I et J sont les centres des cercles d'ombres portées par les arêtes du dessus et du dessous de l'imposte – Prendre IJ = ab. hauteur de l'imposte, etc. ..etc. Le reste de l'épure se comprend facilement.

§ 27. – Berceau avec arcs doubleaux.

Fig. 60.



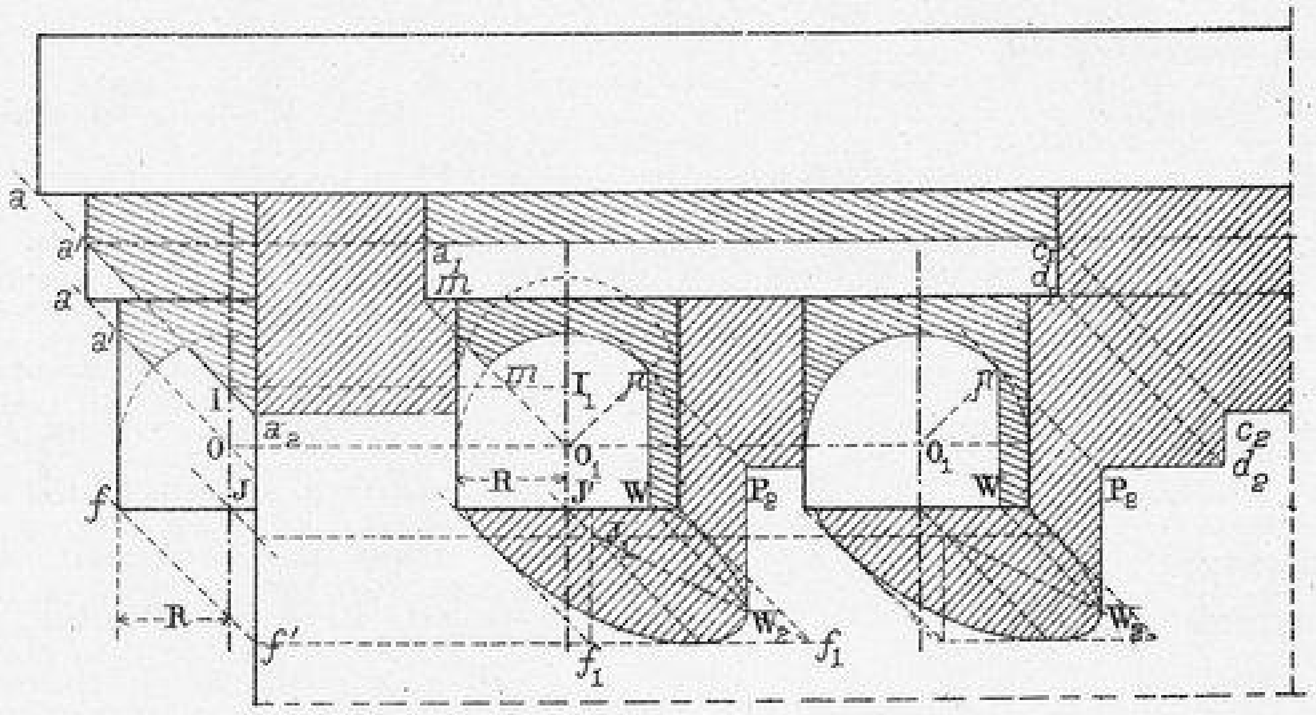
Voir l'ombre du listel en creux §25bis.

En plan le ressaut de l'ombre 4'' 4'' sur l'arc doubleau est obtenu par la rencontre en 4, du rayon à 45°, issu du point dans l'angle rentrant D.

§ 28.

§ 28. – Gouttes et leur bandeau dans l'ordre dorique (fig. 61).

Fig. 61.



Le profil de gauche permet de trouver en $a_1 c_1$ l'ombre du bandeau de l'architrave sur le bandeau des gouttes et en a_2 c_2 l'ombre (interrompue par les gouttes) du bandeau de l'architrave sur l'architrave elle-même.

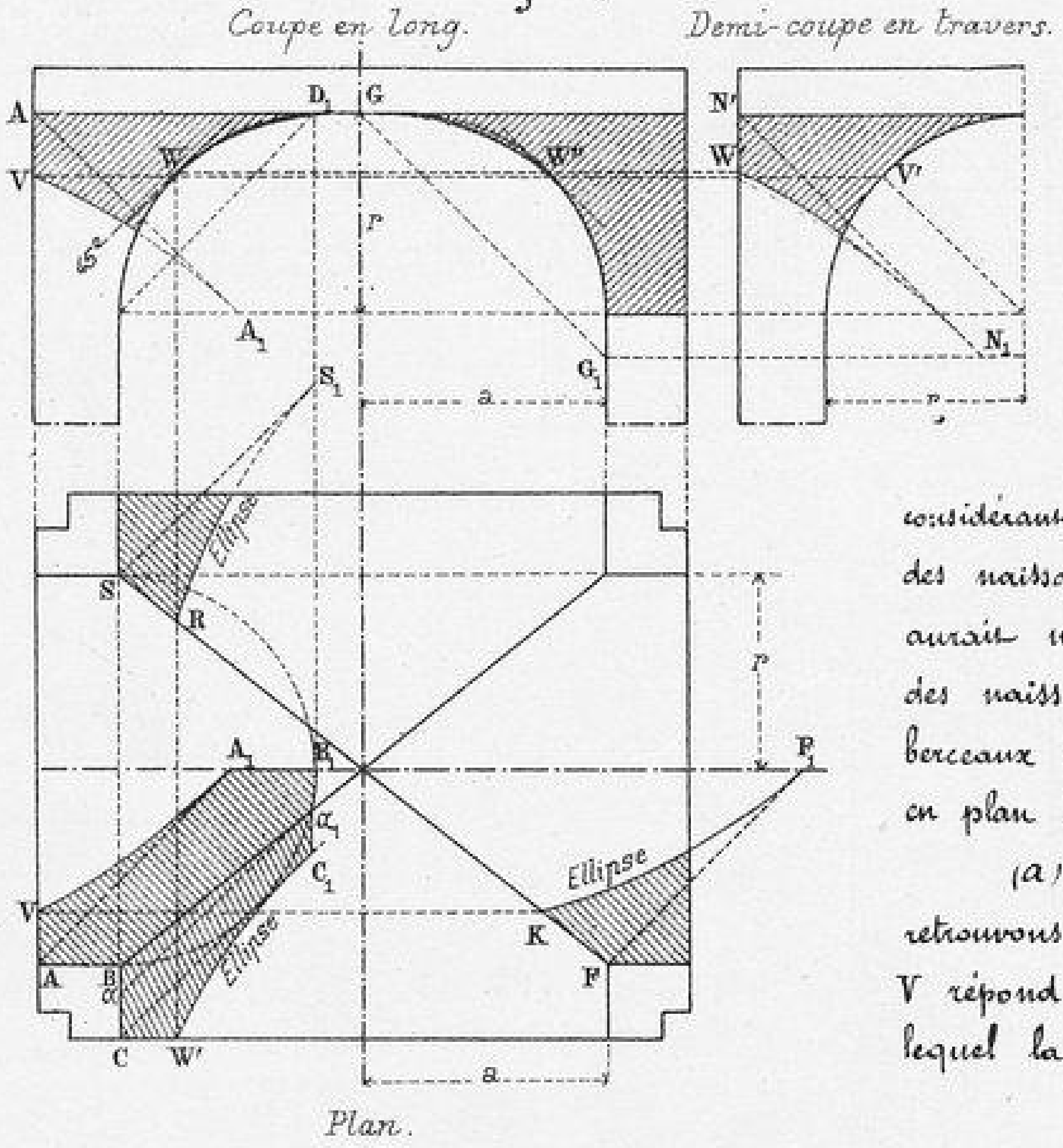
On suppose que les gouttes sont des cylindres dont l'axe est dégagé du mur de la quantité α. L'arête m d du bandeau des gouttes porte ombre sur les gouttes suivant des arcs de cercle décrits des points O_1 et O_1 comme centres.

Aux points de perte p, p, repondent les points de brisure p_2 p_2.

Enfin les cercles de base des gouttes donnent pour ombres des demi-ellipses inscrites dans les demi-parallélogrammes $J_1 f_1 f_1$ étudiés plus haut et dont le croquis ci-joint suffit à faire comprendre la construction.

§ 29. – Voûte d'arêtes sur plan barlong (fig. 62).

Fig. 62.



Une voûte d'arêtes est, géométriquement parlant, obtenue par l'intersection de 2 cylindres ayant deux plans tangents communs. – Dans le cas de la figure 62 nous avons deux berceaux, l'un plein cintre, l'autre elliptique surbaissé, ayant même plan de naissance et même montée, ce qui leur donne un plan tangent commun réel et, en considérant la symétrie par rapport au plan commun des naissances, si les cylindres étaient complétés, on aurait un 2e plan tangent commun au-dessous des naissances. Dans ce cas, l'intersection des 2 berceaux se compose de 2 courbes planes, projetées en plan suivant les diagonales telles que SF.

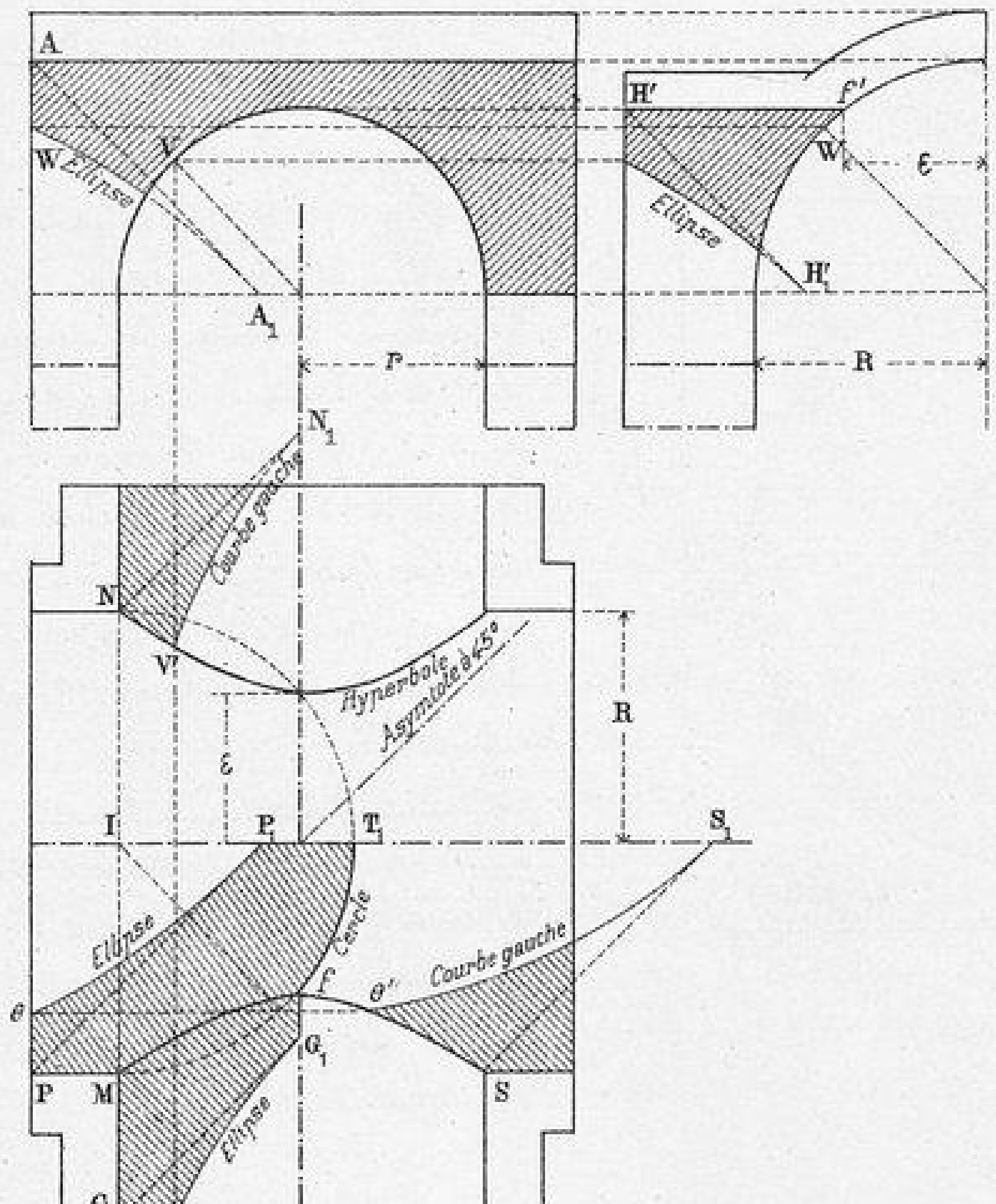
(a) *Ombres de la coupe en long.* – Nous retrouvons en VA_1 l'ombre du pont : le point V répond au point V' de la coupe en travers pour lequel la tangente au cercle de base est à 45°–

En V la tangente est inclinée à 1/2.

(b). Ombres de la 1/2 coupe en travers. – C'est aussi l'ombre du pont mais pour un berceau elliptique : Le point de départ W' répond au point W'' pour lequel, sur la coupe en long, la tangente à l'ellipse de base du grand berceau est à 45°. – Nota : En W' la tangente à l'ellipse d'ombre portée $W'N_1$ n'est pas inclinée à 1/2.

(c) Ombres du plan. – 1°. Chercher les génératrices d'ombres propres (virtuelles) des deux berceaux creux : Celle du berceau plein cintre est VK, obtenue comme l'on sait (sensiblement AV = 0,3 du rayon). Celle du berceau elliptique est W'W répondant au point W de l'Ellipse pour lequel la tangente est à 45° sur la coupe en long ; cela fait, on s'occupe d'abord des ombres sur le berceau circulaire ; 2°. Le point V est le départ de l'ombre du pont VA_1 sur le berceau circulaire, (Ellipse connue ; en V, sa tangente est inclinée à 1/2 et A_1 est sur la génératrice centrale) ; 3°. Le point K est le départ de l'ombre portée par l'arête KF dans le petit berceau, et comme FK est une courbe plane, on sait, d'après un théorème connu[1], que l'ombre portée est aussi une ellipse KF_1 ; le point F_1 est l'ombre du point F, la tangente y est à 45°, ce point F_1 est aussi dans l'axe comme le point A_1 ; mais au départ, en K, la tangente n'est pas inclinée à 1/2. On passe alors aux ombres portées sur le berceau elliptique : 4°. Le demi-cercle SB_1B, est l'ombre portée sur le petit berceau par la droite SBC supposée indéfinie ; ce cercle n'est à conserver que de B_1 en α_1 ; 5°. La génératrice $\alpha_1 c_1$ est l'ombre de la génératrice de naissance αc sur le berceau elliptique ; 6°. $W'C_1$ est une ombre du pont ; En C_1 la tangente est à 45°, cette tangente est issue du point C ; son départ W' est sur la ligne d'ombre propre trouvée ci-dessus. La tangente à ce départ n'est pas inclinée à 1/2 ; 7°. L'ombre RS_1 est portée par l'arête SF, c'est encore une ombre du pont sur berceau elliptique. Elle est facile à comprendre en regardant la figure.

Fig. 63.



Plan.

§ 30. – Lunette cylindrique droite. (fig. 63)

Dans la lunette cylindrique les deux berceaux sont tous les deux pleins cintres et, comme leurs ouvertures sont différentes, ils n'ont pas la même montée et, par conséquent, n'ont pas de plans tangents communs.

---

(1) Lorsque deux surfaces du second degré ont une courbe d'entrée plane, la courbe de sortie est également plane.

Ils se recoupent suivant deux courbes gauche, savoir MfS et sa symétrique et l'on démontre facilement que ces deux courbes sont en projection, sur le plan, des branches d'une même hyperbole équilatère [1] dont les asymptotes seraient les lignes à 45° issues du point de croisement des axes.

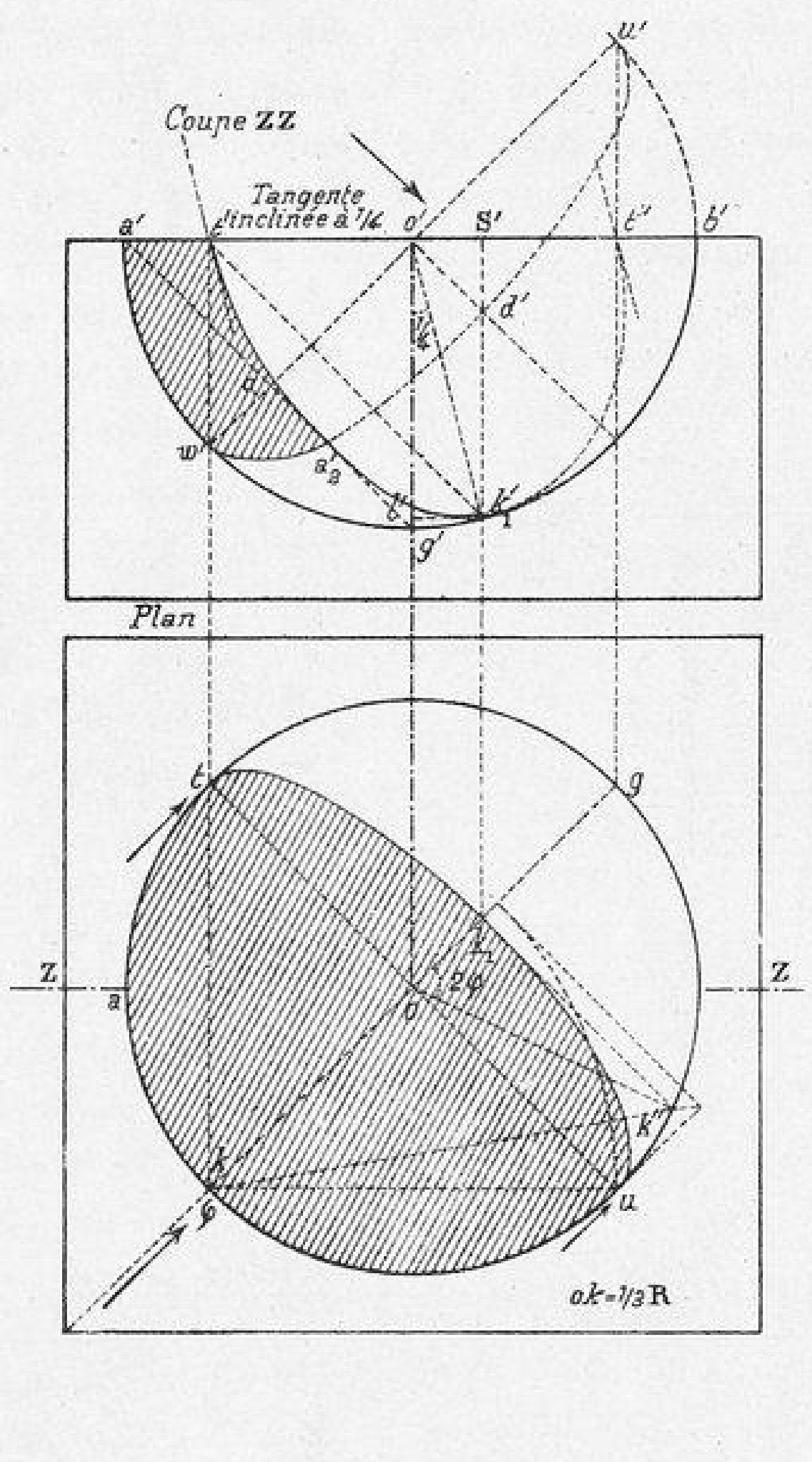
L'analogie entre cette épure et la précédente est évidente.

Ainsi sur le plan on retrouve en VG_1 et θP_1 l'ombre du pont circulaire. Seulement les courbes $\theta''S_1$ et $V'N_1$, qui sont les ombres portées par l'intersection gauche, sur les berceaux ne sont plus des ellipses; néanmoins comme pour la figure 62, en S_1 et N_1 les tangentes sont à 45°, ce qui suffit, en dessin, pour les tracer approximativement.

Ombres portées dans les sphères en creux. – Voutes sphériques.

§ 31. – Ombre de l'écuelle. – En plan (fig. 64).

Fig. 64.



Nous avons une demi-sphère creuse formant une cavité dans un bloc cubique. L'équateur tgu, en plan, donne une ombre portée tK_1u qui, d'après un théorème connu, est une section plane de la sphère et, par conséquent, un cercle projeté suivant une ellipse.

1° __Points d'origine__ t et u; ce sont ceux où le rayon lumineux est tangent à l'équateur; tu est le grand axe.

2° __Point le plus éloigné__ K_1, c'est l'ombre portée par K, situé dans le méridien de symétrie à 45°; pour l'obtenir on emploie la méthode des plans sécants. La section faite par le plan vertical kg, est rabattue sur le plan de l'équateur suivant le demi-cercle guk; le rayon lumineux du point K est rabattu en kk'', faisant l'angle φ avec Kg, le point d'intersection k'' est relevé en K_1, et l'on a dans le triangle $K''OK_1$:

$Ok_1 = Ok'' \cos 2\varphi$, c'est-à-dire Ok (petit-axe) $= \frac{1}{3}R$ (rayon de la sphère). Résultat important à retenir.

---

[1] D'après ce théorème: lorsque deux surfaces du second degré ont un plan de symétrie commun leur intersection, quoique gauche dans l'espace, se projette sur ce plan de symétrie suivant une courbe du second degré.

§ 32. – L'Écuelle en coupe.

En réalité nous n'avons devant nous qu'un quart de sphère creuse.

1° Si le méridien W'a'u' était complet, il donnerait comme ombre portée l'ellipse W'u'd'; identique à celle trouvée §31, et l'on aurait : o'd' (petit axe) = $\frac{1}{3}$ R.

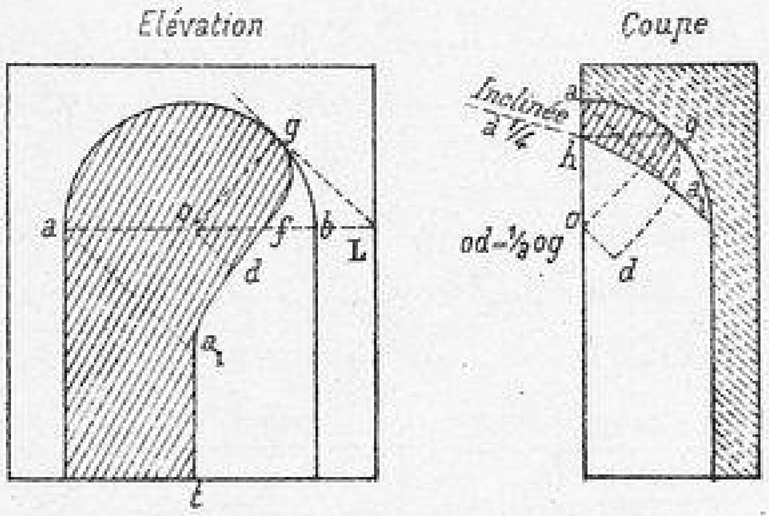
2° Mais le méridien s'arrête en a' ; on prend donc en a'_2, sur l'ellipse, l'ombre de a' et on ne garde que $w'a'_2$. – Remarque : on a aussi $d\,a'_2 = \frac{1}{3}\,\overline{\alpha g}'$; ce qui donne très exactement a'_2.

3° Ombre de l'équateur ($t'a'_2$). C'est l'ombre de la ligne at du plan : Or a' donne a'_2 (tangente à 45°) – t' est le point d'origine (à plomb de W') ; ce qui suffit à tracer l'arc d'ellipse $t'a'_2$. – Remarque : en t', la tangente est parallèle à $0'k'_1$, diamètre conjugué de 0't' ; mais, en plan : $0k_1 = \frac{1}{3}\,0g$; donc (Élévation) $l'k'_1 = \frac{1}{3}\,0't' = \frac{1}{3}\,o't'$; mais $t'S' = S'K'$, puisque $t'K'_1$ est à 45° ; donc : $0'S' = \frac{1}{3}\,S'K'_1$.

Donc : au point d'origine t', la tangente est inclinée à un de base pour quatre de hauteur.

§ 33. – Ombre de la niche sphérique. (fig. 65).

Fig. 65.

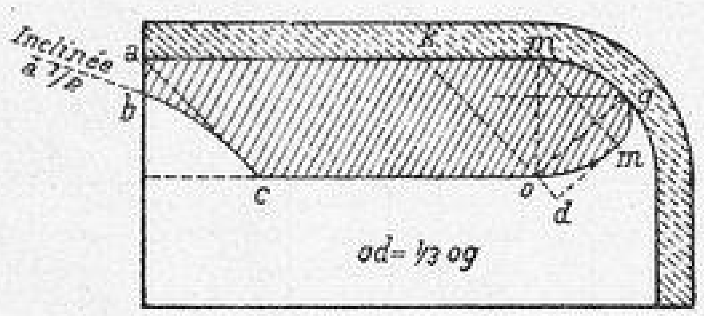


Élévation : 1° On prend od (à 45°) = $\frac{1}{3}$ R : On mène en g, la tangente à 45° et on trace le quart d'ellipse 0dg ; Bon seulement jusqu'en f. – 2° On prend en a_1 l'ombre de a (dans l'axe). 3° On relie f en a_1 par une courbe tangente en f à l'ellipse et tangente en a_1 à la génératrice a_1t.

Coupe : Identique à la coupe de la figure 64, mais autrement orientée.

§ 34. – Berceau terminé par un cul de four.

Fig. 66.



bc est l'ombre du pont. – gm est l'arc de l'ellipse de l'écuelle. – om est une ellipse raccordant m avec 0 ; elle est tangente en 0 à la génératrice co et tangente en m à l'ellipse de l'écuelle.

§ 35. – Voûte sphérique précédant un berceau plein cintre, avec arc doubleau intermédiaire. (En coupe). (fig. 67.)

Marche à suivre : 1° tracer en $\alpha g_1 m_1 A_1$ comme ci-dessus (§ 33) l'ombre de la niche, savoir : de α en g_1, tracer un arc d'ellipse dont le petit axe 0Z soit le tiers du grand axe 0α, prendre A_1 sur l'axe, à 45° avec A – Enfin relier A_1 avec g_1 par un arc de courbe tangent en g_1 à l'ellipse αg_1 et tangent en A_1 à la génératrice centrale A_1D_1.

2° Ressaut de l'ombre en $f_1 m$ sur le doubleau : à cet effet imaginer que l'on a fait une coupe par le plan de profil AA" et que cette coupe a été rabattue sur la gauche ; le cercle AgA" est le rabattement du méridien de profil de la sphère et BfB" est le rabattement du

cercle de base du doubleau. L'arc d'ellipse A f K (En A tangente à 45°, en K, tangente verticale) est l'ombre portée, comme, du cercle, AFA" sur le plan de profil; cet arc d'ellipse rencontre en f le cercle du doubleau, f rappelé en f_1 donne en ce point f_1 le départ du ressaut.-

Pour en avoir l'arrivée m, on cherchera comme ci-dessus (ombre du listel en creux) l'ombre $n_1 d_1 \delta A_1$ du doubleau sur le cylindre et le point de brisure m_1 remonté en m donnera le point d'arrivée du ressaut de l'ombre. Le reste de l'ombre $B_1 C_1 D_1$ etc.... a été étudié précédemment (ombre du listel en creux).

§ 36. - Mêmes voûtes: L'arc doubleau précède la voûte sphérique.

1° Chercher en MS comme à l'ordinaire (ombre du pont) l'arc d'ellipse MS ombre intérieure du doubleau. (*fig. 68*).

2° En WZ, on a l'ellipse d'ombre de l'écuelle; Le petit axe OZ est le tiers du grand axe OW. Elle est bonne seulement jusqu'en A_1. Ombre portée par le point A.

3° La ligne droite verticale de coupe ACDB, en la supposant non interrompue entre C et D, donnerait comme ombre dans la sphère une ellipse AW'B, qui ne serait autre chose que la section de la sphère par un plan vertical, orienté à 45° en passant par son centre. D'où l'on conclut que W' est à plomb du point à 45° W.

Vérification: A_1 déjà trouvé ci-dessus doit aussi se trouver sur cette ellipse: Elle est à conserver d'une part entre A_1 et le point C_1 ombre du point C, et d'autre part, à la partie inférieure, entre B et D_1 ombre du point D.

Fig. 67.

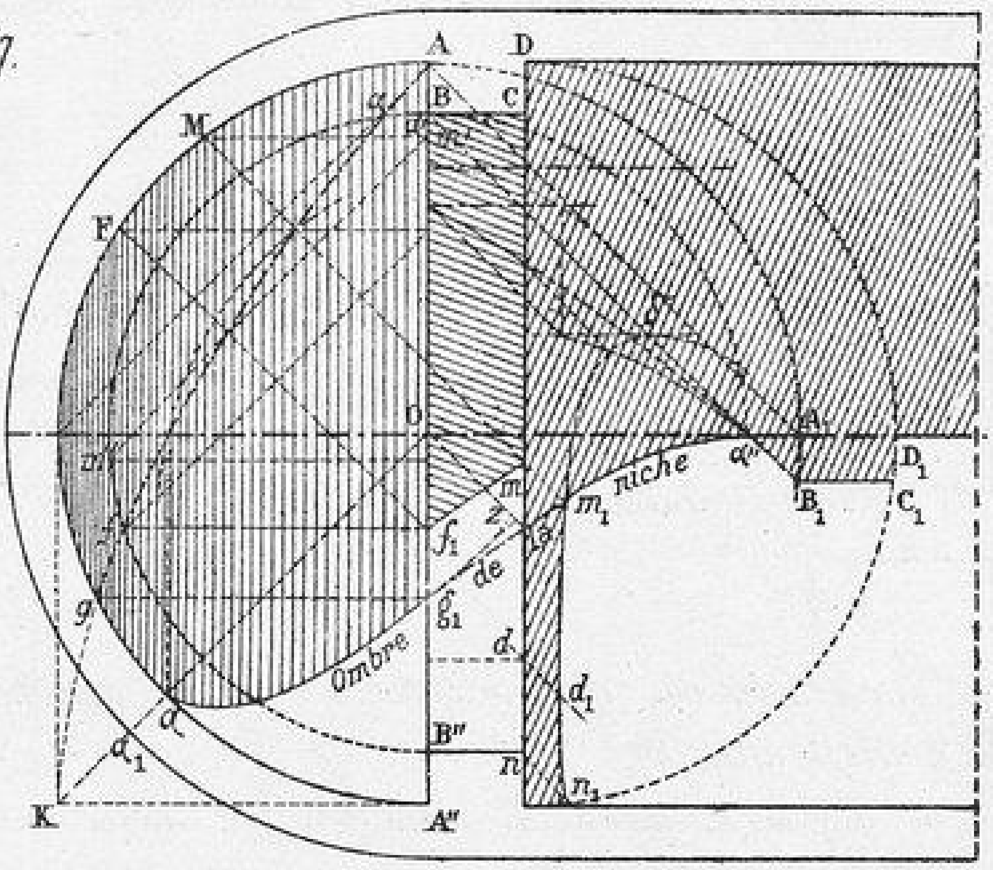
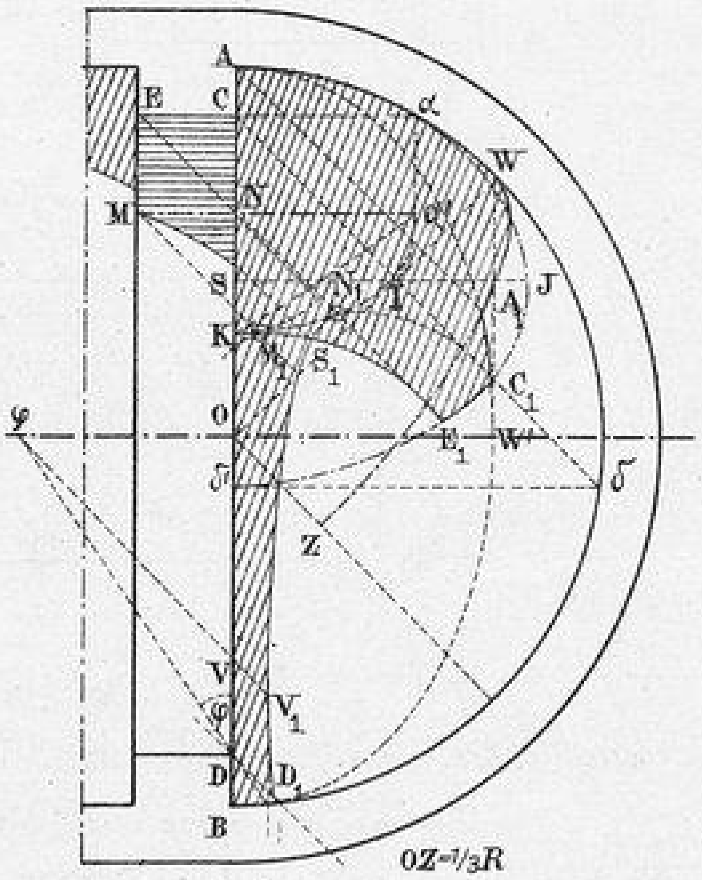


Fig. 68.



4° La droite horizontale de coupe EC supposée indéfinie donnerait comme ombre une ellipse $\alpha J C_1 \delta'$, projection du cercle à 45° suivant lequel le plan d'ombre de cette droite couperait la sphère.- Ce plan d'ombre est parallèle à la ligne de terre et incliné à 45° sur les deux plans de projection.- On démontrera facilement:

(a) que cette ellipse est tangente au méridien de front de la sphère au point α où la droite EC prolongée rencontre ce méridien.

(b) que si on mène Cδ, incliné à 45°, le point δ rappelé en δ' sur CD donne en Sδ' le petit axe de l'ellipse.

(c) que si l'on abaisse OI perpendiculaire sur Cδ, le grand axe est la droite horizontale SIJ et, de plus, le demi grand axe SJ est égal à Iδ.

(d) Vérification : cette ellipse doit passer par le point C_1 déjà obtenu. – On ne garde de cette ellipse que l'arc $C_1 E_1$, le point E_1 étant l'ombre du point E.

5° Ombre du doubleau sur la sphère : Le point V_1 le plus à gauche est obtenu par le rayon φ comme il a été indiqué pour d'autres cas.

L'ombre du cercle de profil D C, passe donc par les points suivants, savoir : D_1 (déjà trouvé avec tangente à 45°), V_1 déjà trouvé (avec tangente verticale) et C_1 déjà trouvé (avec tangente à 45°). Il serait bon d'en avoir un point intermédiaire, par exemple le point N_1 ombre portée par le point N situé sur la génératrice M N d'ombre propre, virtuelle, du doubleau ; à cet effet :

Cherchons l'ombre portée sur la sphère par la droite horizontale M N.

Ce sera comme pour la droite horizontale E C, une ellipse à 45°. Le point α' situé sur la droite M N prolongée et à plomb du point α, déjà trouvé, est un point de cette ellipse ; car c'est le point où la droite M N perce la sphère. On le reconnaît en remarquant que si l'on déplaçait parallèlement à lui-même le cercle de profil C D, jusqu'à ce que C prenne la position α, le cercle C D ainsi déplacé serait tout entier sur la sphère ; donc le point N prendrait la position α'.

Nα' sera le demi grand axe de l'ellipse cherchée et, comme elle doit être semblable à l'ellipse déjà trouvée J δ' on aura en K l'extrémité du petit axe. – D'ailleurs α'K serait inclinée à l'angle φ. (facile à démontrer). – Cette ellipse une fois tracée on en déduit en N_1 et M_1 les ombres des points N et M : De plus les ombres définitives du doubleau $S_1 N_1 C_1$ et $M_1 S_1 E_1$ sont tangentes à cette ellipse auxiliaire.

Nota. – Observer la concordance à 45°, du point limite S et du point de brisure S_1.

§ 37. – Ombres d'une voûte sphérique sur pendentifs, avec arcs doubleaux (fig. 69).

1° Constitution de la voûte : Imaginons une demi sphère dont l'équateur passerait par les quatre sommets C C_1 C_1 d'un carré horizontal (voir le plan). Coupons cette sphère par quatre plans verticaux passant par les quatre côtés $C_1 C$ – $C C_1$ etc ..... du carré ; ce qui donne quatre petits cercles de la sphère. On peut prendre ces petits cercles pour bases de quatre cylindres, ou berceaux horizontaux, auxquels la sphère sert de jonction.

On nomme pendentifs les triangles sphériques qui aboutissent en pointe aux encoignures C, C_1 ...... et par l'intermédiaire desquels la voûte repose sur ses points d'appui. Au-dessus des pendentifs se trouve la coupole ω W (voir la coupe) ayant la forme d'une calotte sphérique. Les berceaux peuvent être renforcés par des doubleaux à leur jonction avec la sphère.

2° Ombres de la coupe : Nous supposons que le doubleau du fond est un formeret, c'est-à-dire qu'il est encastré à moitié dans un mur plein L L (voir le plan).

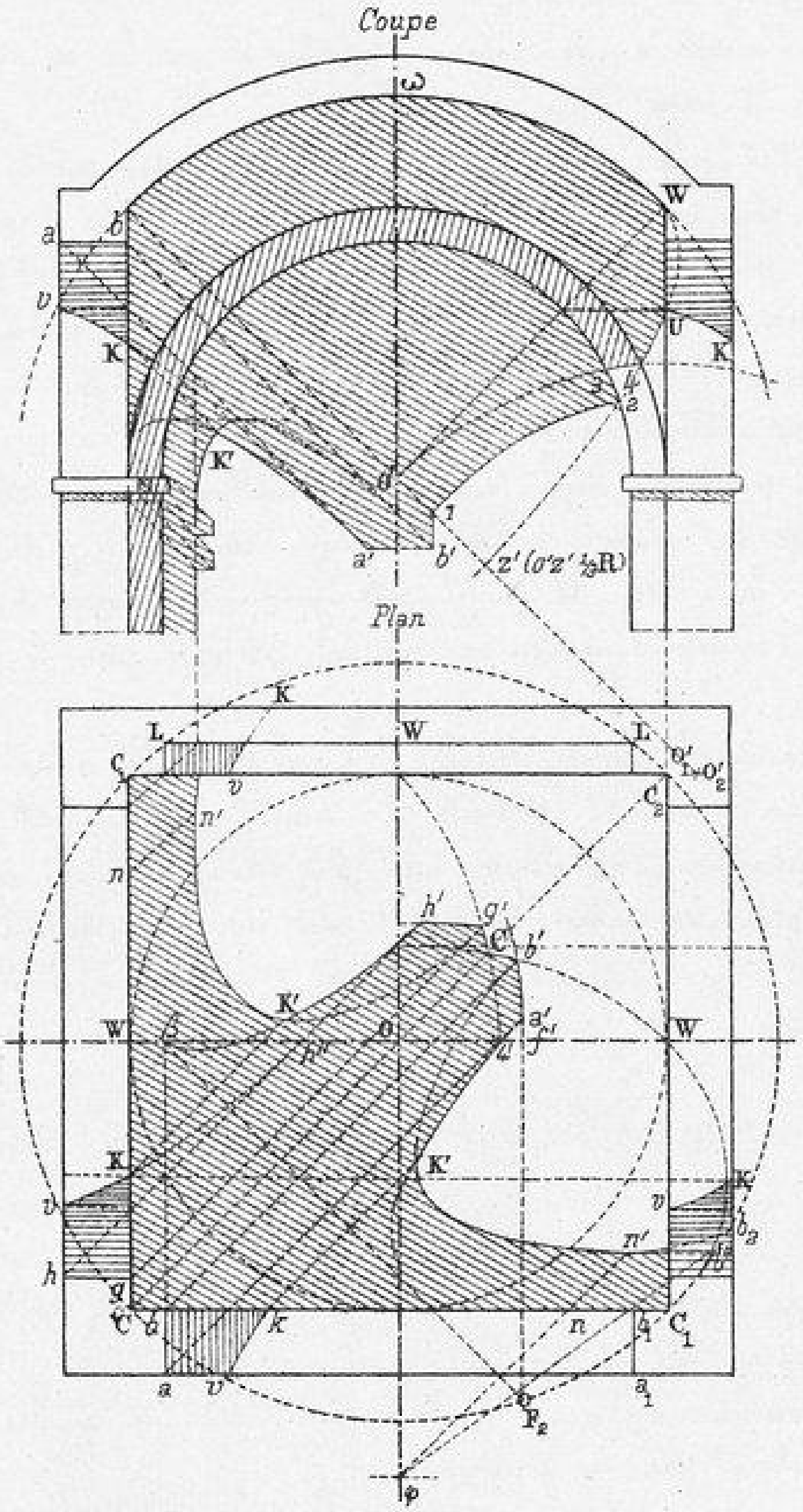
Les trois autres doubleaux sont ouverts.

(a) On trouve comme à l'ordinaire, par la connaissance des saillies, l'ombre $0'_1$ du centre 0 sur le plan $C_1 C_2$ du formeret et en $0'_2$ l'ombre de ce même centre sur le plan L L du mur de fond. – De ces points comme centre, avec un rayon égal à 0'b on décrit les deux arcs de cercle 1,2 et 3,4.

(b) On a en K'a'b'1 l'ombre commune de l'arcade en coupe.

(c) En v K, l'ombre du pont

Fig. 69.



(d). En W Z' l'ombre de l'écuelle; comme vérification le point 4 est commun à l'ellipse W Z' et à l'arc de cercle 3,4.

3° Ombres du plan: On remarquera d'abord que la diagonale à 45°. CC_2 sera une ligne de symétrie pour l'ombre. On cherchera donc seulement la portion de l'ombre située d'un côté de cette diagonale, par exemple au-dessous et à droite. Cela posé:

1° On cherche l'ombre de la ligne droite de coupe CC_1, supposée non rompue de b en b_1. C'est une ellipse passant par les points suivants: C_1 (tangente à 45°, car C_1 est le point de tangence à 45°, de l'équateur, contour apparent horizontal de la sphère). W, placé dans l'axe. – C' ombre du point C situé sur la diagonale CC_2 et pour lequel $OC' = \frac{1}{3}\, OC_2$ (Voir ombre de l'écuelle). Cette ellipse n'est à conserver qu'entre C' et b'; b' est à 45° avec le point b, dont il est l'ombre.

2° On cherche l'ombre portée par la ligne droite de coupe b a, supposée indéfinie. C'est encore un arc d'ellipse b'f' dont on a déjà un point b', obtenu ci-dessus, le point f' extrémité de son petit axe est à plomb de F_2; – obtenu comme suit: $B F_2$ est à 45° et B est à plomb de b. (Ce tracé est facile à justifier en considérant $B F_2$ comme la trace sur un plan vertical du plan d'ombre de la droite indéfinie a b B); en f' la tangente à l'arc d'ellipse b'a'f' est verticale: cet arc est donc connu; il est à conserver seulement entre b' ombre du point b et a' ombre du point a.

3° On cherche l'ombre $b'K'n'b_2$ portée par le premier arc CC_1 du doubleau. On a en b' déjà trouvé son point de départ avec tangente à 45° – En n' obtenu par l'angle φ, le point le plus près. On trouverait facilement un point intermédiaire. On fait ressauter le point limite K de l'ombre du pont VK, en K', ce qui donne le point de brisure. L'ombre du 2e arc $a a_1$ part du point a', déjà trouvé, avec tangente à 45°, et aboutit en K' point de brisure que nous venons de déterminer, ce qui suffit pour la tracer.

§ 38.

Colonnes et Chapiteaux.

<u>5ème Leçon.</u> § 38. – Chapiteau dorique. (fig. 70).

(a) Talon du tailloir : (aucune difficulté, voir ombres portées sur moulures cylindriques).

(b) Échine : c'est une portion de tore, dont la méridienne n'est pas un arc de cercle, mais la courbe connue du quart de rond. – Elle se trace à la main.

On cherche : 1° son ombre propre savoir : le point F situé à 45° sur l'équateur (tracé connu). Le point B sur le contour apparent de gauche (tangente à 45°) et le point B' sur le méridien de profil et au même niveau que B. – Le point le plus bas C' en menant la tangente à l'angle φ, et ramenant le point de contact C en C'.

2° L'ombre auxiliaire portée par le tore sur le plan fuyant à 45° (tracé connu). On voit la partie utile de cette ombre auxiliaire en F (tangente verticale) B_2 (tangente à 45°) φ (tangente horizontale ; nous nommerons cette courbe la <u>courbe ovale de l'Échine</u>.

(c) Ombre du tailloir AA, sur le tore. – Cette droite porte ombre sur le plan auxiliaire fuyant, suivant la droite à 45°, A'I qui va servir.

L'ombre portée par AA' sur l'échine n'est autre chose qu'une section de ce tore par un plan passant par AA', incliné à 45° et parallèle à la ligne de terre.

Si ce plan tournait de 45° autour de l'axe du chapiteau il deviendrait perpendiculaire au plan vertical de projection et y serait projeté en entier suivant sa trace AI qui serait l'ombre de l'arête projetée toute entière au point A de gauche. – Faisons faire une rotation de 90° à cette section projetée suivant la droite AI et nous aurons l'ombre cherchée p p" M' P'.

On aura le point le plus haut M', en ramenant le point M sur l'axe.

Pour obtenir les autres points, appliquons la méthode des projections obliques et servons-nous du plan auxiliaire fuyant à 45°, de la manière suivante :

Les deux points de perte P' et p s'obtiennent en prenant les intersections P_3' et P_3 de la droite A'I ombre auxiliaire de l'arête AA' et de la courbe ovale F B_2 φ, ombre auxiliaire de l'échine et remontant par des rayons lumineux inverses, aux points p et P' sur la séparatrice du tore (En p et P', tangentes à 45°).

Remarque : 1° Par raison de symétrie le point P' reporté symétriquement en p" donne un autre point de la courbe d'ombre portée. – 2° L'arête du tailloir projetée en A a son ombre M g, qui rencontre en g la séparatrice. Les deux points p et g doivent être au même niveau.

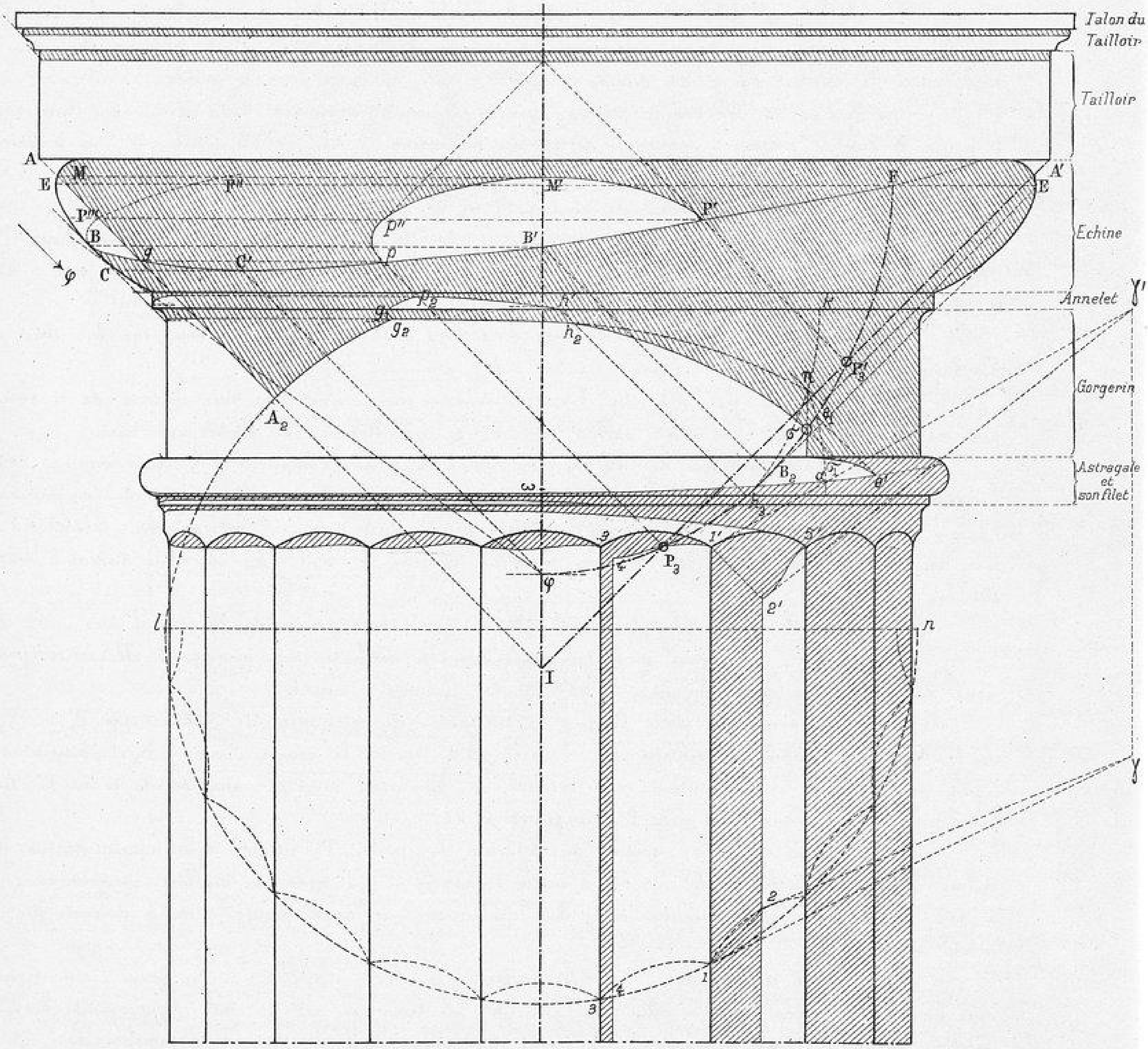
(d) Ombre du tailloir sur le gorgerin et sur l'annelet. – Du point I comme centre avec un premier rayon égal à celui du gorgerin on trace un arc de cercle $A_2 g_2$ c'est l'ombre indéfinie du tailloir sur le gorgerin. On prend un rayon égal à celui de l'annelet et, du même centre I un nouvel arc de cercle $g_1 p_2$ donne l'ombre portée sur cet annelet. On limite cette dernière en p_2 qui est le ressaut du point de perte p. De même g_1 ressaute en g_2.

(e) Ombre de l'échine sur l'annelet, sur le gorgerin et sur l'astragale. –

1° <u>Sur l'annelet</u>. – p_2 déjà obtenu en est un point. – Le point limite h_1 s'obtient en traçant en Kh_3 le cercle d'ombre portée par la base de l'annelet sur le plan fuyant à 45°. (On sait que c'est le cercle qui passe par le point à 45°, k, du cercle de base de l'annelet.

prenant son intersection h_3 avec la courbe ovale $F\varphi$ et remontant par un rayon inverse.

Fig. 70.



2° <u>Sur le gorgerin</u>. – On chercherait d'abord comme on l'a vu plus haut l'ombre $g_2 h_2 \pi$ du listel sur le gorgerin (π en serait le point de perte).

On fait ressauter g_1 en g_2 et h_1 en h_2 sur cette courbe, qui n'est à conserver qu'entre g_2 et h_2 et, à gauche, au delà de l'ombre à 45°, $g A_2$. A partir de h_2 l'échine substitue son ombre $h_2 \sigma$ à

celle de l'annelet. Le point de perte, avec tangence à 45°, est en σ, au point où la courbe ovale $F\varphi$ rencontre la séparatrice $\pi\sigma$ du gorgerin. La tangente y est à 45° ce qui suffit pour tracer la courbe de h_2 en σ.

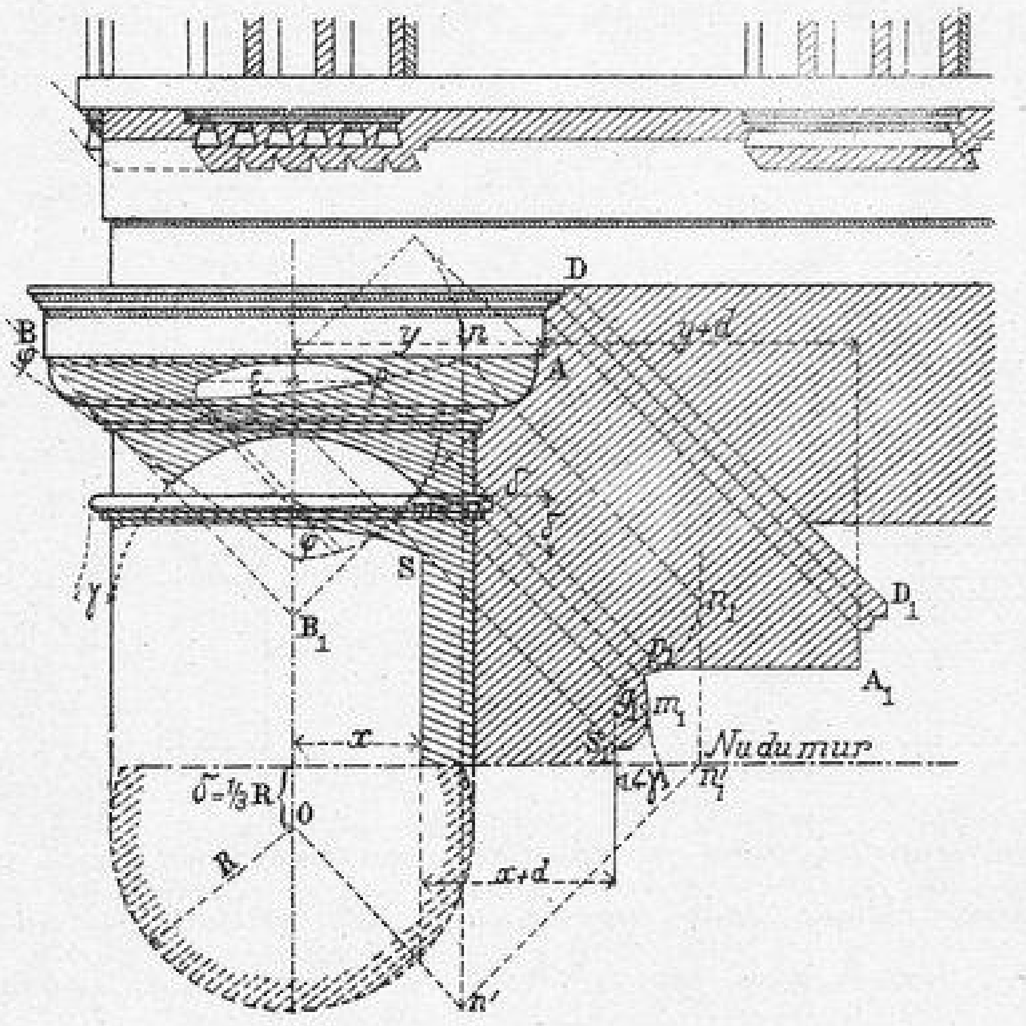
3° <u>Sur l'astragale</u>. – On cherche en $\alpha\,\theta_1$ la courbe ovale de l'astragale. (On sait que sans erreur sensible on peut lui substituer un arc de cercle de centre ω). On prend son intersection θ_1 avec la courbe ovale de l'échine et on en déduit en θ' le point de perte dans l'astragale ce qui suffit pour tracer l'ombre portée $\sigma_1\theta'$; en θ' la tangente est à 45°.

Le reste de l'épure se comprend facilement. Pour trouver les ombres portées dans les cannelures on a dû faire une section horizontale du fût. Elle est rabattue en l 31 n ; en réalité elle remplace un plan.

On remarquera la construction donnée pour avoir en $\gamma'2'$ la tangente au point de brisure 2' de l'ombre portée par la courbe de tête 1'5' sur le fond de la cannelure. On reconnaîtra que la droite $2'\gamma'$ n'est autre chose que l'ombre portée par la tangente $1'\gamma'$ à la courbe de tête au point 1', sur le plan tangent 2γ au cylindre creux qui constitue la cannelure.

§ 39 – Ombres d'une colonne dorique engagée dans un mur.

Fig. 71.



On suppose (fig. 71) que la colonne est engagée au tiers de son diamètre, ou, ce qui revient au même, que l'axe de la colonne est à une distance δ du mur égale au tiers du rayon.

1° Ombres propres du chapiteau.

(Voir l'épure précédente).

2° Ombres portées sur le mur.

(a) L'ombre propre du fût de la colonne étant à une distance de l'axe $x = R\frac{\sqrt{2}}{2}$, son ombre se trouve à une distance $x + \delta$.

(b) <u>Le tailloir</u> ayant pour demi-largeur y, son ombre A_1 se trouve à une distance à droite du point A égale à $y + \delta$.

(c) <u>L'astragale</u> donne une ombre portée assez développée $g_1\,m_1\,S_1$. – Soit γ la saillie de l'astragale par rapport au fût de la colonne ; l'ombre portée de l'astragale fait par rapport à l'ombre portée du fût une saillie égale à $\gamma\sqrt{2}$ soit sensiblement $1{,}4\,\gamma$. – Le point le plus à droite m_1 est l'ombre portée par le point m de l'ombre propre de l'astragale situé

sur l'équateur.

(d) L'échine, donnerait une ombre portée dont on a facilement le point de brisure p_1 (à 45° avec le point de perte p) et le point le plus à droite n_1. - On ne conserve, comme réelle, qu'une très petite partie $p_1 g_1$ de cette ombre portée. p_1 répond au point de perte p de l'échine et g_1 répond au point de perte g de l'astragale.

§ 40. - Ombres d'un fronton.

(a) Description. - (fig. 72). - On sait que les moulures d'un fronton s'obtiennent en prenant les moulures horizontales de la corniche et en les inclinant à la pente du fronton.

La Doucine ne règne que sur les rampants. Le retournement se fait sur le filet inférieur de la doucine : La partie horizontale de la corniche comporte toutes les moulures du couronnement, sauf la doucine.

Au point de vue géométrique nous considérerons les deux rampants comme deux cylindres ayant pour base commune la section oblique faite dans chacun d'eux par le plan vertical de coupe ZZ. La coupe ZZ dessinée à droite donne le profil de cette section : Cette section oblique présente les mêmes saillies que la section droite donnée par le plan de coupe ZZ dans la partie horizontale ; mais les hauteurs sont plus grandes. On peut la considérer comme une dilation, en hauteur, de la section droite située au-dessous.

Fig. 72.

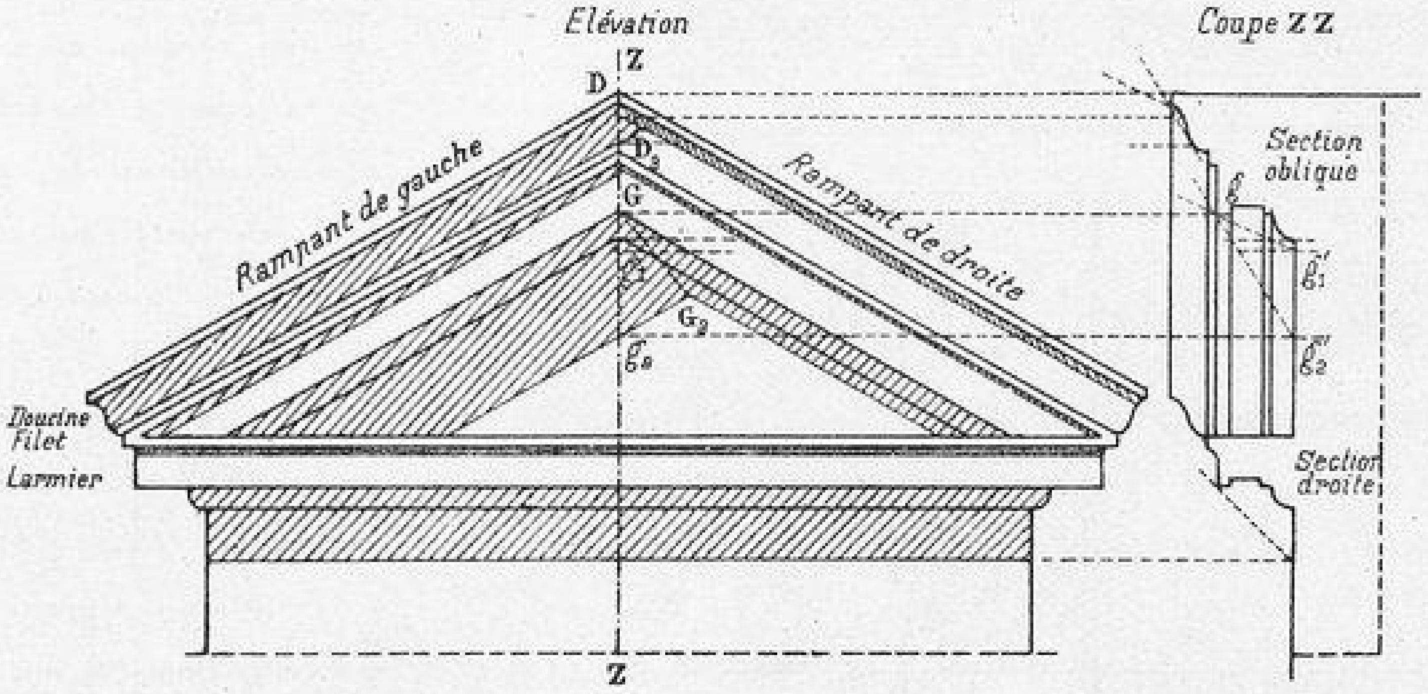
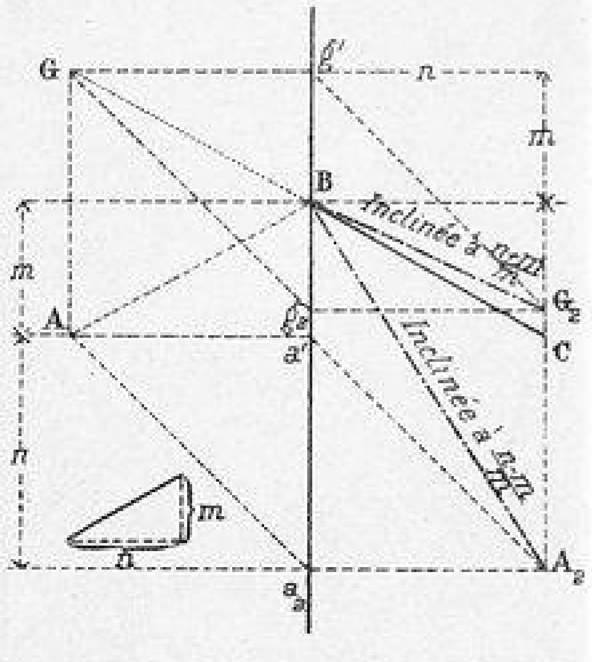


Fig. 72 bis.



(b) Ombres. - On considère donc les rampants comme formés de deux cylindres inclinés ayant pour base la section oblique faite par le plan ZZ vertical et on cherche d'abord (fig. 72 bis) les ombres que porteraient sur le plan de cette section oblique une génératrice BA du cylindre de droite et une BC prolongée en BG du cylindre de gauche.

La figure 72 bis indique cette recherche.

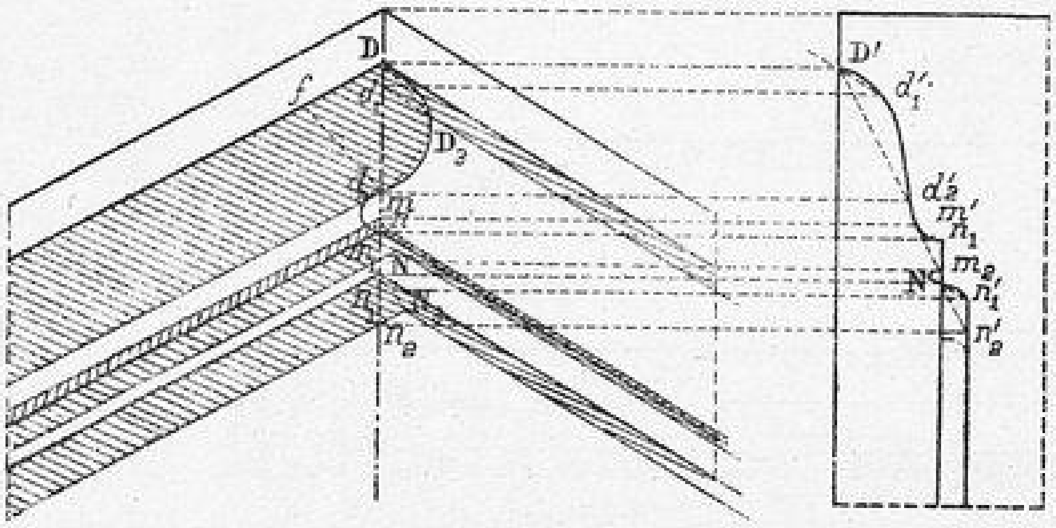
Le point Aa' de l'arête de droite porte ombre en a_2 rabattu en A_2 et BA_2 est l'ombre de cette arête de droite ; de même BG_2 est l'ombre de l'arête de gauche.

Il est facile de reconnaître que si le rampant du fronton est incliné à la pente $\frac{m}{n}$ (m de hauteur pour n de base), l'ombre du rampant de gauche, BA_2 est inclinée à n + m de

hauteur pour m de base, tandis que l'ombre BC_2 du rampant de droite est inclinée à n-m de hauteur pour m de base.

On se sert de ces directions BA_2 pour le rampant de gauche, et BC_2 pour celui de droite, comme on se sert du rayon à 45° pour les moulures horizontales.

Fig. 73.



On voit (fig. 73) à plus grande échelle le détail des ombres portées aux environs du sommet D. Les points marqués d, d'_1 et n, n'_1 servent de départ aux ombres portées sur le rampant de droite; on s'est servi pour les obtenir du rayon incliné à $\frac{n-m}{m}$. Les points marqués $d_2\, d'_2$ et $n_2\, n'_2$ s'appliquent au rampant de gauche. On s'est servi, pour eux, du rayon incliné à $\frac{n+m}{m}$.

Les points de brisure $D_3\ N_3$ sont à 45° avec les points de retournement D N ... De D_3 en d_2 nous avons une courbe qui est l'ombre portée par la portion Df de l'arête de la doucine de gauche, sur la doucine de droite; c'est donc, en réalité, une section plane de la doucine de droite. Cette différence de pente des rayons BA_2 et BC_2 fait bien comprendre pourquoi le rampant de droite est beaucoup moins ombré que celui de gauche.

§ 41. - Ombres d'une base attique (fig. 74).

1ère partie. - Recherche des ombres propres.

1° a b, ombre propre du fût; b B, ombre propre du congé; le point B est le point où le rayon à 45° est tangent au contour apparent du congé. - Cette ombre propre est <u>virtuelle</u> dans la plus grande partie de son étendue; c, ombre propre du grand listel (voir ombres des cylindres).

2° K'l'' K h g', ombre propre du petit tore (voir ombres du tore).

L'ombre propre du listel N° 1, est inutile à chercher, elle sera noyée.

3° q, ombre propre du listel N° 2 (voir ombres du cylindre).

4° α δ r S_1, ombre propre du grand tore.

2e partie. - Les ombres portées.

(A) Ombres auxiliaires portées sur un plan fuyant à 45° par les lignes qui porteront ou recevront des ombres.

1° Tous les listels et le fût ont pour ombres portées auxiliaires leurs ombres propres elles-mêmes.

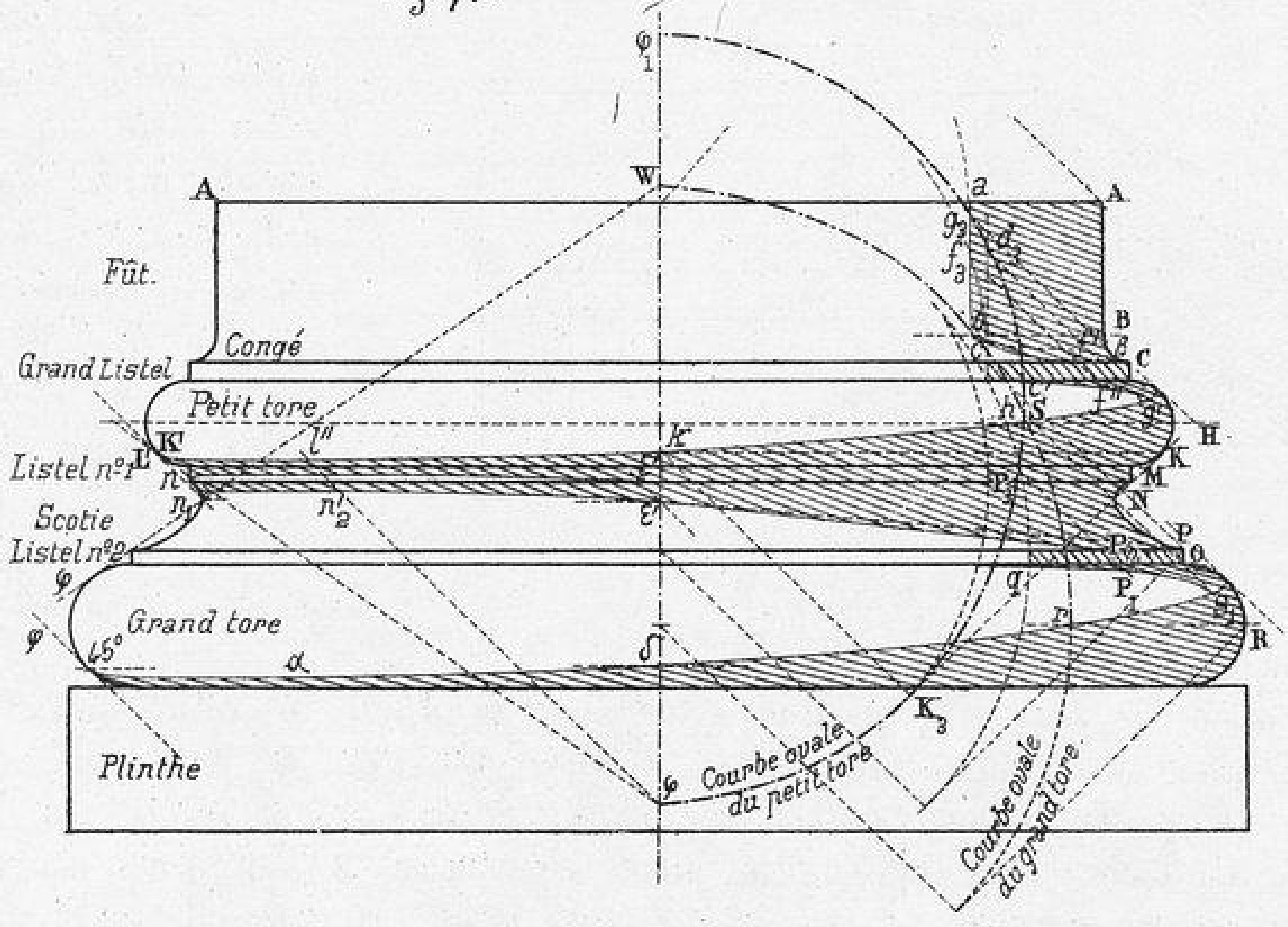
2° Les cercles de base des listels donnent comme ombres auxiliaires des cercles passant par leurs points à 45°, savoir:

(a) Le cercle du listel C, donne l'arc de cercle cf_3.

(b) Le cercle P du listel PQ donne l'arc de cercle $q\,p_3$.

3° Le petit tore donne la courbe ovale $\varphi_1 h \varphi$ obtenue comme il a été indiqué plus haut, (ombre de l'astragale) ; le grand tore donne la courbe ovale Wr, dont nous ne traçons que la partie supérieure.

Fig. 74.



(B) *Ombres portées.* Les recoupements des ombres auxiliaires permettent de déterminer les ombres portées. Ainsi : le cercle auxiliaire $c f_3$ recoupe en f_3 l'ombre propre du fût. Le rayon lumineux $f_3 f'$ donne en f' un point limite d'ombre portée du fût sur le cercle C. L'ombre ressaute ensuite de f' en f'' sur le petit tore. La courbe ovale $h\varphi$ du petit tore, recoupe en g_3 l'ombre propre du fût. Le rayon lumineux $g_3 g'$, donne en g' le point de perte de l'ombre portée du fût sur le petit tore.

De même : l'ombre auxiliaire $q\,p_3$ du cercle P, rencontre en p_3 la courbe ovale $\varphi_1 h \varphi$ du petit tore ; par conséquent le rayon $p_3 p_2$ donne alors en p_2 le point limite d'ombre portée par le petit tore sur le cercle P. L'ombre ressaute ensuite de p_2 en p_1 sur le grand tore.

Les deux courbes ovales $\varphi_1 h \varphi$ et Wr se rencontrent en S ; par suite, le rayon SS_1 donne en S_1 le point de perte de l'ombre portée par le petit tore sur l'ombre propre du grand tore, etc.

Leçon 5bis.
(facultative).

Ombre d'un chapiteau ionique grec. (fig. 75).

§ 42. – Dessin du chapiteau.

Un chapiteau ionique grec, analogue à celui de l'Erecthéion à Athènes, se compose en réalité de deux parties, savoir :

1° Un gorgerin et une échine comme dans le chapiteau dorique.

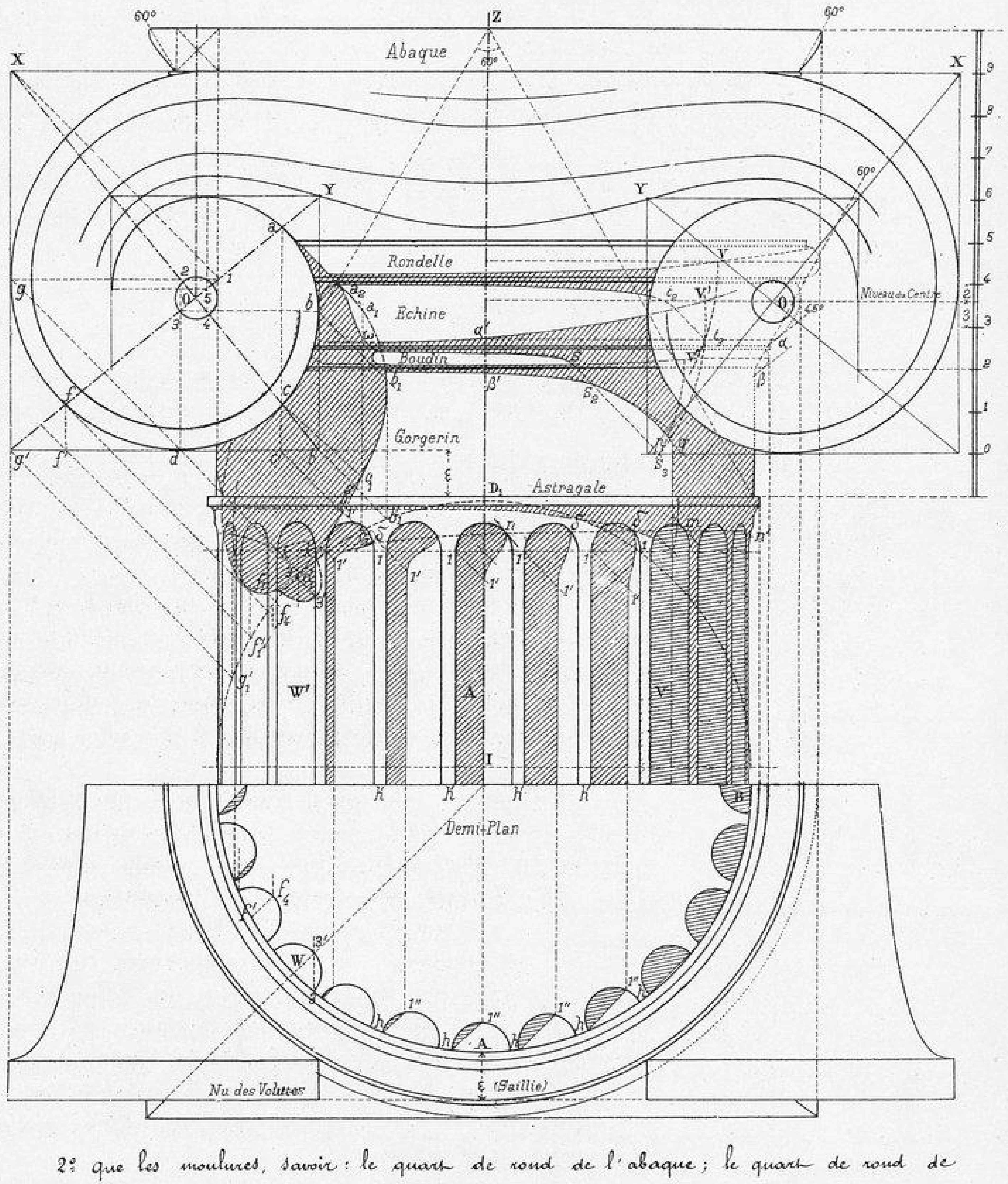
2° Un coussinet remplaçant le tailloir du chapiteau dorique, lequel coussinet, comprenant l'abaque et les volutes, s'emboite très exactement sur l'échine grâce aux deux saillies débordantes constituées par les volutes.

Une roundelle, affectant la forme d'un tore et analogue aux coussins en paille dont se servent les bardeurs pour empêcher les arêtes des pierres de taille de s'écraser, sépare les deux parties : En réalité cette rondelle fait corps avec le coussinet et est sculptée dans la même pierre que lui.

Sans entrer dans le détail du tracé exact de ce chapiteau nous admettrons:

1° que sa hauteur D, Z est donnée en traçant sur le diamètre du fût un triangle équilatéral.

Fig. 75.



2° que les moulures, savoir: le quart de rond de l'abaque; le quart de rond de

l'echine, le boudin inférieur et la rondelle supérieure s'étagent sur des lignes inclinées à 60°. (voir le profil Bα donné à droite en pointillé, voir aussi la coupe, fig. 75 bis.)

3° Que la hauteur totale du chapiteau a été divisée en 11 parties égales, et que la volute occupe, en hauteur neuf de ces parties.

4° Que le centre O, de l'œil de la volute partage la hauteur de ces neuf parties en deux segments qui sont entre eux comme les nombres 2 et 3.

5° Que les directrices OX et OY des volutes sont à angle droit l'une sur l'autre, ce qui permet, en se servant des tangentes horizontales et verticales, de tracer ces volutes soit à la main, soit au compas.

6° Que le plan des volutes fait en avant du nu de la colonne une saillie ε (voir le plan), égale à une de ces parties, soit à 1/9 de la hauteur des volutes, c'est-à-dire une saillie égale à la hauteur de l'abaque.

§ 43.- Tracé des ombres.

A.- Ombres des volutes sur le fût.

On commence par supposer que le fût existe seul, et on ne tient compte ni des cannelures ni de l'échine.- L'ombre portée sur le fût lisse est la courbe $f_1 c_1 b_1 a_1$, obtenue rapidement comme suit :

1° La tangente horizontale g'b' a donné, comme ombre, le cercle $g'_1 b'_1$ dont le centre est I (voir ombre du tailloir) trouvé à priori, puisque l'on connaît la saillie ε (voir le plan) du nu des volutes en avant du nu de la colonne ce qui donne immédiatement le point D, le plus haut de ce cercle d'ombre.

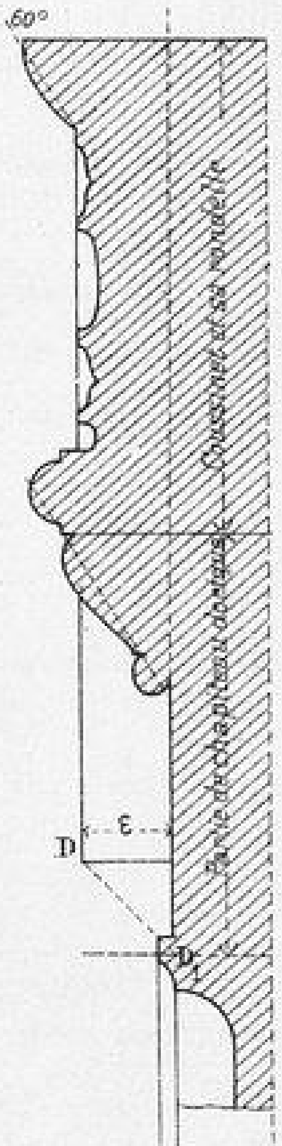


Fig. 75 bis.

2° Les points d'angle g' et b' et les points f' et c' projetés à 45° sur ce cercle permettent de trouver les ombres des points les plus importants de la volute, savoir : f en f_1 (tangente à 45° point de contour apparent) - d en d_1 (la courbe et le cercle y ont même tangente) - c en c_1 - b en b_1 (tangente verticale) et a en a_1 (tangente à 45°, autre point de contour apparent).

On gardera cette courbe partout où le fût subsiste et on la fera ressauter, tout à l'heure, quand on aura déterminé les ombres propres et portées des autres surfaces, telles que : rondelle, échine, boudin et astragale.

B.- Ombres des surfaces de révolution.

Il n'y a rien de nouveau à dire à ce sujet.

1° On déterminera les ombres propres de tous les tores et du fût.

2° On tracera les courbes ovales des différents tores (ombres portées de ces tores sur le mur fuyant à 45°). Savoir : Vt_3, courbe ovale de la rondelle, - $V't_3 q$, courbe ovale de l'échine, - $V''p' s_3$, courbe ovale du boudin ; on sait que pour les tores larges et de faible hauteur, on peut substituer sans erreur sensible à cette courbe ovale, un arc de cercle. (voir plus haut, ombre de l'astragale).

3° On en déduira, en remontant par des rayons lumineux inverses,

en t_2 et en S les points de perte (tangentes à 45°) et, du même coup, le point de brisure S_2.

4° On fera ressauter ensuite l'ombre de la volute sur l'astragale, sur le boudin, sur l'échine et sur la roudelle, en observant toujours de mettre un point limite, tel que 1 sur l'astragale, ou un point de perte, tel que ω sur l'échine, sur la même ligne à 45° que le point de brisure correspondant.

C.- Ombres des cannelures.

1° La cannelure centrale A, donne l'ombre de la niche traitée plus haut.

On se rappelle que le point de départ n répond au point où le rayon lumineux est tangent au quart de sphère qui constitue le plafond de la cannelure et que le point de raccordement 1' se trouve sur l'ombre portée par l'arête de gauche k,h', de la cannelure. Sur les autres cannelures le tracé se fera comme suit.

2° Le plan permet de trouver en 1',1',1',...... les ombres portées par les arêtes de gauche h,h,...... sur le fond des cannelures; ce qui donne, en élévation, tous les points de raccordement 1',1',1',1',......

3° Les points de départ n, δ, δ, m...... ne se trouvent pas tous très facilement, comme le point n de la cannelure centrale en menant des tangentes à 45°, aux ellipses projections verticales des cercles de couronnement. Mais on peut immédiatement trouver 4 de ces points de départ, savoir:

(a) Sur la cannelure W W', à 45° en pleine lumière, le point d'origine est en k à la naissance de l'ellipse; car, le petit cylindre qui serait circonscrit à la sphère du plafond, tout le long du cercle de couronnement, serait un cylindre horizontal à 45°, parallèle, en plan, à la projection horizontale des rayons lumineux, et son ombre propre passerait par les points de naissance k, k.....

(b) Sur l'autre cannelure de droite V, à 45° dans l'ombre, le cylindre analogue serait perpendiculaire, en plan, au rayon lumineux, et son ombre propre s'obtiendrait en menant en m, une tangente à l'angle φ, à son cercle de base rabattu, ou ce qui revient au même, une tangente à 45°, à l'ellipse 1, m, projection verticale de ce cercle de base.

(c) Sur la cannelure centrale le point n répond au point de tangence à 45° (ombre de la niche).

(d) Sur la dernière cannelure de droite B, par raison de symétrie, le point n' est au niveau du point n de la cannelure centrale.

Cela donne donc 4 points de départ v, n, m et n' obtenus immédiatement. On joint ces 4 points par une courbe continue, ce qui donne, par recoupements avec les autres ellipses, les autres points de départ δ, δ, δ.....

Le reste de l'épure s'achève facilement.

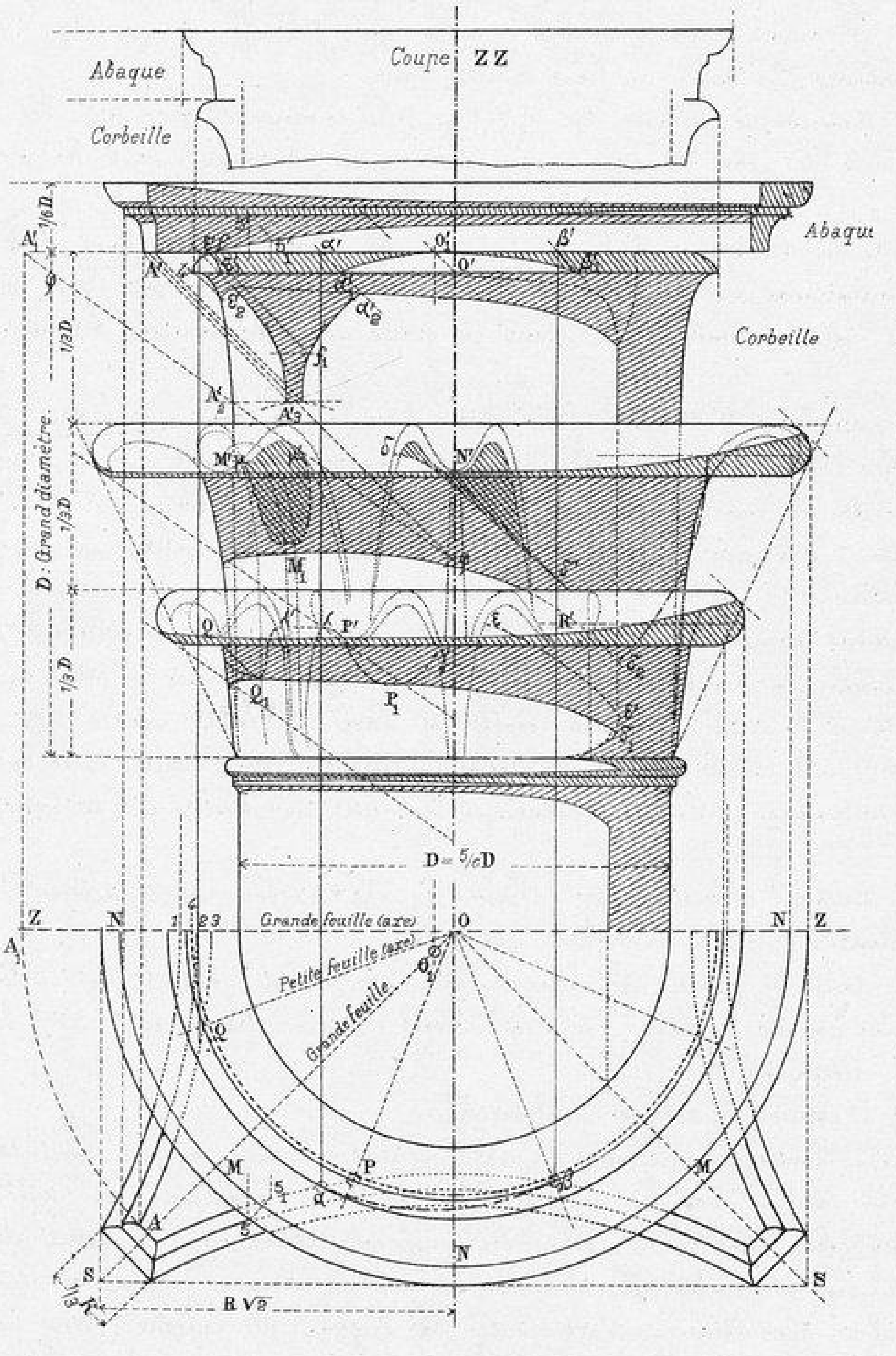
D.- Nota.- Pour ne pas compliquer l'épure on n'y a pas indiqué l'ombre portée par les spires de la volute sur les parties en creux qui séparent ces spires.- Pour tracer cette ombre, on supposera, dans une première approximation, que le fond de ces parties en creux est plan; ce qui conduira à chercher l'ombre d'une figure de front sur un plan de front. Cette ombre reproduira exactement la figure elle-même: On pourra donc décalquer la volute, et en la transportant à 45° de la longueur voulue, la reproduire

rapidement sur le fond, après quoi, au sentiment, car ici la géométrie ne peut plus servir, on fera s'éloigner ou se rapprocher les points de cette ombre préalable, suivant que le fond réel sera plus près ou plus loin que le fond plan considéré en premier lieu et provisoirement.

§ 44. – Chapiteau corinthien (fig. 76).

L'ombre du chapiteau corinthien ne peut pas être trouvée d'une manière réellement simple, à cause des feuilles qui ornent la corbeille; mais il est possible en ne considérant que l'épannelage des feuilles de déterminer les grandes masses des ombres; le détail se trace ensuite au sentiment.

Fig. 76.



1° Ombre de l'abaque sur lui-même. – On pourrait, à la rigueur, traiter l'ombre de l'abaque comme celle d'un listel en creux; mais il est préférable de se servir du plan. On obtiendra des points de l'ombre portée comme il est indiqué pour le point 55' portant ombre en $5_1 5'_1$.

2° Ombre de l'abaque sur la corbeille. – Le point A A', qui est dans le méridien de symétrie à 45°, donne une ombre portée A'_3, obtenue par la méthode des plans sécants et par l'emploi de l'angle φ rabattu (voir $A'_1 A'_2$ ramené en $A' A'_3$).

Pour avoir les points limites α'_1 et β'_1 sur le cercle 4 qui forme rebord de la corbeille, on emploie la méthode des projections obliques appliquée en prenant comme plans d'ombres portées le plan horizontal de la courbe α' β'. A cet effet: Le cercle 4 qui constitue le rebord de la corbeille est relevé par un rayon lumineux

inverse à 45° sur le plan de la courbe α'β' de l'abaque; l'opération se fait sur le plan: On relève à 45° O en O_1, on décrit de O_1 comme centre un cercle égal au cercle H qui recoupe en α et β l'arc de cercle inférieur de l'abaque; on rappelle α et β en α' et β' sur l'élévation et on en déduit, par les rayons à 45°, les points cherchés α'_1 et β'_1.

3° Ombre de l'épannelage des feuilles. — Cette ombre est tout à fait analogue à l'ombre de l'astragale, traitée dans les leçons précédentes; on en obtient rapidement les points les plus hauts Q_1 ou M_1 et les points de perte S_1 et S_2.

Une fois ces masses d'ombres déterminées, on peut, en dessinant les feuilles dans leur épannelage être fixé sur des points tels que Q_1, M_1 ou P_1 appartenant réellement à l'ombre portée des feuilles; le reste s'achève au sentiment; mais pour réussir dans ce dessin de sentiment, il est indispensable d'avoir copié et ombré d'après nature un certain nombre de chapiteaux de ce genre, en les éclairant par une lumière dont la direction se rapprochera autant que possible de celle des rayons usuels à 45°.

Fin des ombres usuelles.

II. _ Projections cotées.

6ème Leçon.

§ 45. Généralités. _ Échelles.

Dans ce système, on ne donne que la projection horizontale des objets, et l'on supprime la projection verticale. Mais on écrit à côté des points principaux de l'épure, la cote de ces points, c'est-à-dire leur hauteur au-dessus d'un plan horizontal de comparaison convenu à l'avance.

Ce plan est ordinairement le plan du niveau des mers.

Les cotes des points au-dessus de ce plan de comparaison sont dites *positives*, et se nomment : *altitudes* ; les cotes des points au-dessous sont *négatives* et se nomment : *profondeurs*.

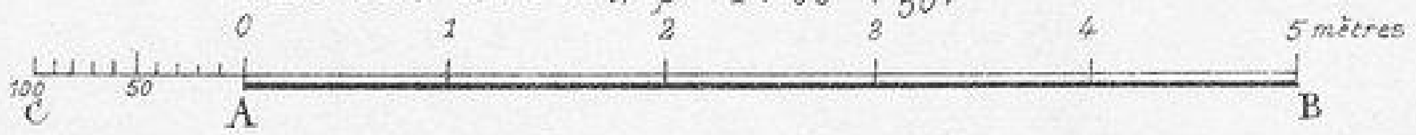
On ne trouve de cotes négatives, ou cotes de profondeurs que dans les cartes marines indiquant les profondeurs du fond des mers.

Les cotes sont écrites en mètres, et fractions décimales du mètre : 1,25 _ 14,55 ......
Pour être utilisable, un plan coté doit être fait à une échelle donnée, et cette échelle doit, tout d'abord, être tracée soigneusement sur l'épure.

On la fera comme ci-dessous, en y plaçant une échelle AB, et une contre-échelle AC.

Échelle de $0^{m}02$ p^{r} $1^{m}00$ ($\frac{1}{50}$)

Fig. 77.



Dans les épures de projections cotées, on a de très nombreuses multiplications à effectuer. _ En général, les facteurs de ces opérations sont de petits nombres dépassant rarement 3 chiffres. _ On se servira utilement pour cela de tables de multiplication toutes faites, ou bien encore de la règle à calcul.

Ligne droite.

§ 46. _ Équidistance, graduation, intervalle, pente.

On donne la projection horizontale et les cotes des points principaux.

Si le plan est à une faible échelle, on gradue la droite de 10^{m} en 10^{m}, ou de 5^{m} en 5^{m}. _ Si l'échelle est plus grande, on la gradue de mètre en mètre, ou bien de 50 centimètres en 50 centimètres. Les points auxquels répondent des cotes données en nombres entiers se nomment des points de <u>cote ronde</u>.

D'ailleurs il est de convention, dans les dessins servant aux travaux publics ou aux travaux militaires de déterminer la graduation d'après l'échelle.

On nomme *équidistance* la hauteur constante qui séparera sur une même carte les plans de niveau des différents points pour lesquels on écrit les cotes rondes.

On convient ordinairement de prendre l'équidistance égale au $\frac{1}{2000}$ du dénominateur

de l'échelle.

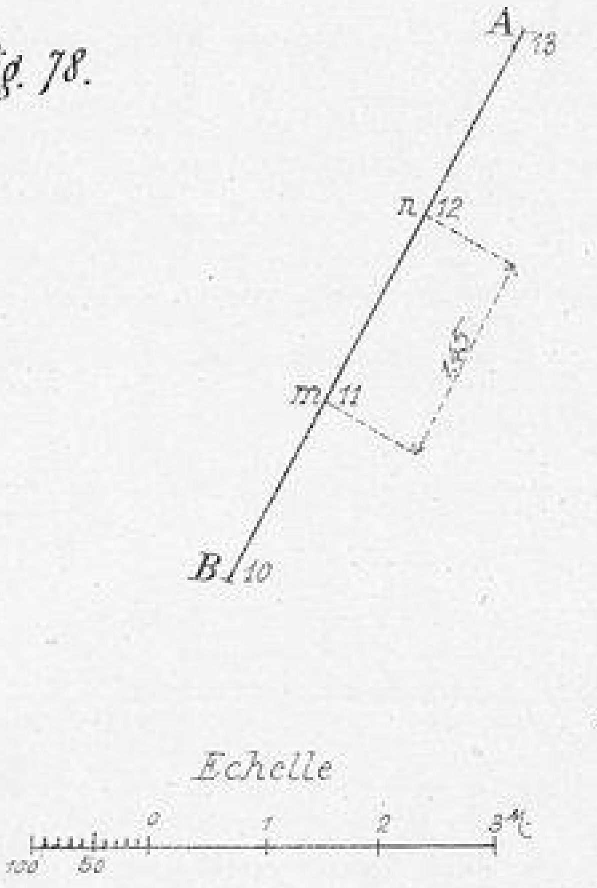
D'après cela, pour les échelles de $\frac{1}{5000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{20000}$, les équidistances seront $2^{m}50$, $5^{m}00$, $10^{m}00$, etc......

Ces règles ne sont pas absolues.

Nota. – Nous supposerons dans cette leçon théorique l'équidistance égale à 1^{m}, c'est-à-dire la droite graduée de mètre en mètre ; les résultats obtenus seront faciles à généraliser pour les cas où l'équidistance serait différente.

On nomme *intervalle* la distance qui sépare horizontalement 2 points de cote ronde qui se suivent, et *pente*, la tangente de l'angle formé par la droite avec le plan horizontal.

Fig. 78.



Pour la droite AB, l'intervalle mesuré à l'échelle est, je suppose, de $1^{m}45$.

Soit p la pente,

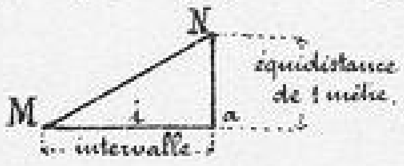
i l'intervalle ;

Considérons le triangle rectangle que nous nommerons le triangle unitaire, qui aurait pour hypothénuse la droite MN de l'espace, pour base horizontale l'intervalle mn, et pour hauteur la différence de niveau des points M et N, c'est-à-dire 1^{m} ; ce triangle donne :

$$\operatorname{tg} \alpha = p = \frac{1}{i},$$

d'où

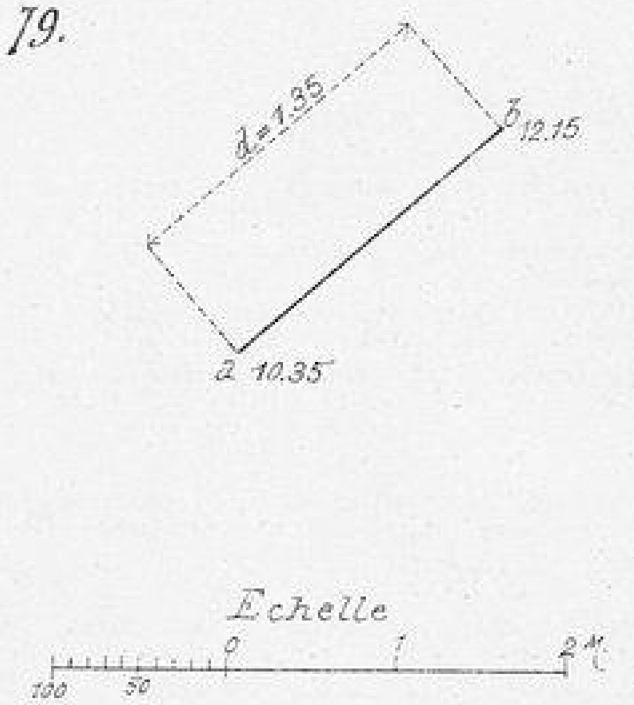
$$i = \frac{1}{p}$$



donc : **Théorème : La pente et l'intervalle sont inverses l'un de l'autre.**

§ 47. – Problème 1. – Connaissant la distance projetée (d) de 2 points cotés A et B, et les cotes c et c' de ces 2 points ; calculer l'intervalle i et la pente p de la droite qui les joindrait.

Fig. 79.



Soit d (distance de a et de b) = 1,35, mesurée à l'échelle.

Soit c (cote du point b) = 12,15
c' (cote du point a) = 10,35 } Ces cotes sont écrites sur le plan.

Le triangle rectangle qui aurait pour hypothénuse AB de l'espace est semblable à celui qui aurait pour hypothénuse deux points équidistants de 1^{m} en hauteur, et que nous avons nommé le triangle unitaire.

Nous aurons donc le rapport

$$\frac{i \text{ (intervalle)}}{1 \text{ (équidistance)}} = \frac{d}{c-c'}, \quad \text{d'où } i = \frac{d}{c-c'}, \quad \text{(formule importante)}$$

$$i = \frac{d}{c-c'} = \frac{1,35}{12,15 - 10,35} = \frac{1,35}{1,80} = 0,75$$

$$p = \frac{1}{i} = \frac{1,80}{1.35} = \frac{1}{0,75} = \frac{4}{3} = 1.33$$

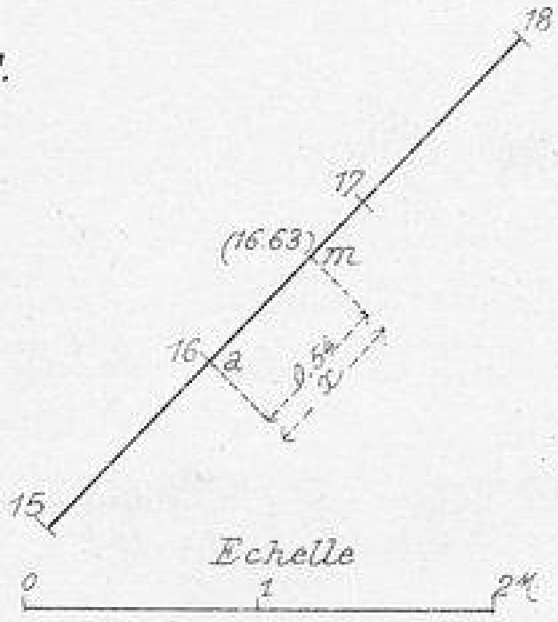
§ 48. – Problème 2. – Une droite étant graduée, donner la cote d'un point pris sur cette droite. – Sur l'échelle, on mesurera l'intervalle de la droite (fig. 80).

Soit $i = 0,85$

On en déduit $p = \frac{1}{0,85} = 1,17$

On mesurera à l'échelle la distance x, du point donné m au point a de cote immédiatement précédente. – Supposons que a soit à la cote 16.

Fig. 80.



Soit $x = 0,54$ (mesuré à l'échelle)

Pour calculer l'altitude y du point M au-dessus du point A, on aura

$$\frac{y}{x} = \frac{1 \text{ (Equidistance)}}{i \text{ (Intervalle)}}, \text{ d'où}$$

$$y = \frac{x}{i} = \frac{0,54}{0,85} = 0,63 ;$$

On aurait eu encore:

$$y = p x = 0,54 \times 1,17 = 0,63.$$

Le point M est à la cote 16,63.

§ 49. – Problème 3. – Placer sur une droite graduée un point de cote donnée (même figure).

Soit la droite donnée 15, 16, 17, 18 .... ; on veut y placer le point M, dont la cote est 16,63.

M se placera entre 16 et 17, à une distance x du point 16, que l'on va calculer.

On aura, en considérant toujours dans l'espace le triangle rectangle qui aurait 16 – M pour hypothénuse, et le comparant au triangle unitaire:

$$\frac{x}{0,63} = \frac{i}{1}, \text{ d'où}$$

$$x = i \times 0,63 = 0,85 \times 0,63$$

$$x = 0,54$$ (que l'on mesure sur l'échelle et que l'on porte sur l'épure.

§ 50. – Problème 4. – Graduer la droite passant par deux points cotés a (10,45) et b (13,25).

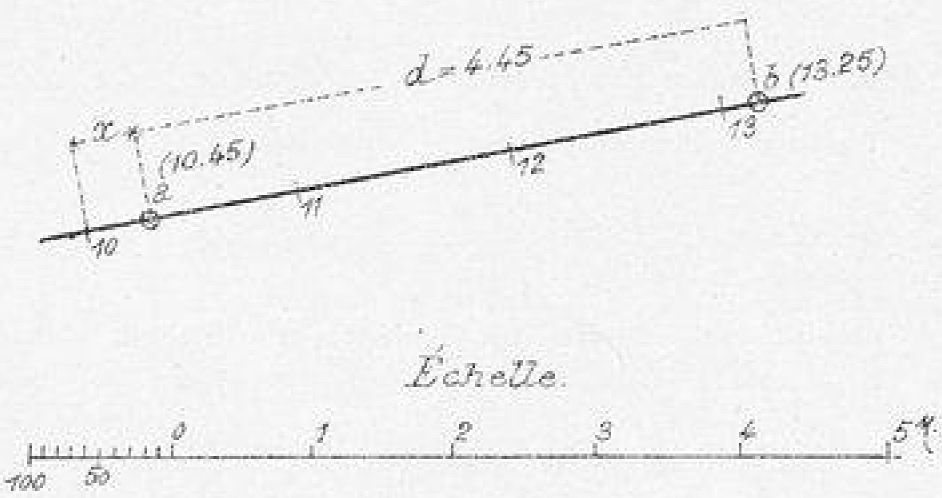
On calculera d'abord l'intervalle comme au problème 1.

On mesurera à l'échelle la distance projetée des 2 points. – Soit d = 4.45 cette distance, et l'on aura: $i = \frac{d}{c-c'} = \frac{4,45}{13,25 - 10,45} = \frac{4,45}{2,80} = 1,58$

Cela fait, on calculera la distance x d'un point de cote ronde, 10 par exemple.

Il est à 0.45 au-dessous du point a.

Fig. 81.



On aura donc

$$\frac{x}{0,45} = \frac{i}{1}$$

$$x = i \times 0,45$$

$$= 1,58 \times 0,45$$

Le point 10 étant placé, en portant à la suite autant de fois que l'on voudra l'intervalle calculé $i = 1,58$, on aura les points de cote ronde 11, 12, 13 ....

Représentation du Plan.

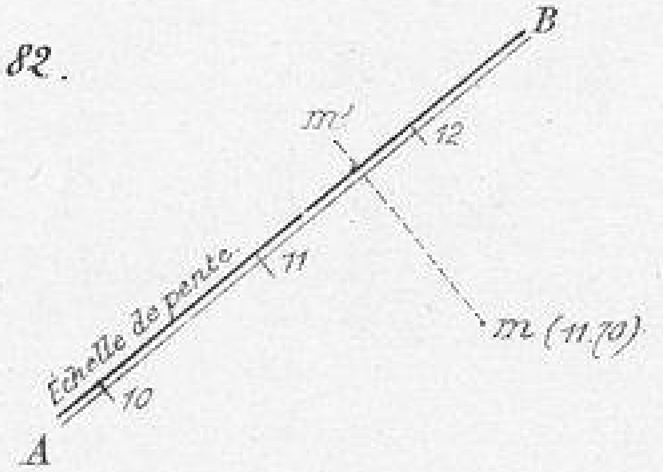
On définit un plan par sa ligne de plus grande pente. – On sait que cette droite est perpendiculaire aux horizontales du plan, dans l'espace et en projection.

Cette droite, que l'on représente par un double trait, se nomme l'Échelle de pente du plan. – Elle sera graduée comme une droite ordinaire.

Les horizontales du plan seront figurées par des droites perpendiculaires à l'échelle de pente.

§ 51. – Problème 5. – Trouver la cote d'un point donné du plan.

Fig. 82.



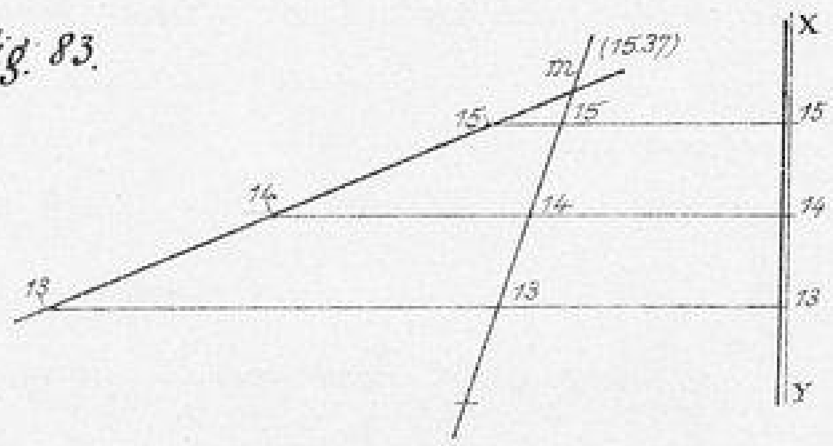
Soit A.B l'échelle de pente du plan, graduée 10, 11, 12 ..... ; m, un point quelconque du plan.

On mène l'horizontale m m'. – On prend sa rencontre m' avec l'échelle de pente, et l'on calcule, comme on l'a fait pour une droite, (Problème 2), la cote du point m'. – Ce sera aussi celle du point m.

§ 52. – Problème 6. – Reconnaître si deux droites se coupent, et dans ce cas, graduer leur plan.

1ère Méthode. – On prolongera les deux droites, en projection, jusqu'à leur point de rencontre m. – On calculera la cote du point m, considéré comme appartenant à chacune des droites. – Et si l'on trouve, pour chaque opération, la même cote, on en conclura que les droites se coupent.

Fig. 83.



2ème Méthode. (fig. 83). – On joindra les points de même cote, 15 – 15 ..... 14 – 14 ..... – Si les lignes ainsi tracées sont parallèles, c'est

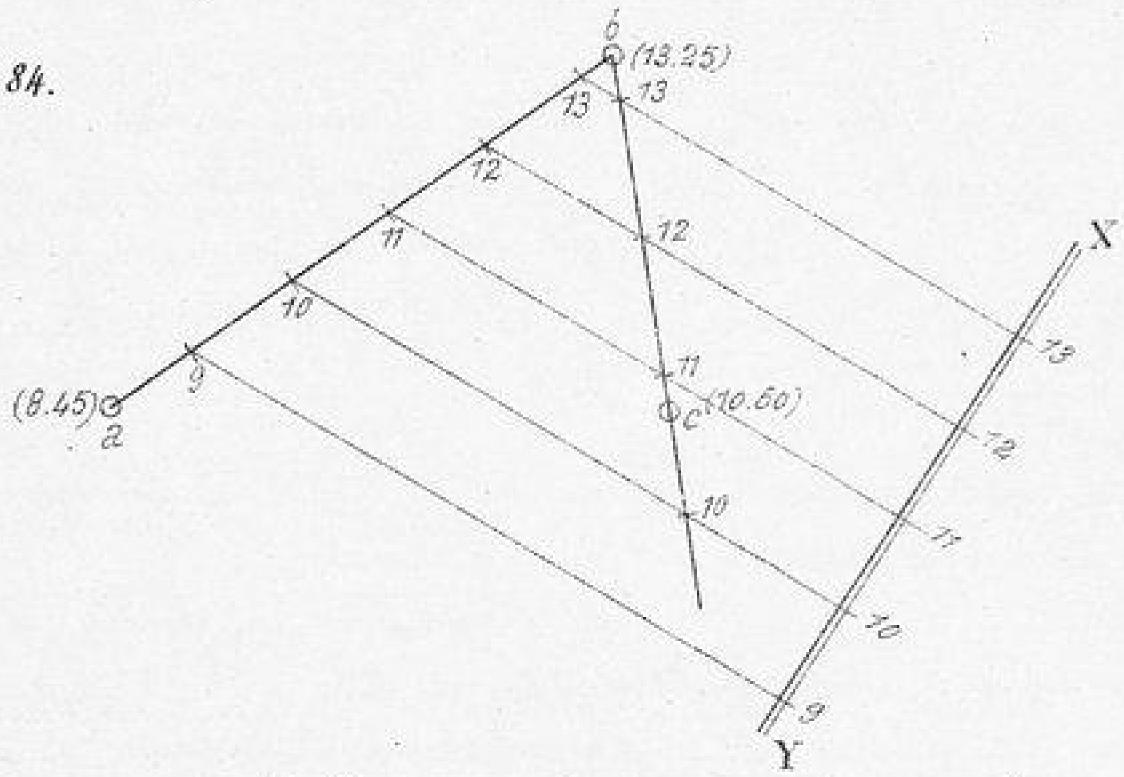
que le lieu géométrique de ces droites dans l'espace est un plan, et par conséquent les 2 lignes se coupent.

Ces parallèles sont des horizontales du plan des 2 droites. - En leur menant une perpendiculaire XY, on aura l'échelle de pente, graduée aux points de rencontre avec les horizontales.

§ 53. - Problème 7. - Construire et graduer le plan passant par 3 points a (8,45) b (13,25) c (10,80) (fig. 84).

On graduera la droite a b, et la droite c d. - (Voir le problème 4). - On joindra les points de même cote; - cela donnera les horizontales du plan; - En leur menant une perpendiculaire XY, on aura l'échelle de pente graduée.

Fig. 84.

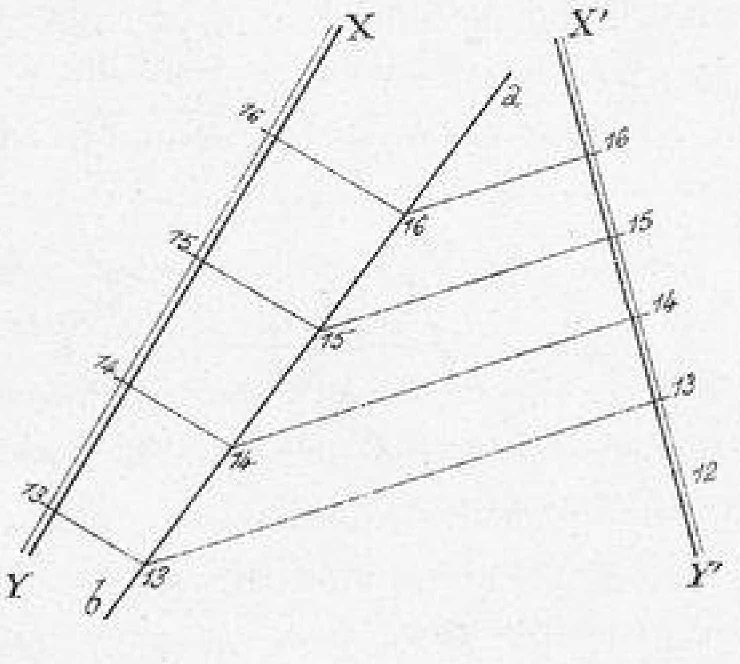


§ 54. - Problème 8. - Intersection de 2 plans.

Soient XY et X'Y' les échelles de pente des 2 plans.

Menons les horizontales de même cote. - Les points d'intersection de ces horizontales doivent être tous sur une même droite a b, qui est l'intersection. La construction la donne toute graduée.

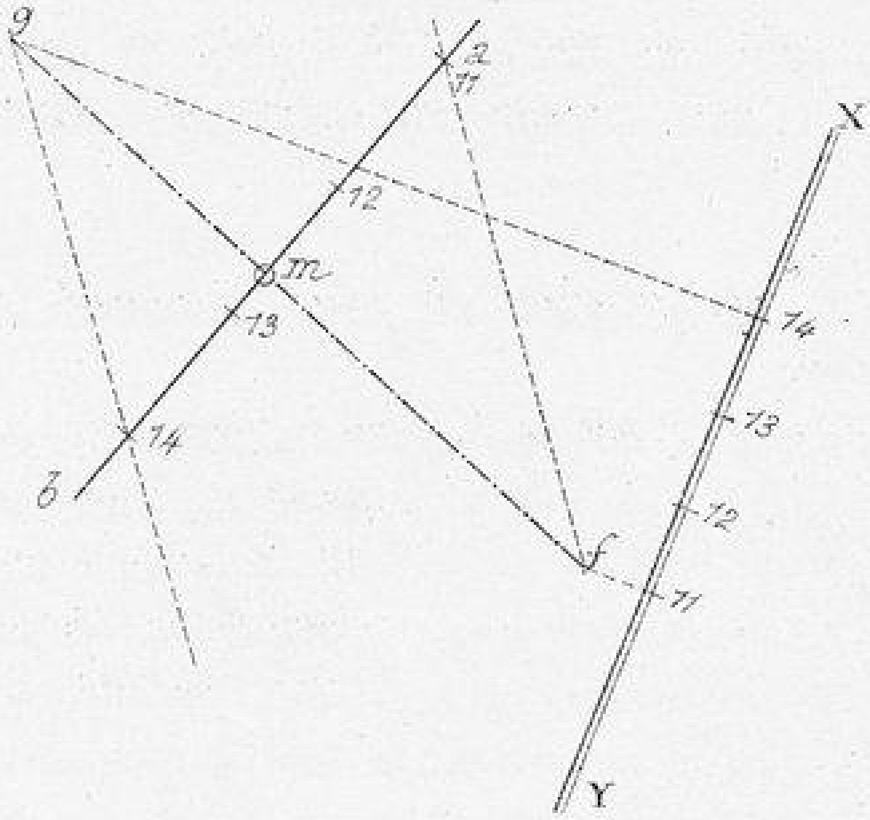
Fig. 85.



§ 55. - Problème 9.

§ 55. Problème 9. – Intersection d'une droite et d'un plan. (fig. 86).

Fig. 86.



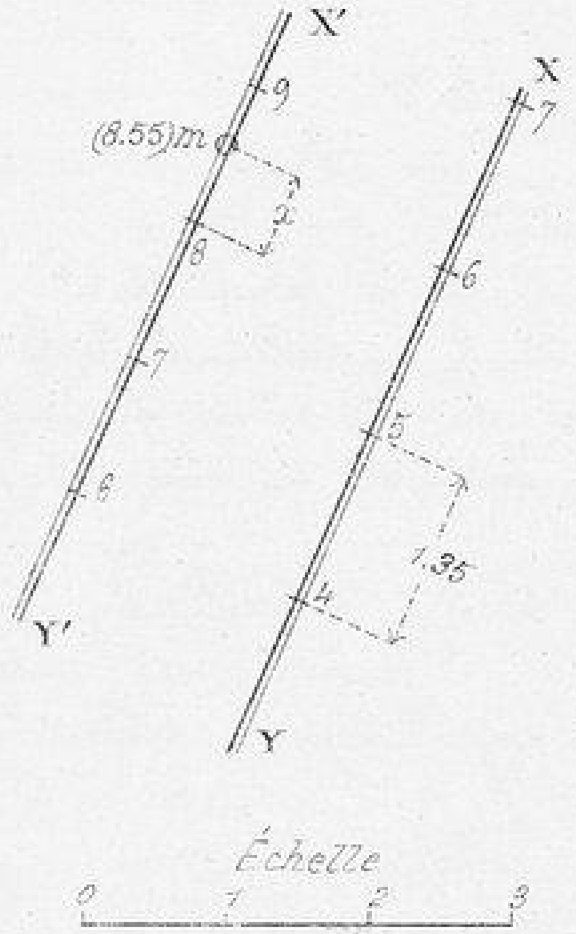
Par la droite a b on menera un plan auxiliaire quelconque. – Il suffira pour cela de mener par 2 points de cote exacte de a b, (les points 11 et 14 par exemple) deux parallèles quelconques que l'on considérera comme 2 horizontales de ce plan auxiliaire. Il serait mauvais de prendre, comme en géométrie descriptive, pour plan auxiliaire le plan projetant la droite.

On prendra l'intersection f g du plan auxiliaire et du plan donné XY.

La droite auxiliaire f g rencontrera la droite donnée au point d'intersection cherché m. On en calculera la cote.

§ 56. Problème 10. – Par un point donné m (8,55), mener un plan parallèle à un plan donné XY. (fig. 87).

Fig. 87.



Par le point m, on menera une parallèle à la ligne de pente XY.

On calculera la distance x du point m, au point de cote 8 de cette nouvelle échelle de pente.

Soit $i = 1.35$

On aura $x = 0.55 \times 1.35 = 0.74$.

Ayant le point 8, en reportant sur X'Y', à partir de ce point, l'intervalle $i = 1.35$ pris sur XY, on graduera la nouvelle échelle de pente X'Y'.

§ 57. Problème 11. – Mener par un point coté m (17) une droite perpendiculaire sur un plan XY, et trouver son intersection avec ce plan.

Remarquons (fig. 88): 1° que lorsqu'une droite est perpendiculaire sur un plan elle est, en projection, parallèle à son échelle de pente puisqu'elle doit être perpendiculaire aux horizontales.

2° Que l'angle qu'elle fait avec le plan horizontal étant le complément de celui que fait le plan, sa pente est l'inverse de la pente du plan, et par conséquent aussi son intervalle est

l'inverse de l'intervalle du plan.

Fig. 88.

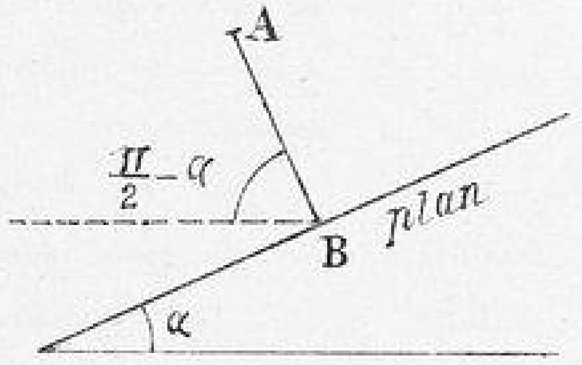
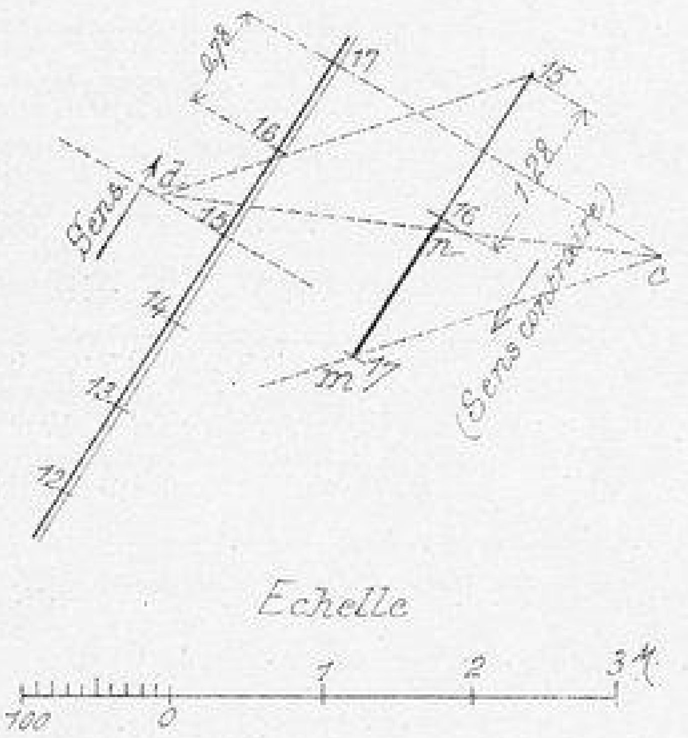


Fig. 89.



3° Que sa graduation doit se faire en sens contraire de celle du plan.

Cela posé soit $i = 0,78$, mesuré à l'échelle, l'intervalle du plan.

L'intervalle de la droite cherchée sera

$$i' = \frac{1}{i} = \frac{1}{0,78} = 1,28$$

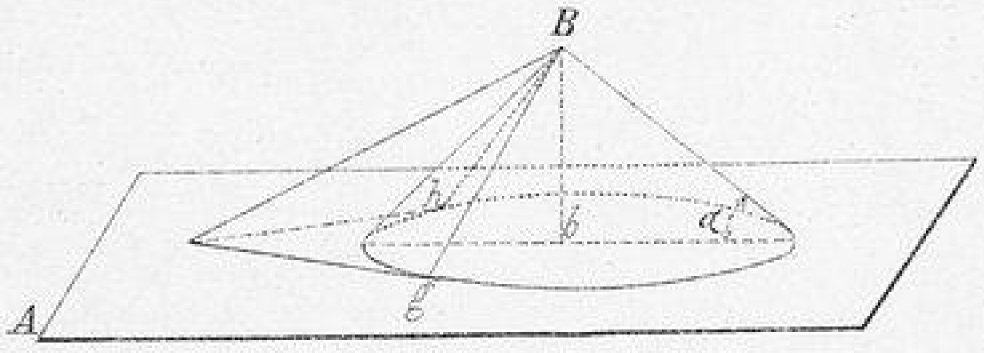
La projection de la droite sera m n, parallèle à XY, et elle est graduée facilement puisque la cote de m est 17 et que l'intervalle $i' = 1,28$. On remarquera qu'elle doit être graduée en sens inverse du plan XY.

Pour avoir le point n, où la normale perce le plan on résout le problème 9, intersection d'une droite et d'un plan.

§ 58. – Problème 12. – Par une droite donnée ab, mener un plan ayant une pente donnée ($p = \frac{2}{3}$).

(a) Solution dans l'espace. – Considérons le cône de révolution à axe vertical, ayant pour sommet le point B, et dont les génératrices font avec le plan horizontal un angle α, dont la tangente est égale à la pente demandée $p = \frac{2}{3}$.

Fig. 90.



Prenons sa base sur le plan horizontal qui passerait par A.

Les deux tangentes Ag, Ah, menées du point A à ce cercle de base, définissent avec les génératrices de contact Bg et Bh, un plan tangent au cône, qui répond à la question.

Ag est une horizontale de ce plan et Bg en est une ligne de pente.

(b) Épure. – Pour faire l'épure, nous prendrons sur ab deux points de cote ronde. – Les points 10 et 14 par exemple. – Le cône aura son sommet au point 10 et sa base sur le plan horizontal 14.

Calculons son rayon de base R. – La différence de niveau est de 4^{m} entre le sommet et la base.

On aura donc :

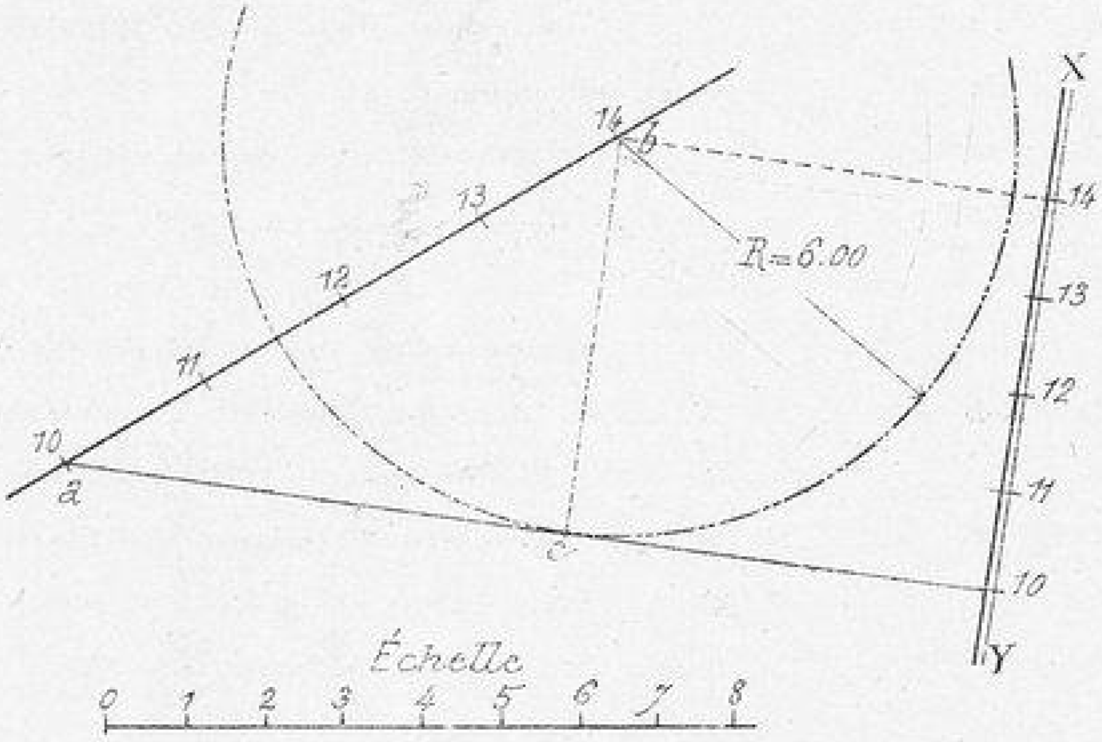
$$4 = R \times p \text{ , d'où}$$

$$R = \frac{4}{p} = 4 \times \frac{3}{2} \text{ , puisque } p = \frac{2}{3} \text{ ; d'où}$$

$$R = 6 \text{ mètres.}$$

On mesurera 6 m. sur l'échelle. – On tracera, du point 14 comme centre, le cercle de rayon $R = 6^m$, et on lui mènera une tangente a c, du point 10.

Fig. 91.



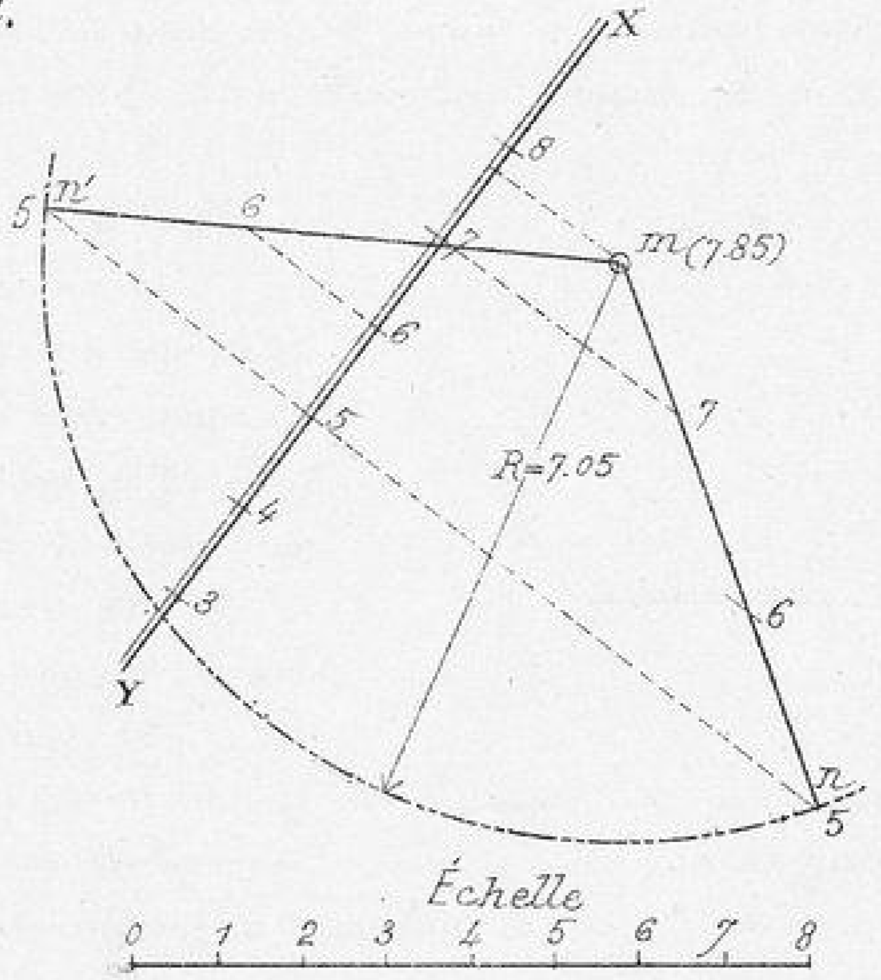
a c est l'horizontale de cote 10, du plan demandé.

La ligne de pente XY sera une perpendiculaire à la droite a c. On la graduera facilement.

Remarque: Il y aurait deux solutions. – Il pourrait aussi ne pas en avoir si le cercle de rayon R passait au delà de a. – Ce problème est très souvent résolu dans les travaux de terrassements, surtout dans la fortification.

§ 59. – Problème 13. – *Par un point m d'un plan, mener dans ce plan une droite ayant une pente donnée $p = \frac{2}{5}$.*

Fig. 92.



Soit 7,85, la cote du point m, du plan XY.

Considérons un cône de pente $\frac{2}{5}$ ayant son sommet au point m, et sa base sur le plan horizontal de cote 5, par exemple.

Le rayon de sa base sera

$$R = \frac{7.85 - 5}{p} = \frac{2,85}{2/5} = \frac{2,85 \times 5}{2} = 7.05$$

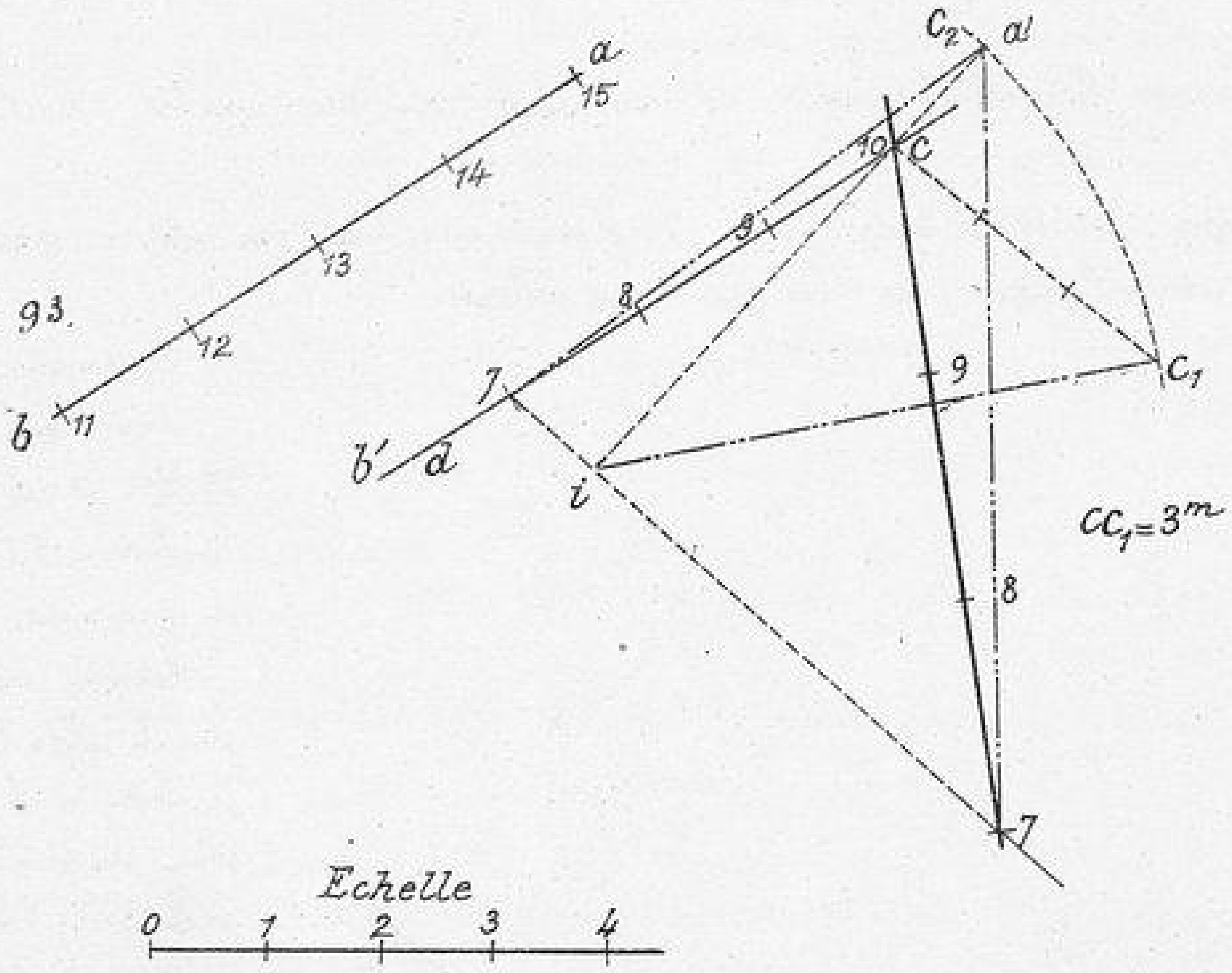
Du point m, comme centre, on tracera le cercle de rayon R. – Il recoupera l'horizontale du plan dont la cote est 5, en deux points n et n'. – Ce qui donnera comme solutions les deux droites m n et m n'. – faciles à graduer.

Le problème aurait pu ne pas avoir de solution.

§ 60. – Problème 14.

§ 60. – Problème 14. – Angle de deux droites.

Fig. 93.

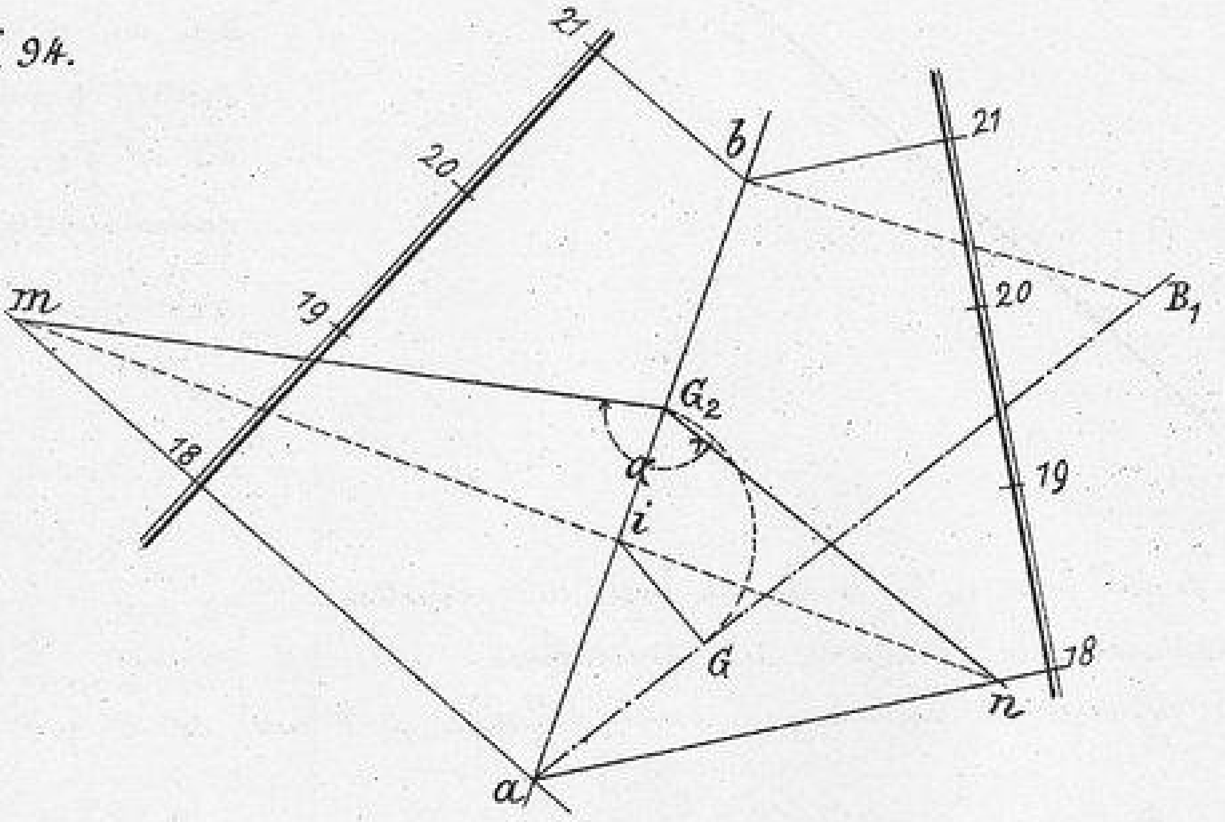


Soient ab-cd ces deux droites. Par un point de cote exacte de cd, on mène une parallèle à ab. – Soit a'b' cette parallèle.

cd et a'b' définissent un plan que l'on rabat sur le plan de cote 7, par exemple autour de l'horizontale 7.7 comme charnière. L'épure s'explique d'elle-même. Elle est identique à l'épure analogue de la géométrie descriptive.

§ 61. – Problème 15. – Angle de deux plans. (fig. 94).

Fig. 94.



On cherchera en ab l'intersection des deux plans.

On rabattra le plan projetant de ab, sur le plan horizontal 18, par exemple.

Soit aB_1 cette intersection rabattue. – On lui mènera une perpendiculaire quelconque Gi – par le point i une perpendiculaire à ab, jusqu'aux points m et n où elle rencontre les horizontales 18 des deux plans.

iG est le rayon de rotation du point G de l'espace, sommet du rectiligne de l'angle des deux plans.

On rabat iG en iG_2, ce qui donne en mG_2n l'angle cherché α

§ 62.–

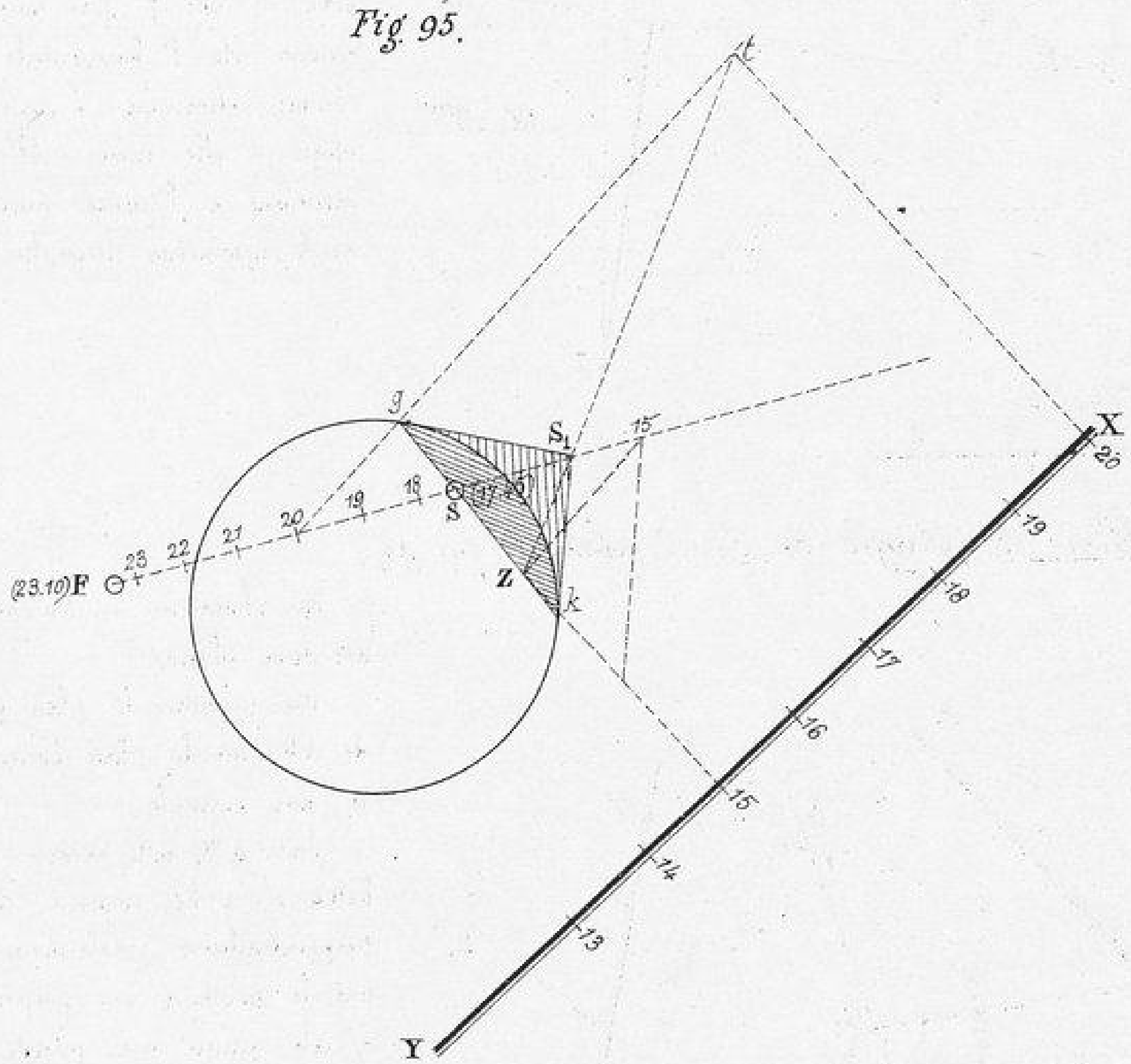
§ 62. – Cônes.

Un cône sera défini par la projection de sa base et l'échelle de pente du plan de cette base. – On y joindra la projection et la cote du sommet.

Problème 16. – Trouver l'ombre propre d'un cône et son ombre portée sur le plan de sa base.

Sa base est, je suppose, un cercle en projection. Le plan de cette base est défini par sa ligne de pente XY. Par conséquent, dans l'espace, la base est une ellipse.

Fig. 95.



Le sommet est en S (17,45).

Soit F un flambeau (cote 23.10) : Menons le rayon lumineux SF, du sommet et graduons-le.

Prenons son intersection avec le plan XY, ce qui se fait à l'aide d'un plan auxiliaire dont nous prenons 2 horizontales arbitraires 20-t et 15-z. – L'intersection auxiliaire est tz. – Nous avons en S_1 l'ombre du sommet sur le plan XY. – En S_1G et S_1K les deux droites d'ombre portée, et en Sg, SK les deux génératrices d'ombre propre.

§ 63. – Cylindres.

On donnera le plan de sa base et la courbe de base en projection.

Une droite graduée indiquera la direction des génératrices.

Les problèmes sur les cylindres se résoudront sans difficulté à l'aide de ce qui précède.(1)

§ 64. – Annexe. – Explications relatives à une épure sur les projections cotées.

Cette épure se rapporte à la construction d'un ouvrage en terre constituant un saillant de fortification.

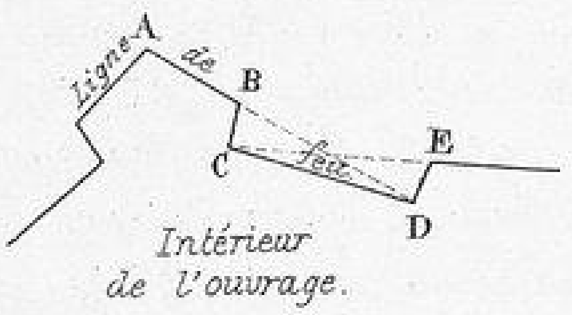
---

(1) Des notions sur les surfaces topographiques seront données dans la dernière partie du cours.

À l'aide de cet ouvrage on se propose de couvrir des combattants par une masse de terre assez épaisse pour détruire la force vive des projectiles. Le profil ci-contre (*fig. 97*) fait connaître la forme du déblai et du remblai que l'on exécute pour cela.

Pour l'épure on ne considèrera que la partie en remblai. Le fossé sera laissé de côté.

Fig. 96.

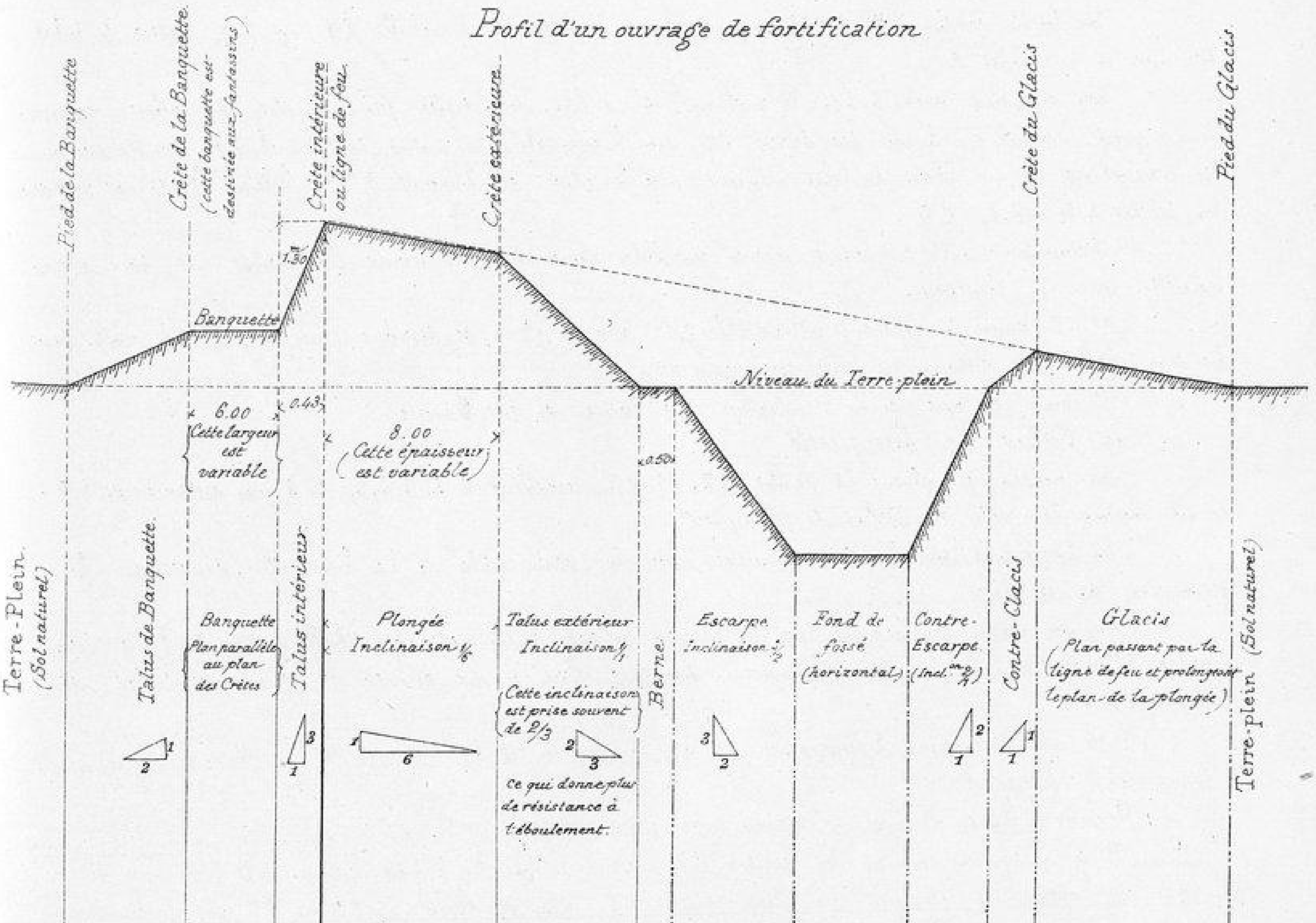


La nécessité de *flanquer* les ouvrages, c'est-à-dire d'en faire défendre les parties les unes par les autres, conduit à donner en plan à la crête intérieure ou ligne de feu, (*fig. 97*) un tracé en ligne brisée tel que **A B C D E**. (*fig. 96*).

On nomme *saillant* un angle, tel que **A**, ayant son sommet tourné vers l'extérieur de l'ouvrage.

On se propose, dans l'épure, d'étudier les intersections de plans auxquelles donnent lieu les retournements du profil ci-dessous, à l'occasion d'un saillant.

Fig. 97.



On fera les constructions dans l'ordre suivant :

(a) Ligne de feu. – Plan des crêtes. – Plan de Banquette.

On commence l'épure par le tracé de la ligne de feu AB – BC – CD (fig. 98).

On a abattu l'angle du saillant par la ligne BC.

Ces 3 droites sont dans un même plan que nous nommerons le Plan des crêtes, et qui, pour des raisons de défilement, est supposé n'être pas horizontal.

La ligne CD, seule est horizontale. On tracera donc, à priori, un peu en dehors de l'épure l'échelle de pente XY de ce plan, elle sera perpendiculaire à CD ; on la graduera facilement puisque la pente est donnée par le programme, ainsi que la cote de l'horizontale CD (20).

On tracera immédiatement après, l'échelle de pente du Plan de Banquette X'Y'.

Ce plan est à 1m,30 au-dessous du précédent, hauteur comptée suivant la verticale.

Pour graduer X'Y', on prendra donc sur XY un point m coté 19m,30, par exemple, l'on en fera le point coté 18m,00 du plan X'Y'. – De ce point de l'échelle X'Y', on déduira tous les autres, puisque les deux plans étant parallèles, les intervalles de leurs lignes de pente sont les mêmes.

(b). Talus extérieur.

Par les 3 droites AB, BC, CD, graduées à l'aide de l'échelle XY, on fera passer le talus intérieur à la pente $\frac{3}{1}$.

On résoudra donc 3 fois le problème 12 : « Par une droite, faire passer un plan ayant une pente donnée ». – L'une des droites, CD, est horizontale ; les autres sont inclinées. On prendra les intersections de ces plans de talus intérieur avec le plan de banquette X'Y' (Problème 8), ce qui donnera les droites $A_1B_1 - B_1C_1 - C_1D_1$.

Remarques. – 1° Ces droites seront parallèles deux à deux comme intersections de deux plans parallèles par un troisième.

2° CD étant horizontale, sa parallèle C_1D_1 sera à 0m,43 de distance (voir le profil) ; mais pour les deux autres, cette distance ne sera pas de 0,43.

3° Dans le tracé on ne s'occupera pas encore de la traverse.

(c) Talus de banquette.

On prendra, en plan, les droites NP – PQ – QR parallèles à $A_1B_1C_1D_1$ et à une distance de 6m. – ce qui donnera la crête du talus de Banquette.

Les horizontales du plan X'Y', menées dans la partie utile de la banquette, donneront la graduation de ces crêtes.

Par ces droites on fera passer des plans inclinés à la pente $\frac{2}{1}$, (Problème 12), et l'on en prendra l'intersection avec le plan horizontal du terre-plein, ce qui donnera le pied du talus de banquette.

Cette intersection sera l'horizontale de cote 14 de ces talus.

(d) Plongées.

Par les 3 lignes de feu on mènera des plans inclinés à la pente $\frac{1}{6}$.

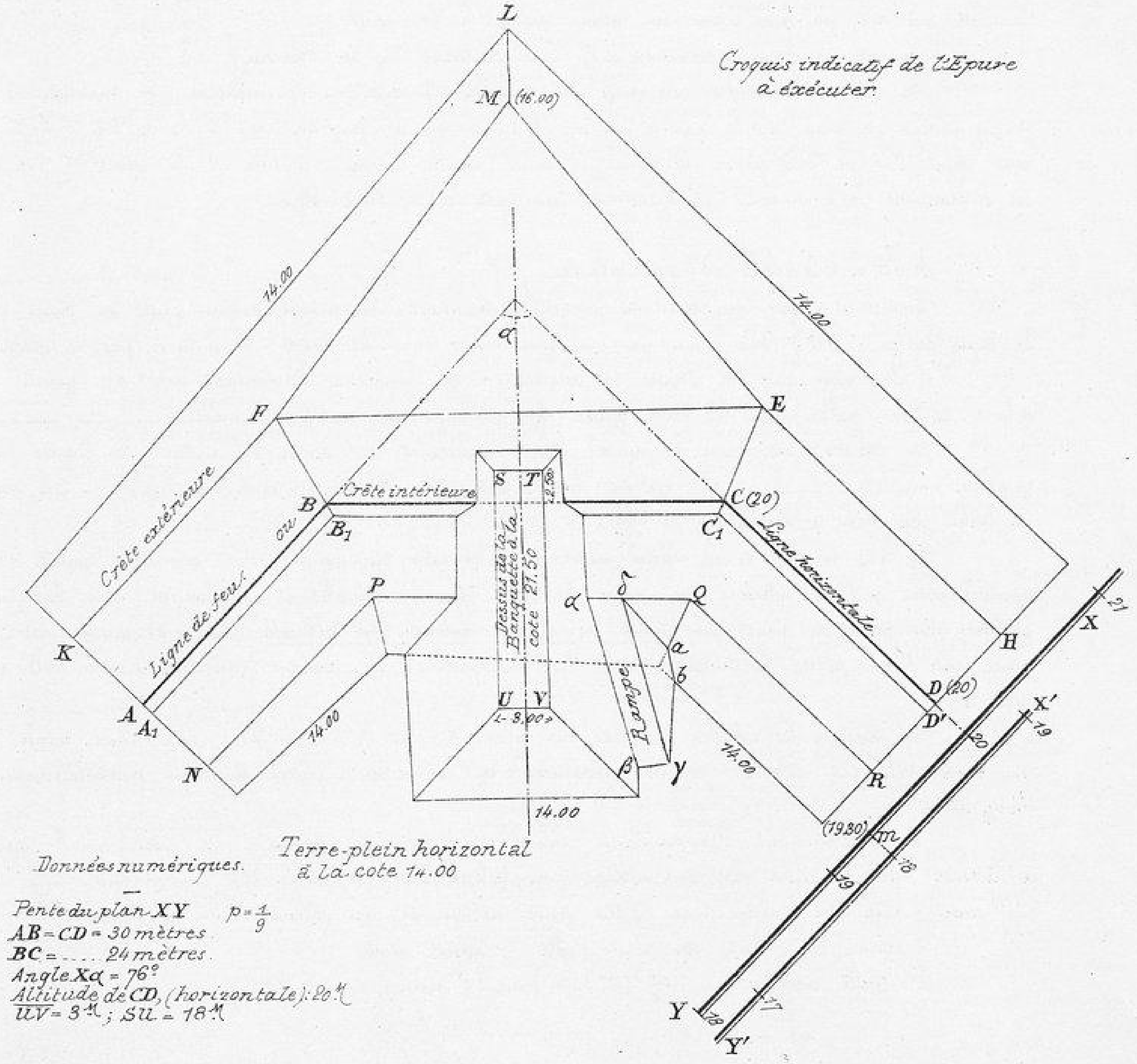
Ils se couperont suivant les droites BF et CE. – Sur les 2 faces AB et CD, et non sur la face BC, on limitera ces plongées aux deux droites KF – EH, parallèles à AB et CD, et distantes horizontalement de 8m. Puis on joindra FE. Cette dernière droite n'est pas parallèle à BC. – On

aura ainsi les 3 plongées dont on tracera les horizontales dans les parties utiles ; ce qui est facile, puisque les lignes de feu sont graduées.

(e) *Talus extérieurs.*

Par les 2 crêtes extérieures KF – EH, on fera passer un plan incliné à la pente $\frac{1}{1}$ (Cette pente est souvent de $\frac{2}{3}$). – On prendra l'horizontale 14 de ces deux plans, ce qui donnera le pied du talus extérieur sur le terre-plein. – On prendra aussi leur intersection LM. – Enfin le talus extérieur du pan coupé EF s'obtiendra en prenant sur l'intersection précédente le point M, de cote 16, et le joignant, par deux droites, aux points E et F.

Fig. 98.



(f) Traverse.

On nomme ainsi un massif de terre établi pour protéger des coups de côté.

On établit d'abord le rectangle horizontal de couronnement STUV. On a ST = 3^{m}, SU = 18^{m} et ST est à 2^{m}50 en avant de BC; par les 4 côtés de ce rectangle on fait passer des plans de talus de terre inclinés à $\frac{1}{1}$. Le reste n'est plus qu'une intersection des plans des talus de la banquette avec les plans déjà dessinés, et avec le terre-plein.

(g) Rampe.

Une rampe inclinée à $1/4$ et ayant une largeur $\alpha\delta = 3^{m}$ monte intérieurement du plan de terre-plein, au plan de banquette X'Y'. Elle est appuyée d'un côté $\alpha\beta$ à la traverse; de l'autre côté β elle est soutenue par un talus incliné à $\frac{1}{2}$.

On prendra le point α où le talus de la traverse rencontre la crête du talus de banquette. Par cette crête αQ on fera passer un plan incliné à la pente $1/4$.

On prendra son intersection $\alpha\beta$ avec le talus de la traverse;

On prendra, comptée sur αQ une largeur $\alpha\delta = 3^{m}$. – On mènera $\delta\gamma$ parallèle à $\alpha\beta$. – On graduera le plan de la rampe et on déduira la graduation de la droite $\delta\gamma$. – Enfin, par cette droite $\delta\gamma$ on fera passer le plan de talus de la rampe, incliné à la pente $1/2$, et on prendra ses intersections a, b, γ avec les talus de banquette et le terre-plein.

§ 65. – Détails d'exécution.

Toutes les lignes qui limitent les différents plans du massif seront faites en traits pleins noirs. La ligne de feu ABCD sera tenue un peu plus grosse que les autres. Il n'y a pas de parties cachées.

S'il arrive que les droites d'intersection se trouvent déterminées par des points situés en dehors de leur partie utile, il faut tracer les prolongements en traits mixtes —.—.—.—.—

On tracera sur tout le massif les horizontales de mètre en mètre. Ces lignes seront en pointillé noir - - - - - - - - - - - - qu'on devra faire très fin ou en trait bleu très fin. – On pourra tracer en trait plus fort les lignes de 5^{m} en 5^{m}, cotées 15 - 20 - 25........

Les cotes seront toutes écrites en noir; les cotes des points isolés, sommets, points d'intersection, parallèlement au côté inférieur du cadre, les cotes des horizontales, parallèlement aux horizontales, en chiffres plus petits et plus fins. Tous ces chiffres doivent être dessinés. On doit mettre assez de cotes pour que l'on puisse facilement suivre les horizontales et trouver rapidement la cote d'un point non coté.

On tracera les échelles de pente des plans XY et X'Y', en bleu, par deux traits inégaux et rapprochés. Ces échelles seront graduées et les cotes inscrites en bleu parallèlement aux horizontales.

Les constructions seront faites comme toujours, en carmin; les cotes qu'il sera nécessaire d'inscrire, pour rendre ces constructions compréhensibles seront écrites en carmin. On devra passer à l'encre rouge les constructions faites pour déterminer les plans dont se compose le massif.

L'épure sera faite sur une feuille $1/2$ grand aigle.

L'échelle adoptée sera $\frac{1}{200}$ (0^{m}005 pour 1 mètre).

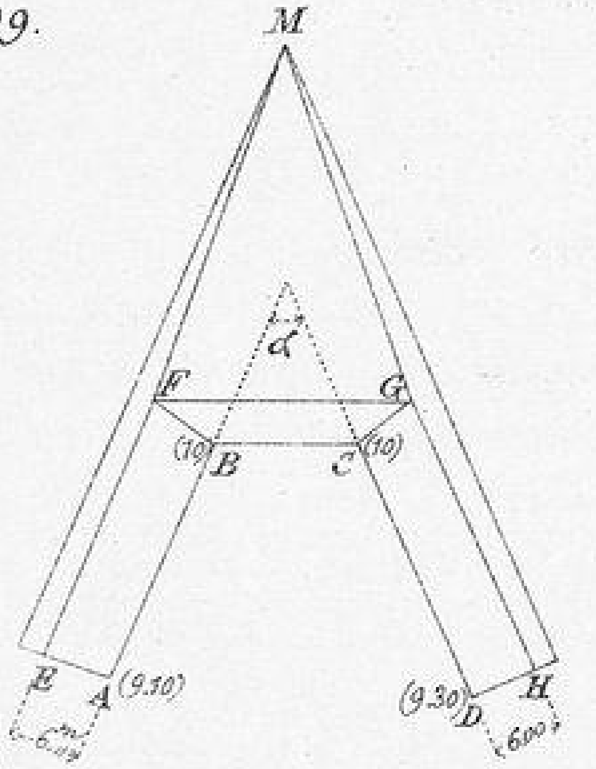
§ 67. –

§ 67. – Autre énoncé d'épure.

(a) *Intersections de plans.* – On donne 4 points A, B, C, D (fig. 99); les lignes AB, CD, forment un angle α que l'on se donnera; la ligne BC est perpendiculaire à la bissectrice de cet angle. On prendra AB = CD = 10 mètres, et BC = 4 mètres.

La ligne BC est horizontale, et à la cote 10, les points A et D sont à un niveau inférieur donné sur le croquis ci-joint, par leurs cotes.

Fig. 99.



On demande : 1° de faire passer par chacune des 3 lignes AB, BC, CD, un plan dont la pente vers l'extérieur de l'angle soit de $\frac{1}{6}$.

Les plans passant par AB et CD seront limités à des plans verticaux parallèles à ces droites et éloignés d'elles de 6 mètres.

Les plans ainsi menés inclinés à $\frac{1}{6}$ coupent les plans verticaux précédents, suivant deux droites EF, GH, parallèles à AB et CD ils coupent aussi le plan mené par BC mais suivant deux droites inclinées BF et GC; on mènera la ligne FG;

2° On fera passer par les deux droites EF, GH, deux plans inclinés à 1 de base pour 1 de hauteur dirigés vers l'extérieur, et on les limitera à un plan horizontal situé à 3m 50 au-dessous de la droite BC. – Ce plan horizontal est supposé par conséquent être à la cote 6,50.

3° On mènera un plan par la droite FG et le point M où se rencontrent les traces sur le plan horizontal des plans inclinés à $\frac{1}{1}$.

L'échelle sera de $\frac{1}{100}$ (0m,01 pour 1 mètre). Elle sera dessinée sur la feuille.

Fig. 100.

(b) *Plate forme avec rampe.* (fig. 100).

Une plateforme horizontale est établie partie en remblai, partie en déblai sur un terrain uni dont la pente est comprise entre $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{12}$.

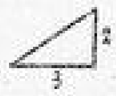
La plateforme est rectangulaire; sa longueur est de 10 mètres, sa largeur de 6 mètres.

Aucun des côtés de la plateforme ne pourra être parallèle aux horizontales du terrain.

Elle sera à la cote de l'horizontale du terrain qui passe par son centre. (7,50)

Une rampe de 3m de largeur est inclinée au sixième part du milieu du petit côté qui est en remblai et descend jusqu'au terrain naturel.

La pente des talus de remblai sera de ½

La pente des talus de déblai sera de 2/3 

L'échelle sera de $\frac{1}{100}$ ($0^m.01$ pour 1 mètre).

Nota. – Le croquis (fig. 100) donne une idée des intersections à obtenir. Il montre par le mouvement de la ligne horizontale de cote 7, comment les lignes de niveau doivent se retourner en passant d'un plan sur l'autre. – Le retournement des autres horizontales est à chercher. Un certain nombre de vérifications (convergences de lignes en certains points, égalités d'angles, etc.....) devront être faites qui ne sont pas indiquées sur le croquis ci-joint.

Exécution. – (Mêmes indications que pour l'épure N° 1).

Fin des projections cotées.

III. – Perspective linéaire.

Perspectives cavalière et axonométrique.

7e Leçon.

§ 68. – Introduction.

On se propose dans les leçons qui vont suivre, d'exposer les principes essentiels de la Perspective géométrique (Perspective des architectes) et d'en dégager les constructions et les tracés applicables à la perspective d'observation (perspective des peintres).

Dans une première série d'études, on s'occupera donc du *trait perspectif*, c'est-à-dire de l'ensemble des constructions qui permettent de déduire un *tableau perspectif*, d'une *épure géométrale* sur laquelle sont indiquées, en grandeur naturelle ou à une échelle donnée, les dimensions des objets à représenter et les positions relatives du tableau, du spectateur et de ces objets. On insistera surtout sur le choix des méthodes et sur la différence à faire entre le trait de la perspective et le trait de la géométrie descriptive.

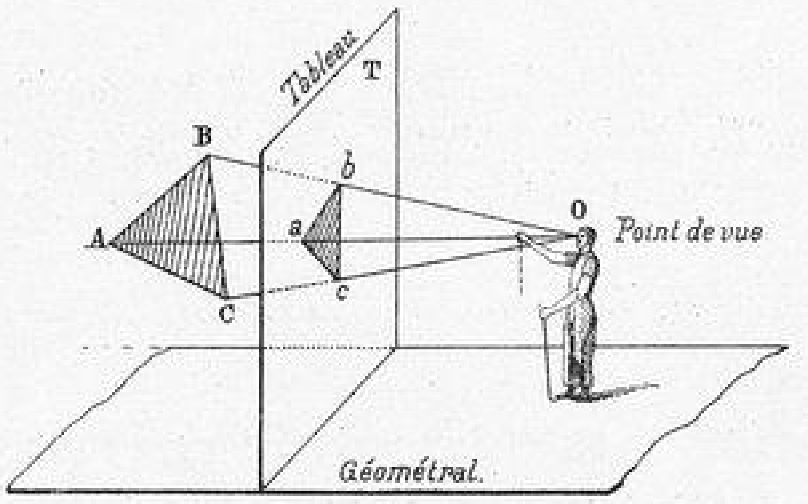
Dans une autre série on dégagera des tracés indiqués dans la première, ceux que le dessinateur a besoin de connaître, pour assurer son dessin. On indiquera la part qu'il convient de faire à l'observation directe des objets à représenter, et on précisera le moment où l'observation directe devient inutile et doit céder le pas au tracé perspectif proprement dit.

§ 69. – Objet de la perspective.

On se propose, dans la perspective, de représenter sur un tableau les objets tels qu'on les voit.

A cet effet : Soit O (fig. 101) l'œil du spectateur que nous supposerons réduit à son centre optique, c'est-à-dire à un point, que l'on nomme le *point de vue*, soit T un tableau que nous supposerons plan et vertical et que nous ferons bien d'assimiler, comme l'indique Léonard de Vinci, à une vitre transparente au travers de laquelle nous apercevrions les objets à représenter. Soit enfin A B C un objet, un triangle par exemple, à mettre en perspective. Les rayons visuels OA, OB, OC sont des lignes droites ; on les mènera et il est évident que si l'on prend en a, b, c les intersections de ces droites avec le tableau, les points du tableau ainsi obtenus en a, b, c, se superposeront en apparence pour le spectateur O, avec les points A, B et C de l'espace ; ils en constitueront comme un décalque. En regardant a, b et c, on croira voir A, B et C ; par conséquent la figure a, b, c sera bien la perspective de la figure A B C.

Fig. 101.



Au point de vue géométrique le problème de la perspective revient donc à mener dans l'espace des lignes droites qui, des divers points des objets, convergent au point de vue, et à

prendre les intersections de ces droites avec le plan du tableau.

On pourrait appliquer les méthodes de la géométrie descriptive à la solution de ce problème : Voici la marche à suivre :

Dans une première partie des opérations on figurerait en projections horizontale et verticale 1°. l'objet à représenter, 2°. le tableau, 3°. le point de vue.

Dans une seconde partie on mènerait tous les rayons visuels et on en chercherait les intersections avec le tableau.

Dans une troisième partie, on ferait le rabattement de ce tableau pour avoir en vraie grandeur la figure obtenue à sa surface, et enfin, le plus ordinairement, comme cela donnerait un dessin très petit, on serait, en outre, obligé de faire une amplification déterminée pour amener le dessin à s'inscrire dans un cadre donné.

Ces constructions seraient longues et compliquées. Elles auraient en outre pour inconvénient d'exiger beaucoup plus de place que n'en comporte le tableau et aussi de ne pas faire image, d'être purement géométriques.

Aussi ne sont-elles pas employées si ce n'est pour des cas exceptionnels.

Elles ne constituent pas le *trait* perspectif.

§ 70. - Esprit des méthodes.

Le véritable trait perspectif peut être caractérisé de la manière suivante :

(a) Il doit permettre d'opérer dans l'intérieur du tableau ou du moins, sans en sortir beaucoup.

(b) Il doit toujours faire image, ce qui veut dire : que les lignes de construction exécutées sur ce tableau doivent être les perspectives de lignes de l'espace, que le perspecteur doit bien se figurer et voir, et non des lignes purement géométriques tracées sur un plan, comme elles le seraient pour un problème de géométrie plane.

(c) Il doit permettre de tirer directement d'une épure géométrale, ordinairement à petite échelle, sans amplification à faire à posteriori, un tableau perspectif d'une grandeur quelconque.

(d) Il doit disposer de méthodes pour mettre en place, d'après l'Epure géométrale, les grandes lignes, c'est-à-dire ce que les peintres nomment l'*Ensemble* de la perspective ; et avoir d'autres méthodes pour dessiner ensuite les *détails*, en s'appuyant sur l'ensemble précédemment déterminé.

Les premières méthodes sont dites de *Perspective générale* ; les secondes sont dites de *Perspective directe ou immédiate*.

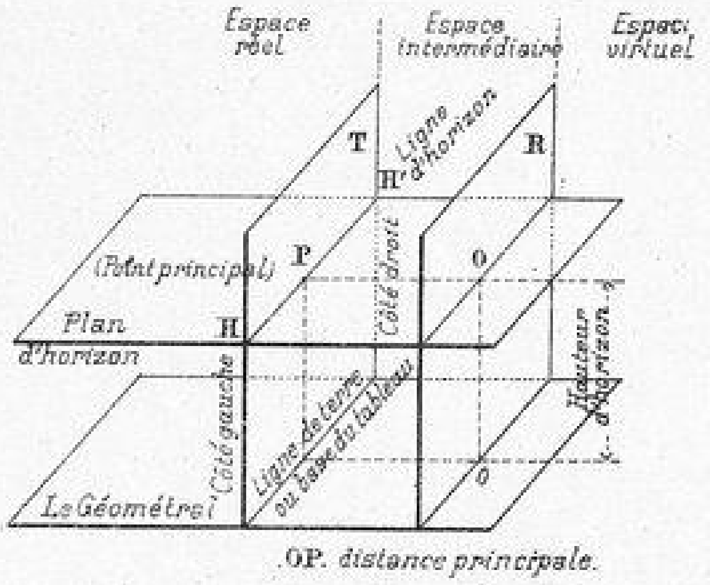
De cette façon, les détails étant en chaque point, dessinés en s'appuyant sur les figures d'ensemble tracées aux environs de ces points, il résultera plus d'homogénéité dans les erreurs inévitablement commises, ce qui les rendra moins choquantes et, par conséquent, plus acceptables.

Ce sont surtout ces méthodes de Perspective directe que le peintre ou celui qui dessine d'après un modèle en relief, doit connaître, puisque la mise en place de l'ensemble lui sera fournie par l'observation directe de son modèle, et, bien entendu, sans avoir recours à une épure géométrale.

§ 71. – Définitions.

La figure 102 permet de résumer les principales définitions.

Fig. 102.



.OP. distance principale.

Le tableau est en général plan et vertical[1].

Le plan horizontal sur lequel il est supposé reposer par sa base XY, se nomme le géométral.

On distingue la base du tableau ou ligne de terre XY, le côté gauche et le côté droit du tableau.

Le plan horizontal mené par le point de vue O, se nomme le plan d'horizon. Il coupe le tableau suivant la droite horizontale HH' qui se nomme la ligne d'horizon.

Si du point de vue on abaisse une perpendiculaire OP sur le tableau, le pied P de cette perpendiculaire se nomme le point principal de fuite[2] et la longueur OP mesurée, donne la distance principale, de l'œil au tableau, ou plus simplement, la distance principale.

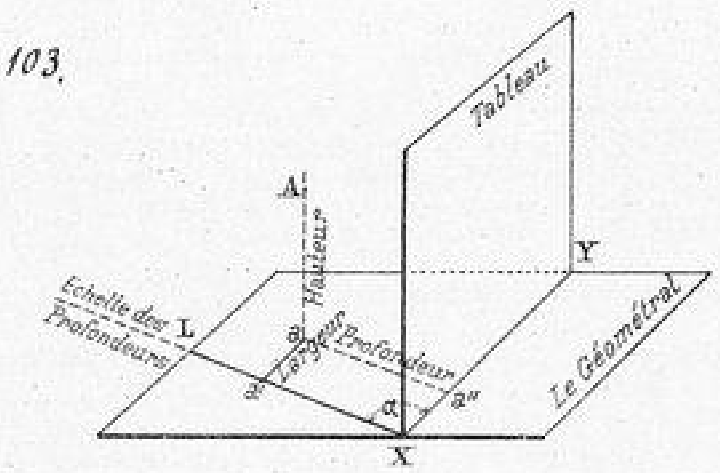
Enfin la perpendiculaire Oo abaissée de l'œil sur le géométral donne par sa longueur, la hauteur de l'œil ou, hauteur d'horizon.

Nous nommerons: *espace réel*, l'espace compris au-delà du tableau, du coté opposé au spectateur.

Espace intermédiaire, celui qui est compris entre le plan du tableau et le plan de front R du spectateur.

Espace virtuel, celui qui est situé en arrière du plan de front du spectateur.

Fig. 103.



§ 72. – Coordonnées perspectives d'un point A de l'espace.

Pour déterminer la position d'un point A dans l'espace, on se donnera (fig. 103) ses trois coordonnées perspectives qui sont:

La largeur, la profondeur et la hauteur de ce point.

---

(1) Dans les panoramas le tableau est cylindrique. Des obstacles adroitement dissimulés obligent le spectateur à se tenir aux environs de l'axe du cylindre, c'est-à-dire aux environs du point de vue pour lequel le panorama a été fait. De cette façon l'illusion est aussi complète que possible.

Dans d'autres cas, le tableau est sphérique: c'est ce qui a lieu pour des décorations de coupoles. Le tableau tout en étant plan, peut être horizontal: c'est ce qui a lieu pour un plafond. On a dans ce cas, ce que l'on nomme une perspective plafond.

(2) Dans quelques ouvrages on donne improprement au point P le nom de point de vue. – Le point de vue est, en réalité, le point où l'on se place pour voir; c'est le point O, œil du spectateur.

Projetons A en a, sur le géométral. La longueur de la verticale Aa sera la hauteur du point.

Imaginons que dans le géométral, par le point X extrémité de gauche de la base du tableau, nous ayons mené une droite XL oblique ou perpendiculaire sur XY, peu importe.

Nous nommerons cette droite une échelle de profondeurs.

Si par a, nous menons une droite de front aa', parallèle au tableau, c'est-à-dire à XY, aa' sera la largeur du point et a'X ou son égale aa", sera sa profondeur (oblique).

Si l'échelle des profondeurs avait été prise perpendiculaire sur XY au lieu d'être oblique, on aurait eu des *profondeurs droites* au lieu de *profondeurs obliques*; et l'on conçoit que si on emploie les profondeurs obliques il faille donner, en plus, l'angle α, que fait l'échelle des profondeurs avec la ligne de terre, ce qui est inutile avec les profondeurs droites, puisque dans ce cas cet angle α sera droit.

La mise en perspective d'un point A comprendra toujours les 3 opérations suivantes : mise en largeur, mise en profondeur, et mise en hauteur du point. Les deux premières (mise en largeur et en profondeur) se font en général, en une seule opération et constituent ce que l'on nomme la Perspective des plans.

§ 73. – Ligne droite.

Il faut distinguer les droites de front, c'est-à-dire qui sont parallèles au tableau. (Elles peuvent être parallèles au plan d'horizon ou inclinées sur lui).

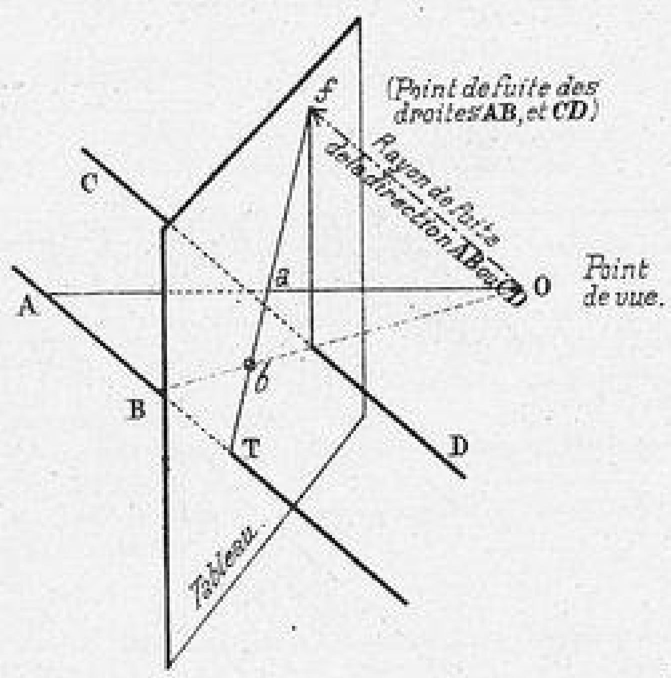
Les droites perpendiculaires au tableau, ou droites principales, et les droites quelconques, auxquelles on donne quelquefois le nom de droites accidentelles.

La perspective d'une droite AB (fig. 104) de l'espace est une droite ab. Il suffira de deux points pour assurer sa mise en place.

Les points les plus importants à considérer dans une droite sont (fig. 104) : 1° Sa trace au tableau T, c'est-à-dire le point de profondeur nulle ; ce point est, à lui-même, sa propre perspective. 2° Le point situé à l'infini, ou point de profondeur infinie.

Pour comprendre comment un point situé infiniment loin sur une droite peut avoir une perspective située à distance finie, il suffit de considérer un point quelconque A (fig. 104) de chercher sa perspective a, à l'aide du rayon visuel Aa, puis de se figurer que le point A s'éloigne indéfiniment sur la droite ; à la limite le rayon visuel oaA sera devenu la droite Of parallèle à la droite AB, et son point d'intersection f avec le tableau, donnera la perspective du point à l'infini.

Fig. 104.



Ce point f, se nomme le point de fuite de la droite AB.

Les considérations qui précèdent montrent :

1° Que si l'on a plusieurs droites AB, CD ..... parallèles dans l'espace, leurs perspectives ne sont pas parallèles : mais qu'elles ont toutes un même point

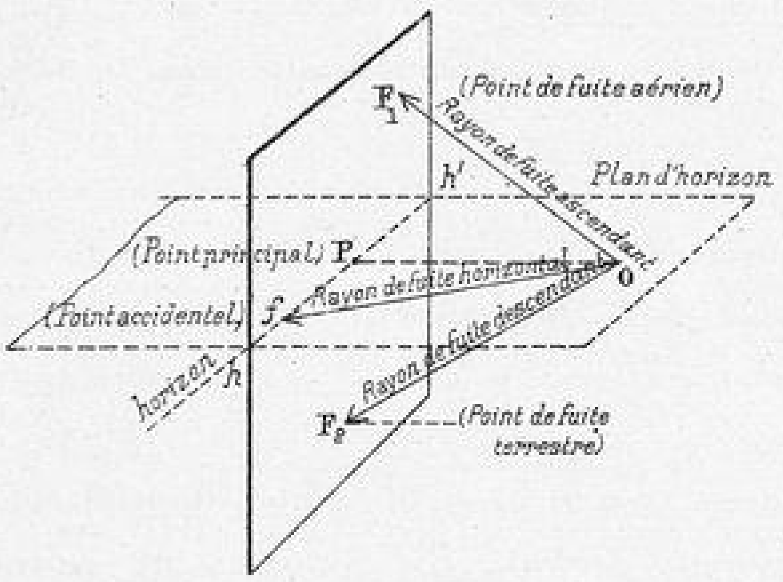
de fuite f.

2° Que ce point de fuite commun s'obtient, une fois pour toutes, en menant par l'œil une droite Of, parallèle à la direction de ces droites, et en prenant son intersection f avec le tableau ; de telle sorte, qu'en perspective un point de fuite définit une direction. Autant de directions on pourrait imaginer dans l'espace, autant de points de fuite y répondraient.

3° *Le point de fuite principal P* (fig. 102) est le point de fuite de toutes les droites qui sont perpendiculaires au tableau.

4° Toutes les directions horizontales auront leurs points de fuite situés sur la ligne d'horizon (fig. 104bis). Ils seront plus ou moins loin du point principal, suivant que ces directions s'écarteront plus ou moins de la direction principale.

Fig. 104bis.



Les directions qui ne sont pas horizontales auront leurs points de fuite soit en F_1 au-dessus de l'horizon, si la direction est ascendante, soit en F_2, au-dessous de l'horizon, si elle est descendante.

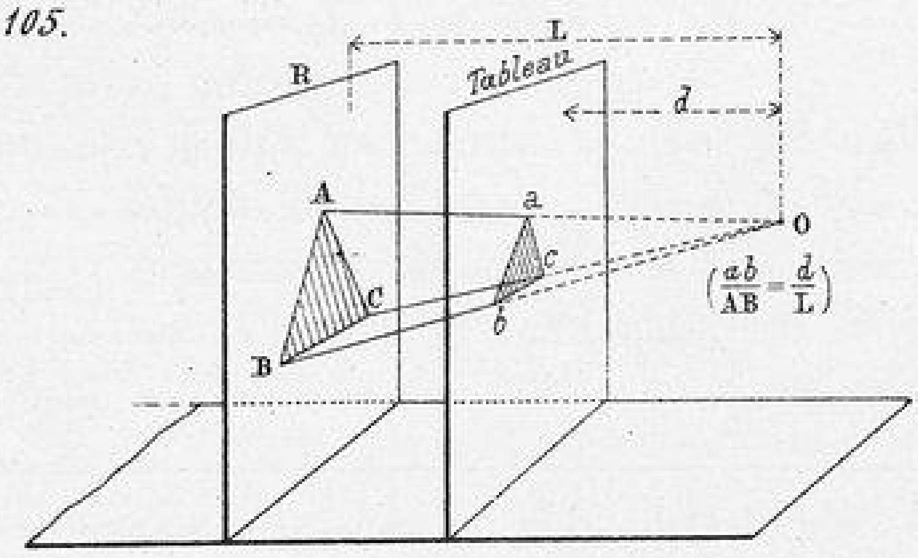
Les peintres disent que le point de fuite F_1 est <u>aérien</u>, parce que dans un tableau on le trouverait placé dans le ciel, tandis que F_2 est un point de fuite <u>terrestre</u>, il semblerait placé dans le sol.

Les points de fuite qui répondent à des directions autres que la direction perpendiculaire au tableau prennent, quelquefois, le nom de *points accidentels de fuite*.

Nota. – Nous nommerons <u>rayon de fuite</u> d'une direction, le rayon visuel tel que Of, mené par l'œil, parallèlement à cette direction et dont l'intersection avec le tableau donne en f le point de fuite de la direction donnée.

§ 74. – *Figures situées dans des plans de front.* (fig. 105). – *Echelle d'un plan de front.*

Fig. 105.



Prenons une figure tracée dans un plan de front R (un triangle A B C par exemple). Pour obtenir sa perspective il faudrait imaginer la pyramide O A B C formée par les rayons visuels et la couper par le plan du tableau, qui est parallèle au plan R. La section sera donc un triangle a b c semblable au triangle A B C et dont les côtés seront parallèles aux siens.

D'où l'on conclut ce principe très important : *Toute figure de front se pers-*

-pective semblable et parallèle à elle-même.

La perspective a b c, sera plus petite que la figure de l'espace, si cette dernière est par rapport au spectateur, de l'autre côté du tableau, et d'autant plus petite qu'elle sera plus éloignée.

Elle serait, au contraire plus grande, si la figure A B C de l'espace eût été placée entre le spectateur et le tableau.

Ce qui caractérisera donc un plan de front ce sera l'échelle à laquelle une figure qui y serait tracée apparaîtrait sur le tableau.

De telle sorte que, à tel plan de front répondra l'échelle de $1/_{10}$, à tel autre l'échelle de $1/_5$.- Nous aurons le plan de front des vraies grandeurs, celui des demi-grandeurs, etc.... etc...

L'échelle d'un plan de front serait donnée numériquement par le rapport $\frac{d}{L}$ de la distance de l'œil au tableau, à la distance de l'œil au plan de front considéré. Par exemple, si tel plan de front est 8, 10, 12 fois plus éloigné de l'œil que le tableau, son échelle sera $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, c'est-à-dire que toute figure de ce plan de front apparaîtra sur le tableau 8, 10 ou 12 fois plus petite qu'elle n'est en réalité.

On voit combien il serait peu correct, au point de vue de la précision du langage de demander à quelqu'un de donner la perspective d'un objet en grandeur naturelle; puisque, si telle ligne de l'objet qui dans le plan de front auquel elle appartient, se perspective en grandeur naturelle, telle autre qui sera plus près ou plus loin que la précédente doit apparaître plus grande ou plus petite que nature.

Pour parler avec précision il faudrait dire « dans tel plan de front (que l'on aura soin de bien spécifier sur le tableau) les lignes devront être dessinées en grandeur naturelle ».

§75.- L'épure géométrale et le tableau.

Ces généralités posées abordons la description des méthodes qui constituent le trait perspectif.

Lorsqu'un dessinateur veut exécuter, par les procédés absolument précis, la perspective d'un objet (une croix par exemple) il commence par faire le relevé géométral de cet objet ce qui lui permet de le représenter en plan, élévation et, s'il y a lieu, en coupe, à une échelle déterminée.

Ce premier dessin constitue ce que nous nommerons l'épure géométrale.

Le plan nous donne les largeurs et les profondeurs; l'élévation nous fait connaître surtout les hauteurs.

Nous indiquerons sur le plan (fig. 106) la position du tableau: à cet effet nous tracerons en x y, la base du tableau; O sera la position de l'œil[1] en plan et en h h' sur l'élévation, nous donnerons la hauteur de l'œil ou hauteur d'horizon.

Si nous joignons O x et O y, les deux lignes ainsi menées constituent l'angle optique; elles limitent ce que l'on nomme le champ du tableau, c'est-à-dire ce qui peut être vu, du

---

[1] Ordinairement O est sur une perpendiculaire élevée au milieu ou aux environs du milieu de X Y.

point P, sur le tableau.(1)

Les opérations de la perspective se divisent en deux parties.

Fig. 106.

(a). L'épure géométrale.

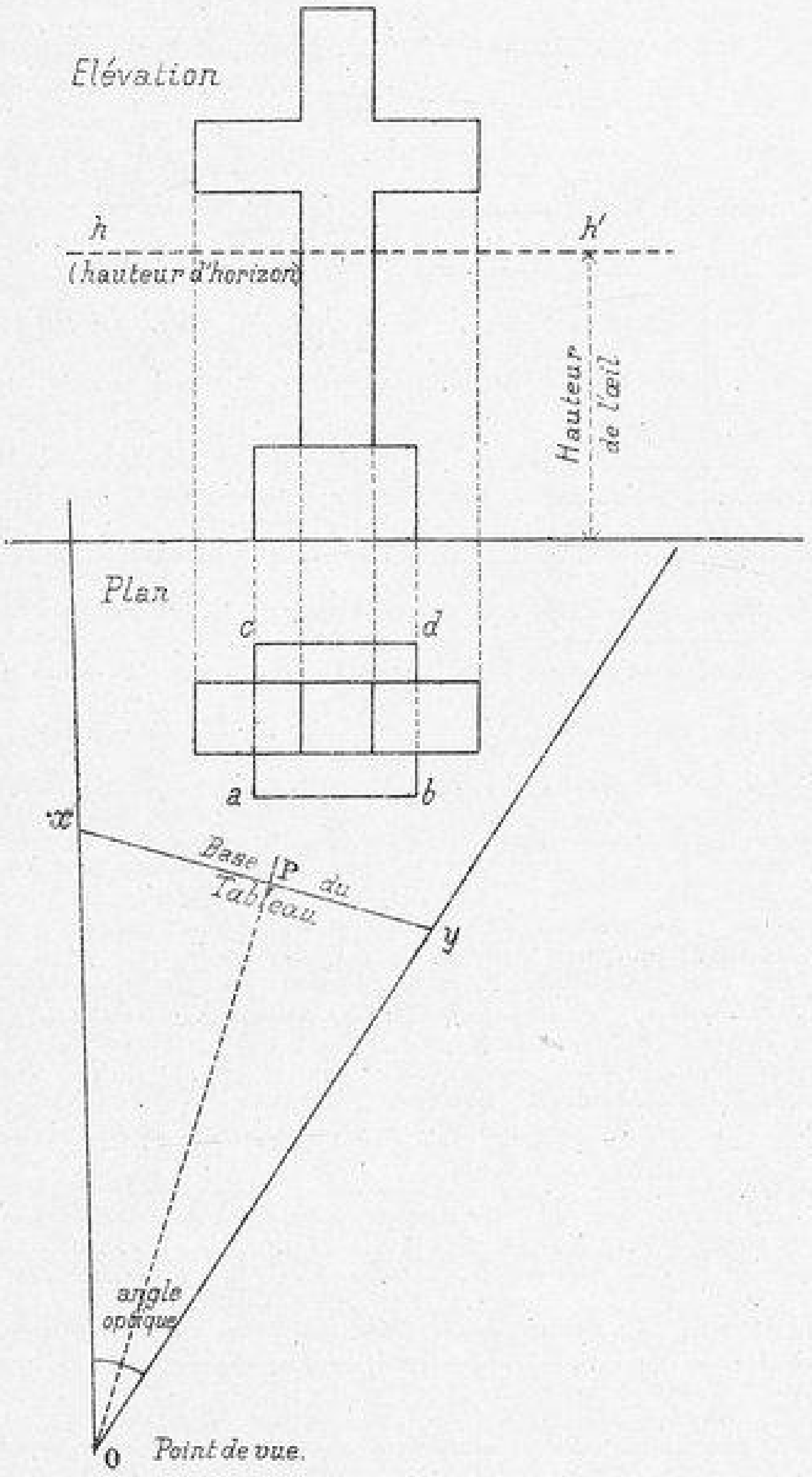
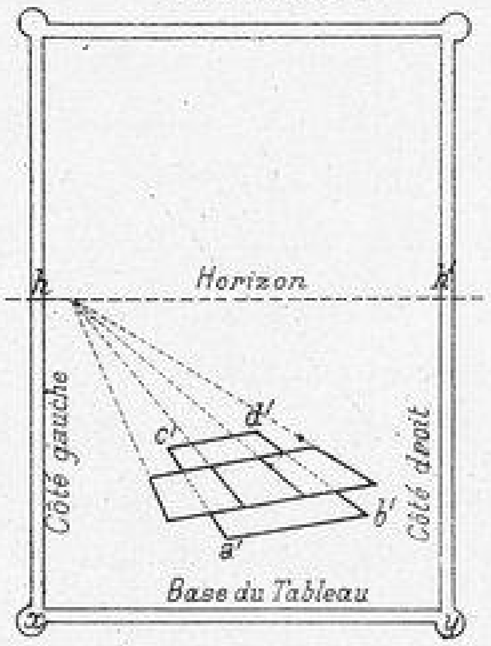


Fig. 107.

b. Le Tableau.



Dans la première on cherchera sur le tableau (voir fig. 107) la perspective du plan tout seul (a'b'c'd' est la perspective du plan a b c d); dans une seconde partie, on mettra les points en hauteur en s'appuyant sur le plan déjà mis en perspective. (Cette mise en hauteur n'est pas réalisée fig. 107, elle l'est plus loin : voir Perspective des hauteurs.)

La première partie s'occupe donc de la mise en largeur et en profondeur ; c'est la Perspective des plans ou Perspective du géométral, la seconde s'occupe de la mise en hauteur, c'est la Perspective des Elévations.

A. Perspective des plans.

(1) On recommande de ne faire cet angle optique ni trop grand ni trop petit. Trop grand, l'œil ne jugerait, d'un seul regard que l'ensemble des parties situées dans le centre du tableau, les côtés lui échapperaient ; trop petit la perspective se rapprocherait trop d'une projection : En adoptant une distance OP, comprise entre 1 fois ½ et 3 fois la largeur x y, on sera dans de bonnes conditions. Il sera bon, également, de placer le spectateur à une distance de l'objet qui soit comprise entre deux fois et trois fois la plus grande dimension de cet objet.

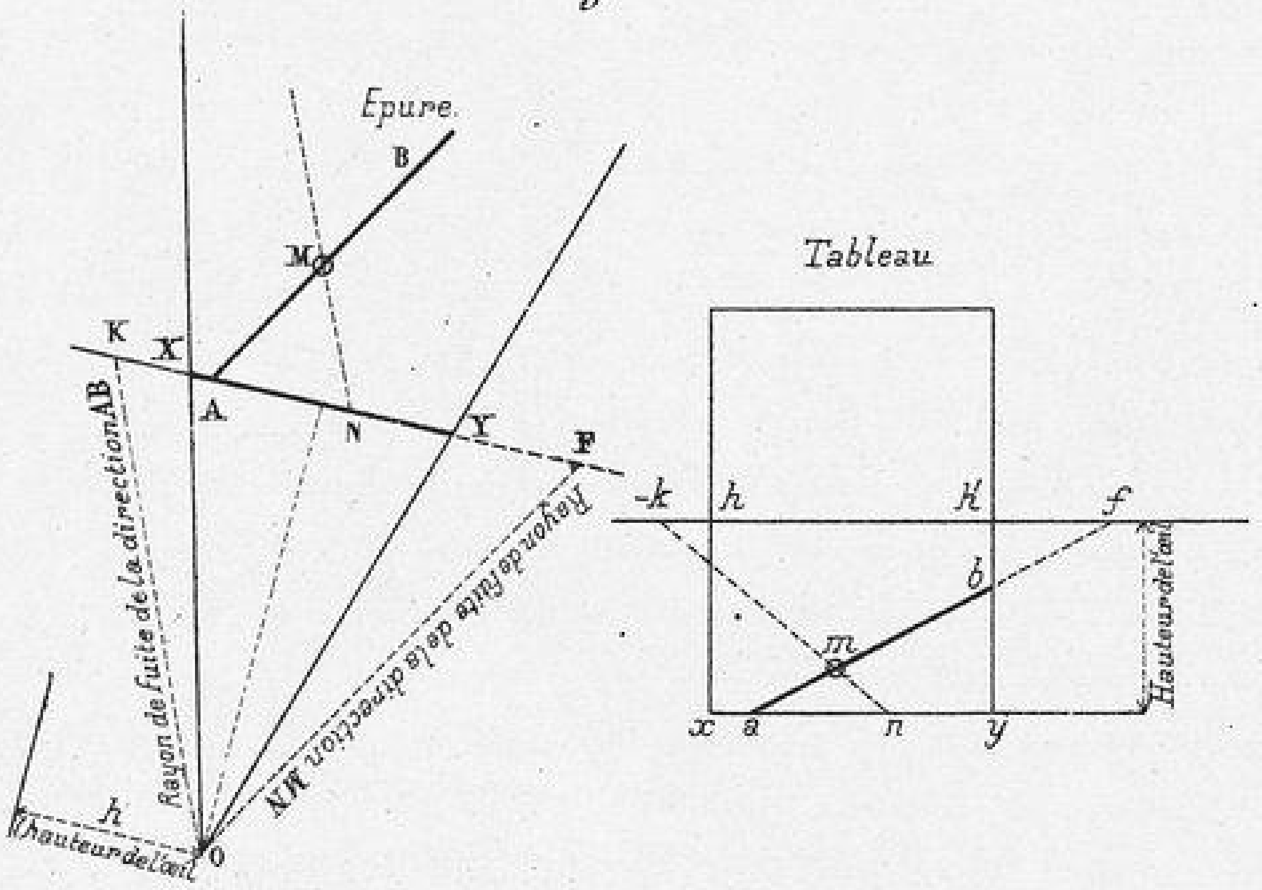
A. – Perspective des plans (Perspective du Géométral).

8ème Leçon. –

§ 76. – Perspective d'une droite du géométral.

Un point pouvant toujours être considéré comme l'intersection de deux droites, on voit que le problème de la mise en perspective d'un point reviendra toujours à la mise en perspective d'une droite.

Fig. 108.



(a) Soit (fig. 108) AB cette droite sur l'épure ; XY la base du tableau sur l'épure, O la position de l'œil, h sa hauteur. Je donne à côté de l'épure géométrale, le tableau en vraie grandeur.

On a pris : xy (tableau) = XY (épure). La ligne d'horizon est tracée en hH à la hauteur de l'œil.

Je mets en perspective le point B (trace au tableau de la droite, profondeur nulle) et son point à l'infini, ou point de fuite (profondeur infinie).

Le premier a sa perspective en a sur la base du tableau : [xa (tableau) = XA (épure).]

Pour avoir le point de fuite je mène (épure) OF parallèle à AB ; je prends la trace F de cette droite sur le tableau et je reporte F en f sur la ligne d'horizon. On a Hf (tableau) = YF (épure). La perspective de la droite est donc abf (tableau).

(b) Placer un point M sur la droite. (Epure). Par M je mène une droite quelconque MN. Je cherche comme ci-dessus, sa trace au tableau N, son point de fuite K. Je reporte ces points sur le tableau en n et en k ; la perspective de MN est la droite mn (tableau) et le croisement de ab et de mn, donne en m, la perspective du point cherché.

Telle est la méthode générale du tracé perspectif. Elle est très simple et nous verrons, cependant comment il est possible de la simplifier par la connaissance que nous allons faire de ce que l'on nomme les points de distance, principaux ou accidentels, réduits ou non réduits.

§ 77. – Droites dans des positions particulières. – Points principaux de distance.

A cet effet, cherchons à mettre en perspective des droites occupant, dans le géométral des positions particulières.

(a) Droites principales (perpendiculaires au tableau). Soit AB (fig. 109) une pareille droite. Je fais la perspective comme tout à l'heure. Le point de fuite des lignes principales est le point

principal de fuite, p (tableau) je porte x c tableau = XC (épure) et j'ai en c a la perspective de CA.

Fig. 109.

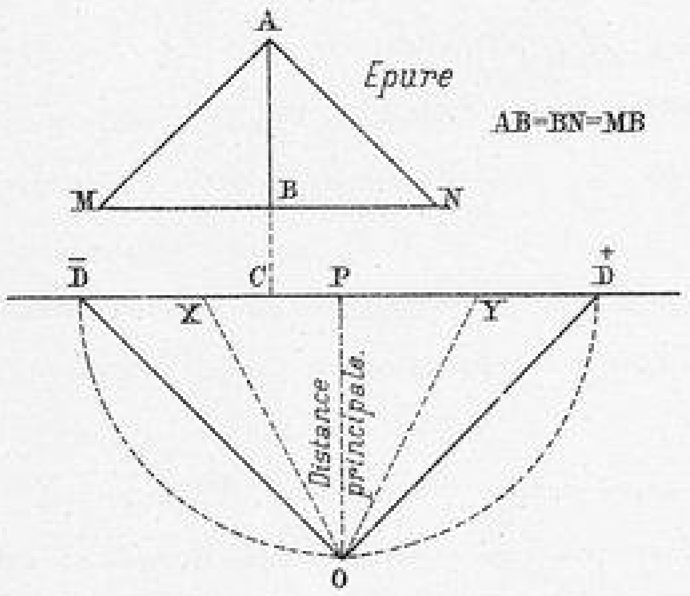
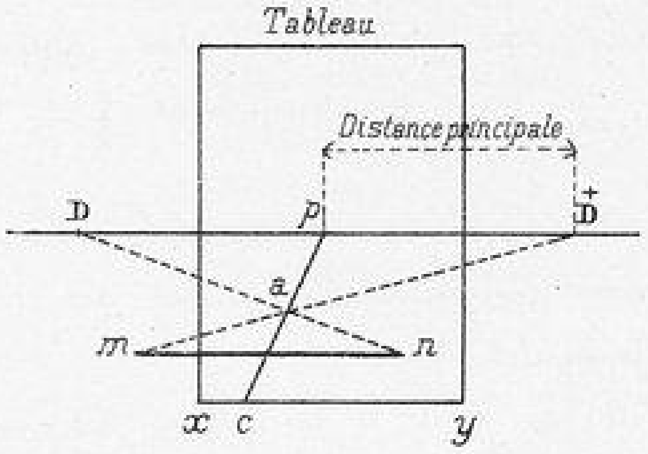


Fig. 109 bis.



(b) *Droites d'égale resection.* — On nomme ainsi des droites telles que MA et NA qui recoupent en parties égales les lignes de front (BN) et les lignes principales BA. On a sur l'épure BN = BA, et BM = BA.

Pour avoir le point de fuite de la ligne d'égale resection MA, je lui mène une parallèle $O\overset{+}{D}$; et la similitude des triangles me donne aussi $OP = P\overset{+}{D}$.

Le point $\overset{+}{D}$ (tableau) est le point de fuite des lignes d'égale resection.

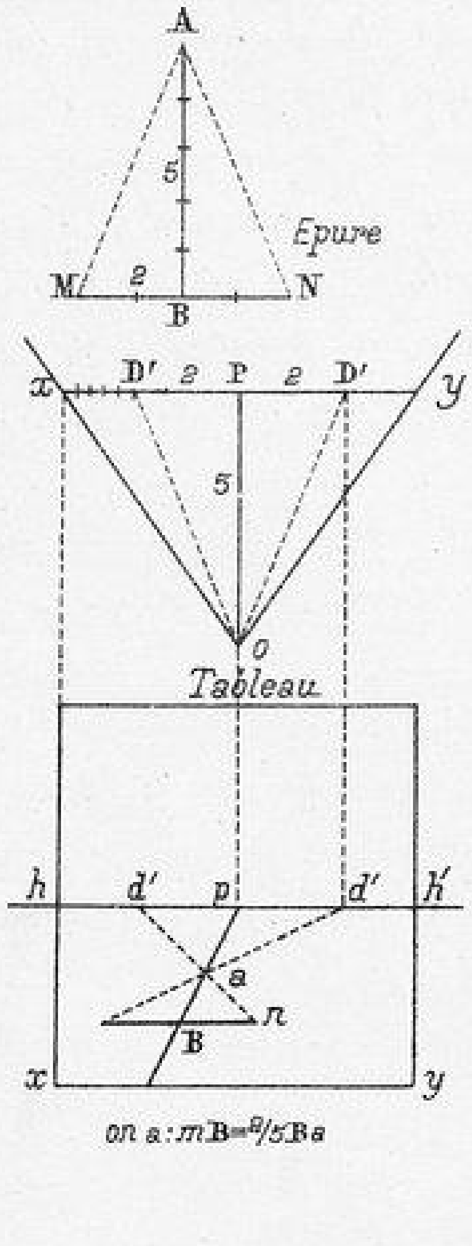
Pour l'obtenir il suffit donc de porter sur la ligne d'horizon, à partir du point principal de fuite P, une longueur PD égale à la distance principale de l'œil; ce qui fait donner à ce point le nom de *point principal de distance.*

Il faut donc bien se persuader que le point de distance est un point de fuite comme un autre et il serait bon de retenir la définition suivante:

Définition. — Le point principal de distance est le point de fuite des lignes d'égale resection, c'est-à-dire des droites qui recoupent en parties égales les lignes de front et les fuyantes principales.

Il y a le point de distance de droite $\overset{+}{D}$ (plus D) pour les lignes d'égale resection de droite, et le point de distance de gauche $\bar{D}$ (moins D) pour celles de gauche.

Fig. 110.



on a: mB=2/5Ba

(c) *Droites de resection* $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$ .... $\frac{m}{n}$.. Sur une épure analogue (fig. 110) menons une droite principale AB et une ligne AM, telle que le segment de front BM soit par exemple, les $\frac{2}{5}$ de AB.

Nous nommerons une droite telle que MA, une *ligne de resection* $\frac{2}{5}$.

J'obtiendrai le point de fuite de la droite MA en lui menant la parallèle OD'; et, la similitude des triangles m'indique encore que $PD' = \frac{2}{5}\ PO$, c'est-à-dire les $\frac{2}{5}$ de la distance principale.

Nous nommerons ce point: *le point principal de* $\frac{2}{5}$ *de distance.*

C'est un point de distance réduite. Il peut y en avoir autant que l'on veut.

Ainsi, en portant à droite ou à gauche du point

principal P, une longueur égale aux $\frac{m}{n}$ de la distance, on aura le point principal de $\frac{m}{n}$ de distance, ce qui conduit à la définition suivante :

Définition : le point $\frac{m}{n}$ de distance est le point de fuite des lignes de resection $\frac{m}{n}$, c'est-à-dire des lignes qui interceptent sur des lignes de front et sur des fuyantes principales, des segments qui sont entre eux comme m est à n.

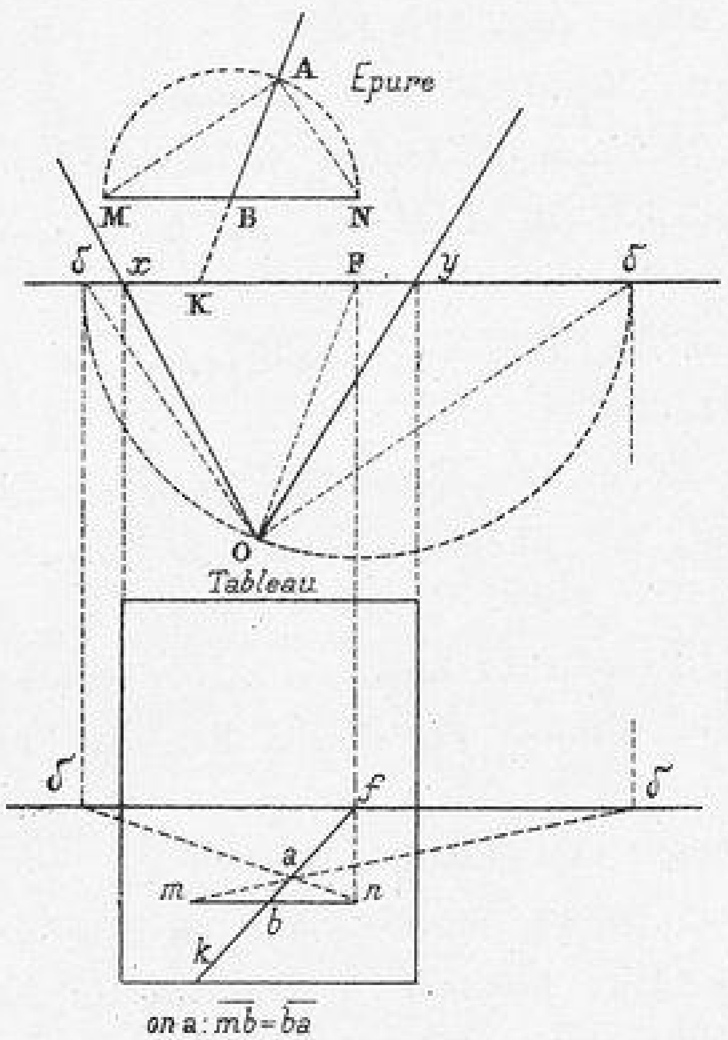
Ce rapport $\frac{m}{n}$, peut être quelconque ½, ⅓, ¾, etc .... voir même être incommensurable.

§ 78. – Points de fuite accidentels et points de distance correspondants.

Il faut savoir généraliser les notions qui précèdent et les étendre aux directions autres que les directions principales.

Soit (fig. 111) en épure 1° le tableau XY, 2° une droite quelconque AB, F son point de fuite obtenu comme on sait, 3° MN une droite de front, et de part et d'autre de B deux segments MB et NB, égaux chacun à AB.

Fig. 111.



on a : $\overline{mb}=\overline{ba}$

Nous appellerons aussi les droites telles que MA et NA des lignes d'égale resection, relativement à la direction AB, dont le point de fuite est F.

On aura le point de fuite f de la droite AM en menant par l'œil, la parallèle Oδ, ou bien, ce qui reviendra au même, en portant au compas, à partir du point de fuite f, sur la ligne d'horizon la distance oblique OF.

Ce point δ sera le point accidentel de distance répondant à la direction f (c'est-à-dire dont le point de fuite est f). Et il jouira des mêmes propriétés que tout à l'heure.

Ce sera le point de fuite des droites d'égale resection pour la direction f c'est-à-dire des droites qui interceptent sur les lignes de front et sur les fuyantes au point f, des segments égaux.

Remarque : – Nous disons la direction f, parceque, en effet, en perspective une direction est indiquée par son point de fuite.

Nota : Nous emploierons la lettre d, ou $\frac{1}{2}$d, ou $\frac{1}{3}$d, pour designer les points principaux de distance. Quand il s'agira d'un point accidentel nous emploierons ordinairement la lettre grecque δ, $\frac{1}{2}$δ ....

Points accidentels de distance réduite.

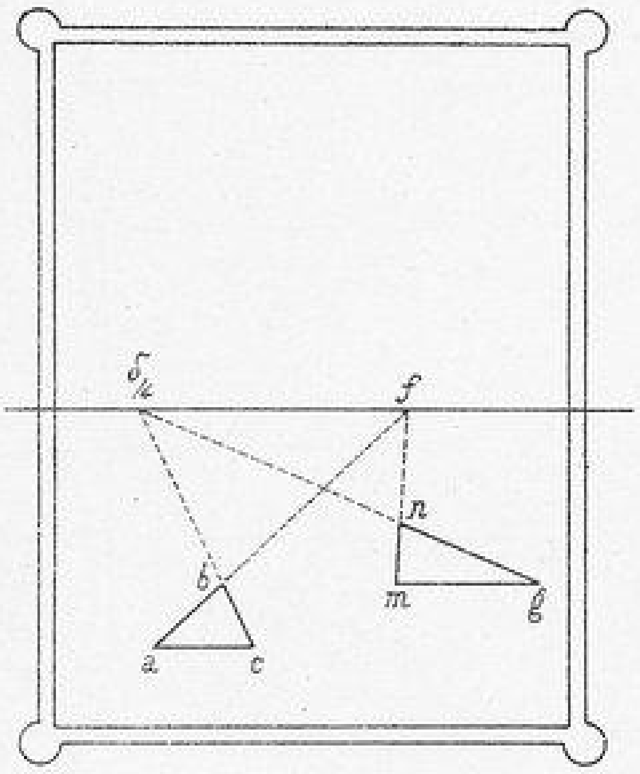
En portant à droite ou à gauche de f, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ .... $\frac{m}{n}$ de la distance oblique OF, on aura les points de $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ .... $\frac{m}{n}$ de distance correspondants.

Ce seront, par rapport à la direction f, les points de fuite des droites de resection $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ...... $\frac{m}{n}$. Il est inutile d'insister.

Pour résumer, retenons bien le fait suivant :

On nous donne sur un tableau tout fait (fig. 112) un point accidentel de fuite f, et en $\frac{f}{4}$, le point de $\frac{1}{4}$ de distance qui lui correspond.

Fig. 112.



Si je mène 1° la fuyante abf, 2° la ligne de front ac, et enfin 3° la fuyante $cb\frac{f}{4}$; je puis affirmer que dans l'espace on a, réellement $\overline{ac} = \frac{1}{4}\,\overline{ab}$ de même $\overline{mg} = \frac{1}{4}\,\overline{mn}$.

On généralisera facilement pour le cas où on aurait donné $\frac{f}{3}$, $\frac{f}{5}$ ..... $f\frac{m}{n}$ au lieu de $\frac{f}{4}$.

Les applications qui vont suivre fixeront sur l'usage des points de distance, principaux ou accidentels, réduits ou non réduits et feront apprécier les simplifications que leur emploi apporte aux tracés perspectifs.

§ 79. – Perspective d'un quadrilatère du géométral. – Tableau non amplifié.

(a) Je prends le quadrilatère A, B, C, D, (fig. 113) comme exemple d'une série de points distribués d'une manière quelconque dans le géométral.

Par X (épure) je mène XR perpendiculaire sur XY, c'est *l'échelle des profondeurs droites*, et j'y projette A, B, C, D, en a b c d, par des lignes de front : je mène aussi par les points A, B, C, D, des parallèles à XR, et j'obtiens en X, a'b'c'd' les *largeurs* des points. Cela fait, je reproduis le tableau (fig. 114) sans l'amplifier. J'ai x y (tableau) = XY (épure) et la ligne d'horizon h h' donnée par la hauteur de l'œil.

(b) *Mise en largeur*. – Sur une bande de papier je prends (épure) les largeurs Xa'b'c'd' et je les reporte (tableau) sur la base x a'b'c'd'.

Du point O (épure) j'abaisse OP perpendiculaire sur XY et, par suite, parallèle à XR, a a', b b'....... Je reporte P en p sur la ligne d'horizon h h' (tableau) ce qui me donne le point principal de fuite, et, joignant (tableau) a'p, b'p, c'p....... j'obtiens les perspectives des droites de l'épure A a', B b'...... etc..... Les points sont mis en largeur ; ils doivent se trouver sur ces fuyantes principales.

(c) *Mise en profondeur*. – L'échelle des profondeurs XR de l'épure a pour perspective la fuyante x p du tableau. Sur cette échelle je vais porter les points a, b, c, ...; raisonnons pour a.

A cet effet, imaginons que par le point a, on ait mené une ligne d'égale resection a a" – on aura Xa" = Xa (épure).

Mettons en perspective cette ligne d'égale resection. Son point de fuite est le point principal de distance D, obtenu (tableau) en portant à gauche de p. pD = OP.

On achèvera comme il suit : 1° On prendra donc la profondeur Xa (épure), 2° On la portera (tableau) en largeur de x en a" sur la base du tableau et à gauche à partir du pied x de l'échelle des largeurs, 3° On joindra a" D et on aura, par recoupement en a, la perspective demandée, 4° par a, on mènera une ligne de front a A (tableau) jusqu'à la rencontre avec la fuyante a'P.

On voit que ces constructions pourront se faire sans plus rien tracer sur l'épure, car les lignes auxiliaires d'égale resection sont inutiles à figurer sur l'épure. Nous ne les avons tracées que pour faciliter le raisonnement. Pratiquement on opère comme suit : Sur une bande de papier on relève, à la fois, toutes les profondeurs Xa, Xb, Xc...... ; on les reporte, en largeur, sur la base du tableau, à partir de x, en xa", b", c"...... Puis, plaçant une réglette en papier (fig. 114 bis) de

Fig. 113.

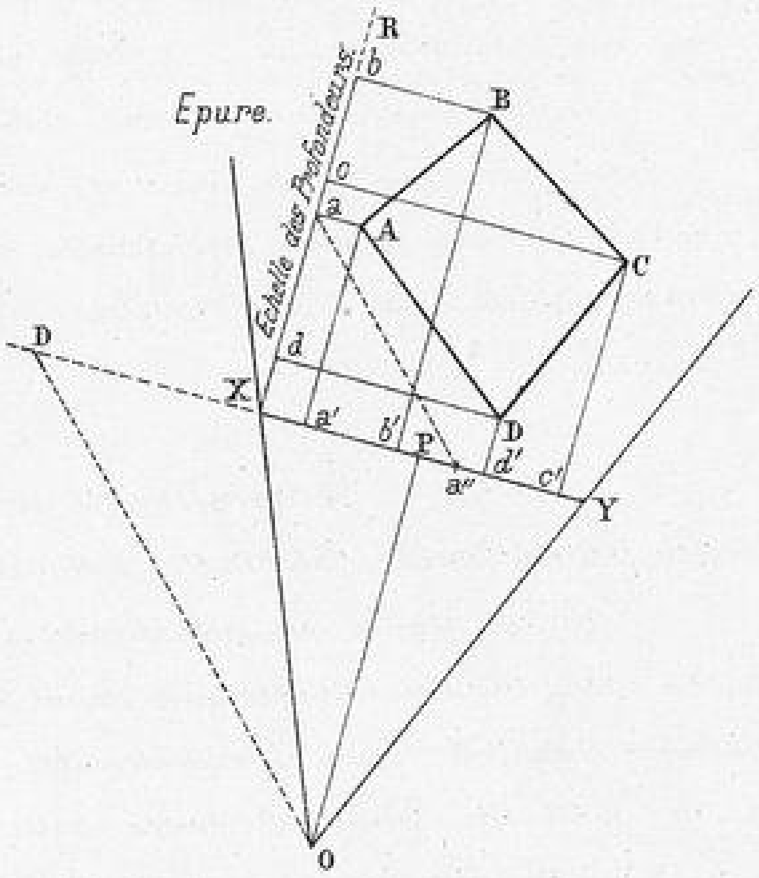


Fig. 114.

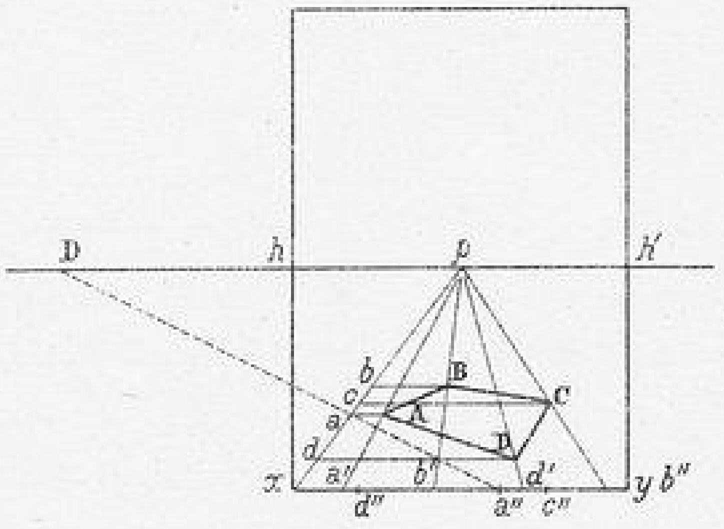
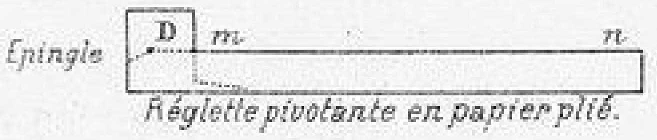


Fig. 114 bis.



telle sorte qu'à l'aide d'une épingle, elle puisse pivoter autour du point de distance, on joint Da", Db"....... et, par recoupements, on obtient sur l'échelle des profondeurs les points a, b, c, d. Il reste enfin, avec le T, à ramener, par des lignes de front, ces points sur leurs fuyantes respectives, en A, B, C, D (tableau).

Remarque : Ces tracés sont simples ; ils ne surchargent de lignes, ni l'épure ni le tableau ; cependant ils ne répondent pas encore complètement à ce qui a été annoncé au début. En effet : 1° le tableau est très petit et il faudrait après coup l'amplifier, 2° le point de distance D qui est un point de fuite auxiliaire, tombe très en dehors du cadre, puisque nous avons recommandé (§ 74, note (1)) de prendre la distance au moins égale à une fois et demie la largeur du tableau, ce qui n'a même pas été fait sur la figure 113, il serait ainsi ce que l'on nomme *inaccessible*.

Nous allons montrer, qu'en amplifiant directement le tableau non seulement on ne compliquera pas les constructions, mais encore on n'aura plus à se servir de points de fuite auxiliaires inaccessibles.

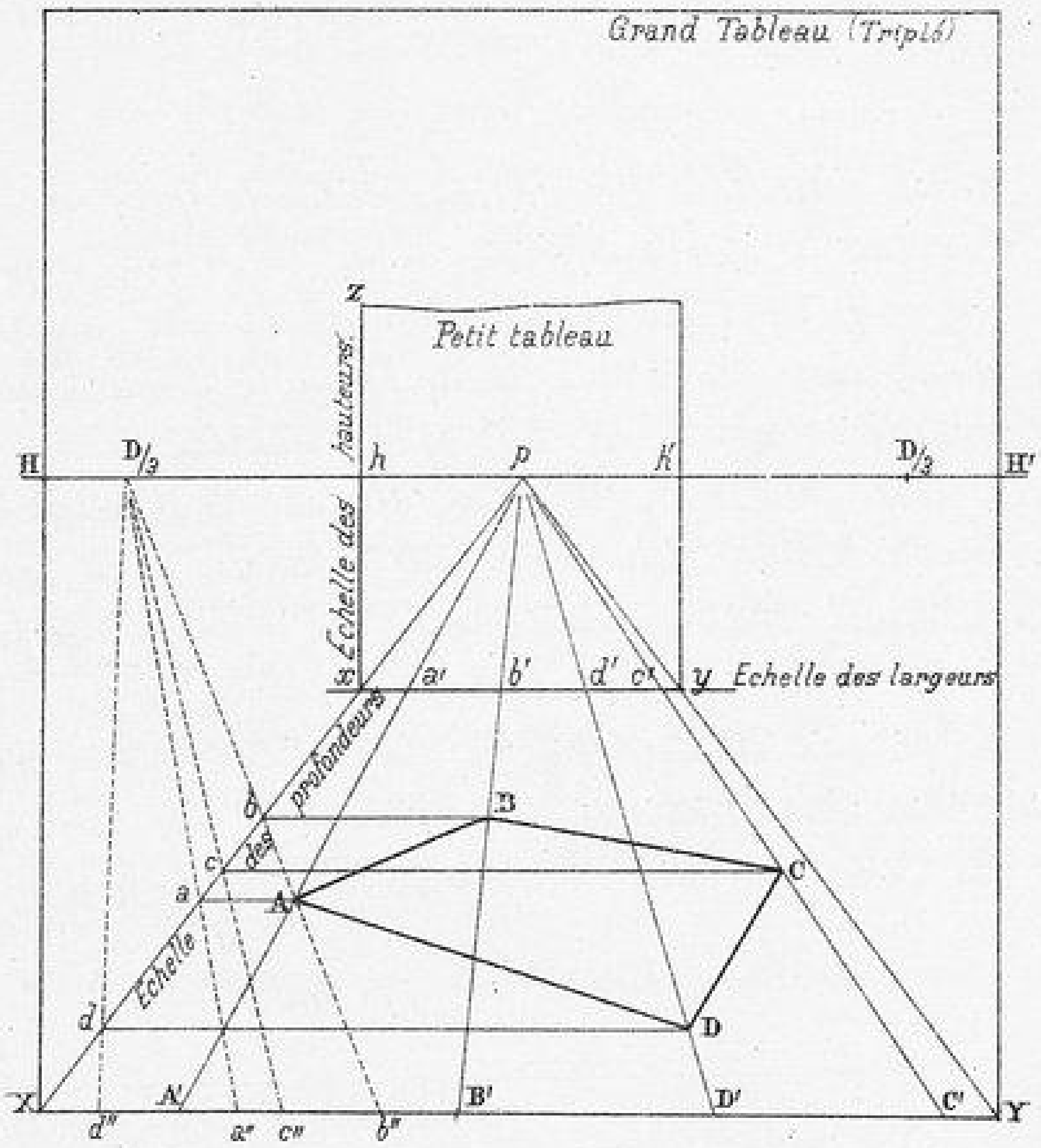
§ 80. – Même problème en amplifiant le tableau (Tableau triplé).

Je garde l'épure (fig. 113), mais je construis (fig. 115) un tableau qui sera, par exemple, 3 fois plus grand. Voici la meilleure manière d'opérer.

(a) *Le petit tableau et le grand tableau* – Je commence par dessiner, comme fig. 114, un tableau non amplifié. Nous l'appellerons le petit tableau, hh'xy. Puis joignant px et py, j'inscrirai

entre ces 2 fuyantes prolongées la base XY de mon *grand tableau*, de telle sorte qu'elle ait la largeur que je désire : Ici j'aurai XY = 3 fois x y.

Fig. 115.



La hauteur de l'horizon HX, sera donc égale à 3 fois la hauteur primitive h x.

Pour bien voir ces 2 tableaux, il faut imaginer que le petit tableau primitivement placé très loin et par suite apparaissant très petit, s'est rapproché en glissant sur les deux droites parallèles dans l'espace p x X et p y Y comme sur des rails, et en se grandissant jusqu'à apparaître 3 fois plus grand qu'il ne paraissait.

(b) *Mise en largeur*. — On fera comme tout à l'heure ; on portera les largeurs prises sur l'épure, en x a' b' c' sur la base du petit tableau. On mènera les fuyantes pa', pb', pc' et on aura en XA', B' C' sur la base du grand tableau les largeurs amplifiées dans le rapport voulu.

(c) *Mise en profondeur*. — L'échelle des profondeurs a toujours pour perspective X p. On prendra sur l'épure et avec la bande de papier les profondeurs x a, x b, x c ..... (Épure). On se gardera bien de les tripler, et on les reportera en largeur à partir de X, en X a'', b'', c''......, exactement comme tout à l'heure.

En réalité, on n'a donc là que les tiers des profondeurs.

Mais prenons aussi la distance p o (épure) et *sans l'amplifier*, reportons-la sur le tableau de P en $\frac{D}{3}$. Le point $\frac{D}{3}$ ainsi obtenu ne nous donnera en réalité que le point ⅓ de distance du grand tableau.

Enfin joignons les points a'', b'', c''........ au point $\frac{D}{3}$ nous obtenons avec l'échelle des profondeurs les mêmes recoupements a, b, c ...... que si nous avions triplé les profondeurs de l'épure et aussi triplé la distance.

En effet la ligne du tableau a'' $\frac{D}{3}$ est une ligne de resection ⅓ : On a donc, dans l'espace, a X = 3 fois X a'' et comme X a'' était 3 fois trop petit, X a, qui est 3 fois plus grand, est bien à la profondeur voulue.

On achève ensuite en menant les lignes de front, comme dans le cas précédent.

Remarques : 1° l'amplification n'a compliqué en rien les tracés. Elle n'a eu pour effet, heureux, que de ramener le point de fuite auxiliaire $\frac{D}{3}$ dans les limites du cadre ce qui est très important.

2° On aurait pu donner au tableau XY une grandeur quelconque, celle qui plairait. Le

rapport d'amplification pourrait être aussi compliqué que l'on voudrait, même incommensurable, les constructions seraient toujours aussi simples.

3° On a employé ici des fuyantes principales ; l'échelle des profondeurs était perpendiculaire au tableau. On va montrer, dans l'exemple suivant, l'avantage qu'il y aurait, dans certains cas, à se servir de profondeurs obliques, et des points de fuite accidentels qui correspondent à la direction de ces profondeurs obliques.

§ 81. – Perspective d'un plan régulier ne se présentant pas de front.

Le plus ordinairement lorsque l'on fait la perspective d'un édifice ou d'un fragment d'architecture (voir le plan d'escalier, fig. 116), les points sont distribués sur des directions déterminées que nous nommerons les *dominantes* du dessin. Souvent aussi il y a deux dominantes perpendiculaires entre elles et, comme on évite de donner des vues faites complètement sur l'angle, il y aura, presque toujours, une de ces dominantes dont le point de fuite sera accessible.

On prendra cette dominante comme direction des profondeurs obliques et on fera les tracés en se servant de ces profondeurs obliques comme nous venons de le faire avec les profondeurs principales.

Soit à mettre en perspective un plan d'escalier (fig. 116). Le tableau est en x y (épure). Comme *dominantes* je prends les lignes auxquelles répondent les lettres a, b, c, d, parce que leur point de fuite f est à peu près dans les limites du cadre. Je vais mettre en perspective les points

Fig. 116.

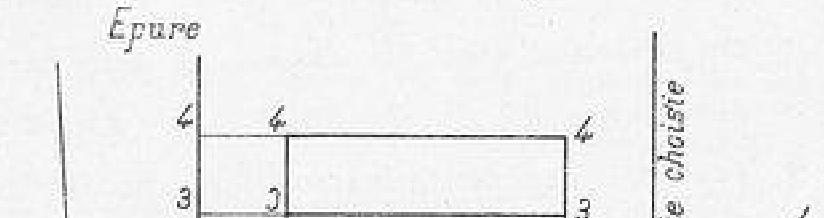
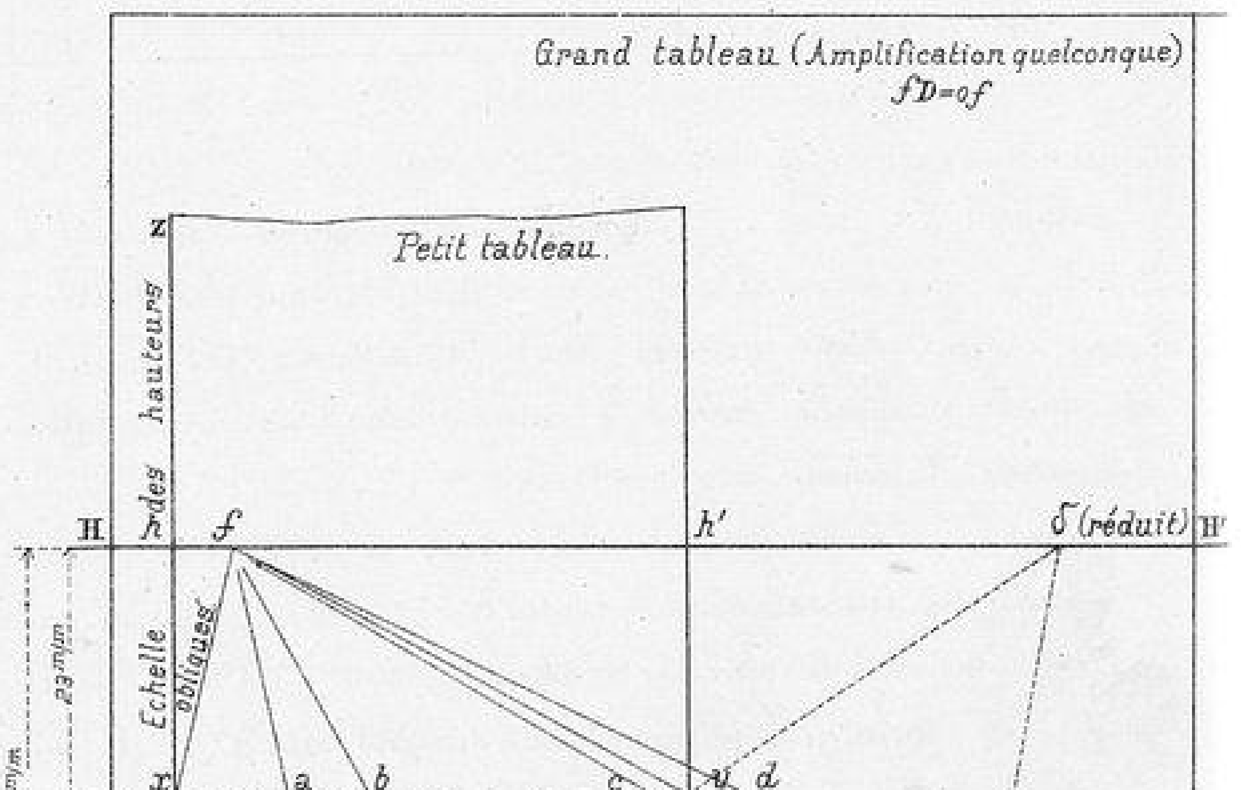


Fig. 116 bis.



1, 2, 3, 4 situés sur la ligne c.

J'abrége la description des opérations.

1º En hh'xy je construis le *petit tableau*, à la grandeur de celui de l'épure.

2º Je reporte f sur la ligne d'horizon; je joins fx, fy, et j'inscris en XY, entre ces lignes prolongées, mon *grand tableau* à la grandeur qui me plaît, ou qui m'est imposée par les dimensions de la toile. (Le rapport d'amplification ici est compliqué; il est $\frac{50}{23}$).

3º Sur une bande de papier je relève les largeurs de l'épure, xa, xb, xc, xd; je les reporte sur la base du petit tableau, et, menant les fuyantes fa, fb, fc ...... j'obtiens en A, B, C, D sur la base XY du grand tableau les largeurs amplifiées dans le rapport donné ($\frac{50}{23}$).

4º Je prends, au compas, sur l'épure, la distance oblique Of, et, (tableau) je la reporte de f en δ et δ, à droite et à gauche; mais surtout à droite, car le point de gauche serait trop en dehors du cadre.

J'ai ainsi les points accidentels de distance réduite de la direction f.

5º Avec une autre bande de papier je relève (épure) les profondeurs obliques a1, a2, a3, a4, et (tableau) je les reporte à gauche de A en A1', A2', etc.......

6º Avec une régle pivotante, je joins 1'δ, 2'δ etc........ et j'ai en 1, 2, 3, 4 sur la droite Af, les points cherchés.

7º Je fais de même pour les points 1, 2, 3, 4 situés sur la droite C; en remarquant que la bande de papier qui m'avait servi pour relever les profondeurs a1, a2, a3 ...... me sert encore pour les profondeurs c1, c2, c3 .... Il suffit de changer le point de repère a, et de lui substituer le point c.

Le reste du tracé se saisit facilement.

§ 82. – Résumé.

On voit que cet emploi du point de fuite accidentel des dominantes réduit au minimum les lignes de construction. S'il avait fallu se servir des fuyantes principales pour mettre en place les points 1, 2, 3, 4 .... nous eussions été amené à tracer au moins un nombre triple de lignes. Le tableau, lui-même, est aussi peu chargé que possible et les constructions sortent très peu en dehors du cadre.

Le *petit tableau*, joue ici un rôle très important. C'est, en réalité, un plan de front dont on connaît l'échelle qui est celle de l'épure géométrale.

Si l'épure est à l'échelle de $1/10$, toute figure du petit tableau se perspective aussi dans le grand, à l'échelle de $1/10$.

La base xy, du petit tableau prend le nom d'*échelle des largeurs*, parce que, en effet, nous y avons porté les largeurs à l'échelle qu'elles ont sur l'épure et qui nous est connue.

Le côté vertical xz, du petit tableau, se nommera l'*échelle des hauteurs*; pour une raison analogue, parceque nous y porterons les hauteurs à la même échelle que sur l'épure. Enfin Xf est la perspective de l'*échelle des profondeurs obliques*.

L'existence de ces 3 échelles fait quelquefois donner à la méthode que l'on vient d'exposer, le nom de *méthode des trois échelles*.

B. Perspective directe sur le géométral.

9e Leçon. — Dans les questions qui vont être traitées dans cette partie B, on supposera que les lignes principales à mettre en perspective ont été établies par les procédés indiqués ci-dessus, c'est-à-dire par les méthodes de perspective générale. Sur ces lignes, que nous supposerons justes, nous pouvons avoir à résoudre quelques problèmes de détail. Nous voulons les résoudre sans plus avoir recours à l'épure ; nous avons dit (§ 70) pourquoi nous voulions ne nous appuyer que sur les lignes perspectives déjà tracées sur le tableau ; il nous faut donc pour cela des méthodes particulières qui constituent les procédés dits : *de perspective directe, ou immédiate*.

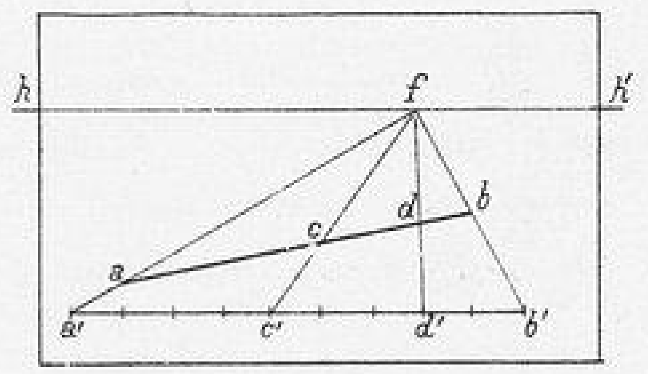
§ 83. — Problème 1. — *Partager une droite de front en parties égales ou qui soient entre elles dans un rapport donné.*

Puisque les rapports dans lesquels une ligne de front est divisée, se conservent en perspective, il suffit de diviser la perspective de cette droite en parties égales. (figure inutile).

§ 84. — Problème 2. — *Partager une ligne fuyante ab, en parties qui soient entre elles dans un rapport donné (fig. 117), (par exemple comme les nombres 4, 3 et 2).*

On joindra les deux points d'extrémité a et b à un point quelconque f de la ligne d'horizon. On inscrira une ligne de front a'b' entre ces deux fuyantes. — On divisera a'b' dans le rapport donné, aux points c' et d'. On mènera les fuyantes fc' - fd', et aux intersections avec la droite ab on aura aux points c et d les points demandés.

Fig. 117.

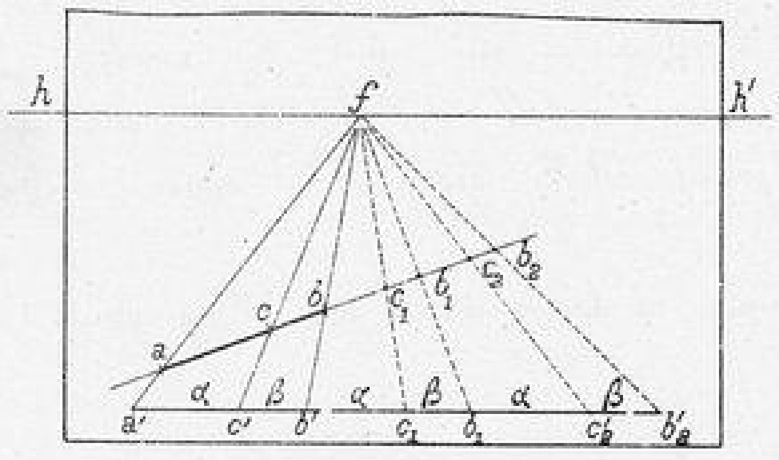


En effet, dans le géométral, les fuyantes fc' - fd'..... fb'..... sont parallèles. — Les deux sécantes ab et a'b' les recoupent en donnant des segments proportionnels. C.Q.F.D.

Nota. — Le point f n'a pas besoin d'être le point principal. Il suffit qu'il soit pris sur la ligne d'horizon.

§ 85. — Problème 3. — *Prolonger sur une droite du géométral une division amorcée sur cette ligne.*

Fig. 118.



Soit ab un premier fragment de droite du géométral divisé dans un rapport quelconque par le point c. On veut prolonger au-delà du point b, la division amorcée acb.

On mène les trois fuyantes quelconques fa - fb - fc. On les coupe par une ligne de front quelconque a'c'b'. Sur cette ligne de front on répète la division a'c'b' en $c_1 b'_1$ - $c_2 b_2$ .... autant de fois qu'on le désire. On mène les fuyantes par ces points, et l'on obtient par recoupements avec ab prolongée, les points demandés $c_1 b_1$ - $c_2 b_2$ .... etc.....

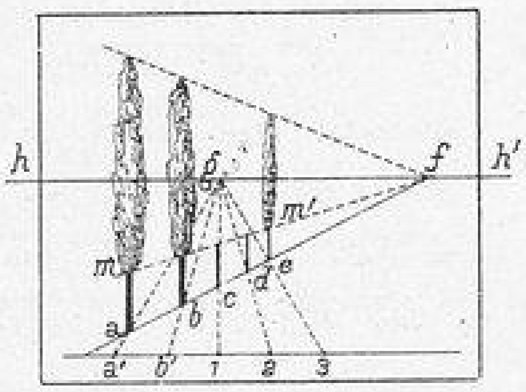
Problème 4. – Trouver le rapport exact dans lequel une droite ab est divisée par un point c. (Même figure) On mène les fuyantes fa – fb. fc. – On les coupe par une ligne de front a'c'b' et l'on obtient sur cette ligne le rapport exact : $\frac{a'c'}{c'b'}$

§ 86. – 1ère application. – Continuer, sur une route, un tracé d'arbres. (fig 119).

Ordinairement, ce problème se présente quand on dessine d'après nature.

Par exemple, sur une route horizontale fuyante abf (fig. 119), on a dessiné d'après nature les deux premiers arbres a, et b, d'une rangée et on veut en dessiner d'autres de manière à être certain qu'ils soient également espacés. – A cet effet : 1° On mène une ligne de front quelconque a'3 ; 2° On prend un point de fuite quelconque g sur l'horizon ; 3° On mène les fuyantes ga et gb répondant aux deux premiers arbres ; ce qui donne sur la ligne de front un premier segment a'b' ; 4° On reporte ce segment en 1, 2, 3, autant de fois que l'on veut d'arbres à la suite, et 5° joignant 1g, 2g, 3g on a, par recoupement en c, d, e, les pieds des arbres demandés.

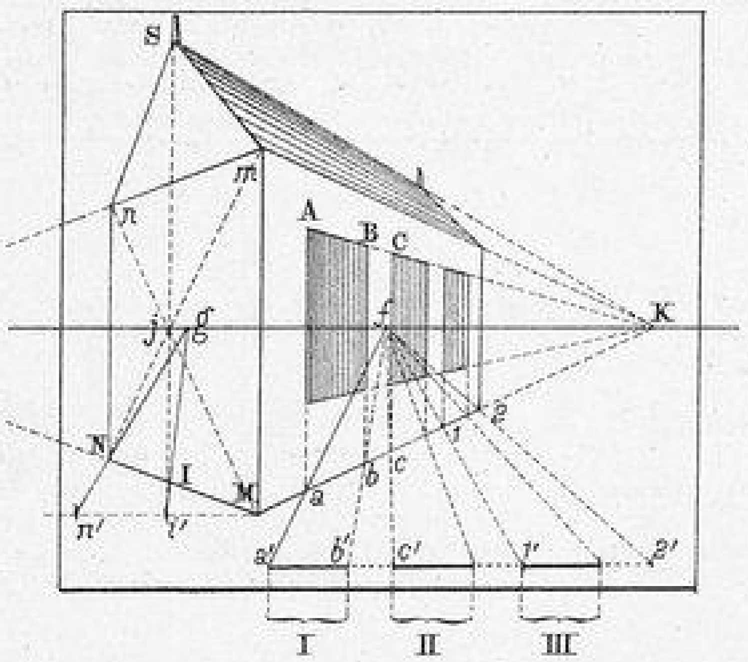
Fig. 119.



2e application. – Continuer sur un mur (fig 120), un tracé de fenêtres et de trumeaux amorcé.

La 1ère fenêtre est AB ; le trumeau qui vient ensuite est BC (fig. 120). On demande de dessiner à la suite deux fenêtres et deux trumeaux identiques.

Fig. 120.



Il est inutile d'expliquer le tracé indiqué en a'b'1'2' sur une ligne de front : Il est analogue au précédent.

La même figure montre comment sur la gauche on a trouvé la verticale SIJ qui, passant par l'axe du mur de gauche, contient le sommet S du pignon.

On voit deux méthodes indiquées :

Dans la première on a cherché en I comme ci-dessus le milieu perspectif de la fuyante MN ;

Dans la seconde on a mené les diagonales mN et nM du rectangle de l'espace mnNM et leur croisement J donne un point de l'axe cherché.

Nota. – Les deux droites mn et MN doivent fuir à un même point inaccessible de la ligne d'horizon (Problème résolu au paragraphe suivant).

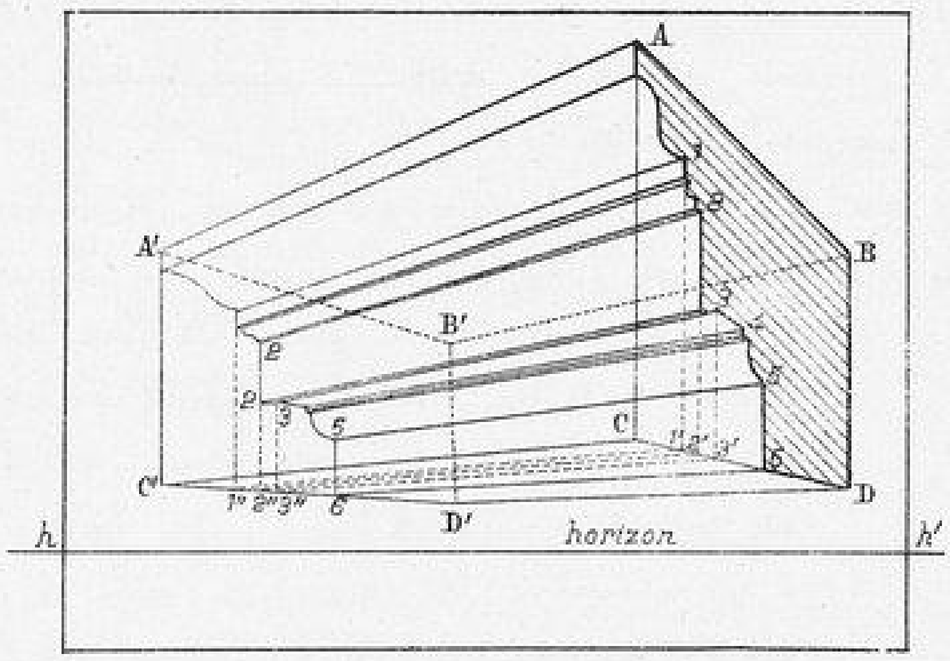
§ 87. – Mener des fuyantes dont le point de fuite est inaccessible.

Pour fixer les idées, prenons un exemple (fig. 121). Ce que nous allons dire s'applique aussi

bien à des horizontales du géométral, qu'à des horizontales quelconques hors du géométral.

Supposons que nous ayons mis en place, soit par les méthodes exactes, soit par l'observation directe, en dessinant d'après nature, la masse d'un fragment de corniche. Son épannelage(1), qui est ici un parallélipipède rectangle parfaitement assuré en ABCD, A'B'C'D' et nous avons seulement dessiné la perspective du profil A1.2.3.4.5........etc. dans la face antérieure ABCD de la masse.

Fig. 121.



Nous pouvons, et même nous devons, à partir de ce moment achever le dessin, presque sans regarder le modèle qui pose ou sans revenir à l'épure géométrale.

Il nous faut 1° par les points 1.2.3.... du profil déjà dessiné, mener des fuyantes qui convergent avec AA' ou BB' en un point de fuite très souvent inaccessible, situé sur la ligne de l'horizon, et 2° déduire le profil, inconnu dans la face A'B'C'D', du profil connu dans la face ABCD.

Occupons-nous immédiatement de cette seconde partie, et supposons que nous sachions mener les fuyantes; nous indiquerons tout à l'heure divers moyens pour cela: 1° Je projetterai en 1'2'3'..... les points 1.2.3.4...... du profil connu sur la base CD du rectangle d'épannelage qui est en avant; 2° je ramènerai, par des fuyantes, ces points en 1",2",3"..... sur la base C'D' de l'autre rectangle, 3° je remonterai de ces points, par des verticales, en 1,2,3..... sur les fuyantes déjà tracées dans l'espace, et 4° je ferai passer le second profil par ces points.

N'insistons pas sur cette partie de la question, car nous donnerons plus loin un moyen très précis et très rapide pour tracer perspectivement, dans un rectangle d'épannelage connu, un profil donné de moulures. (Voir plus loin emploi des échelles divergentes, perspective des moulures).

Revenons au tracé des fuyantes.

§ 88. – Procédé approximatif (fig. 122). à employer surtout quand on dessine d'après nature.

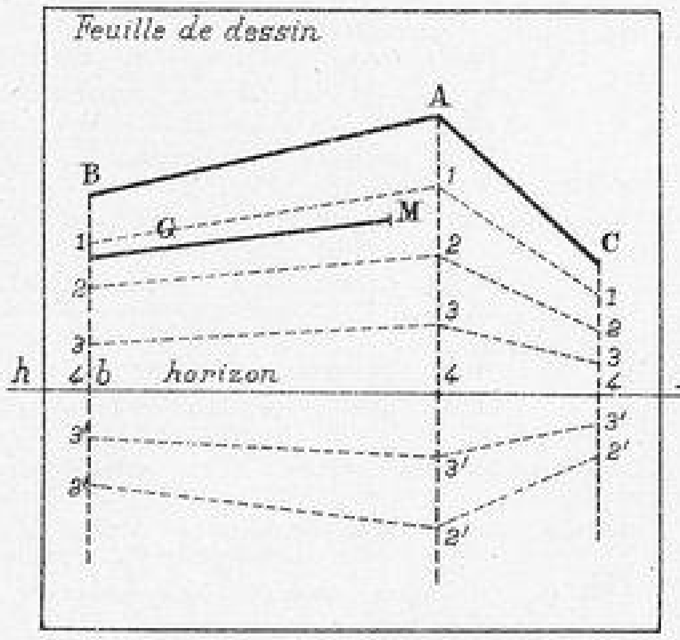
On voit (fig. 122) sur la feuille de dessin, 1° la ligne d'horizon hh' qu'il ne faut jamais oublier d'indiquer, avant toute autre quand on dessine d'après nature et 2° une ligne fuyante AB, qui a été établie par l'observation ou autrement, mais que nous admettons comme étant parfaitement juste.

---

(1) On nomme épannelage, en construction, la masse de pierre simplement dégrossie, mais en général taillée sous forme d'un solide géométrique simple, dans laquelle le sculpteur viendra plus tard faire apparaître une moulure ou une sculpture: Nous devons aussi lorsque nous dessinons un objet en relief un peu compliqué, imaginer des sortes d'épannelages simples (ce que les peintres appellent les masses), serrant d'aussi près que possible cet objet, mais plus faciles que lui à voir et à mettre en perspective soit par l'observation directe soit par la perspective générale.

Imaginons que l'on prévoie un grand nombre de fuyantes à faire passer par le point de fuite inaccessible, de AB. On s'y préparera en exécutant d'abord, très légèrement, le réseau de lignes indiqué en 11, 22, 33 .... et obtenu de la manière suivante :

Fig. 122.



1° On mène la verticale Aa, et on la partage à partir de l'horizon en 4, ou 6 parties égales ; (peu importe le nombre)(1)

2° On fait de même pour la verticale Bb et on joint ensuite les points de division.

On prolonge même les divisions de l'autre côté de la ligne d'horizon, en 3', 2'...... si cela est nécessaire.

Ces lignes fuient, évidemment au point inaccessible.

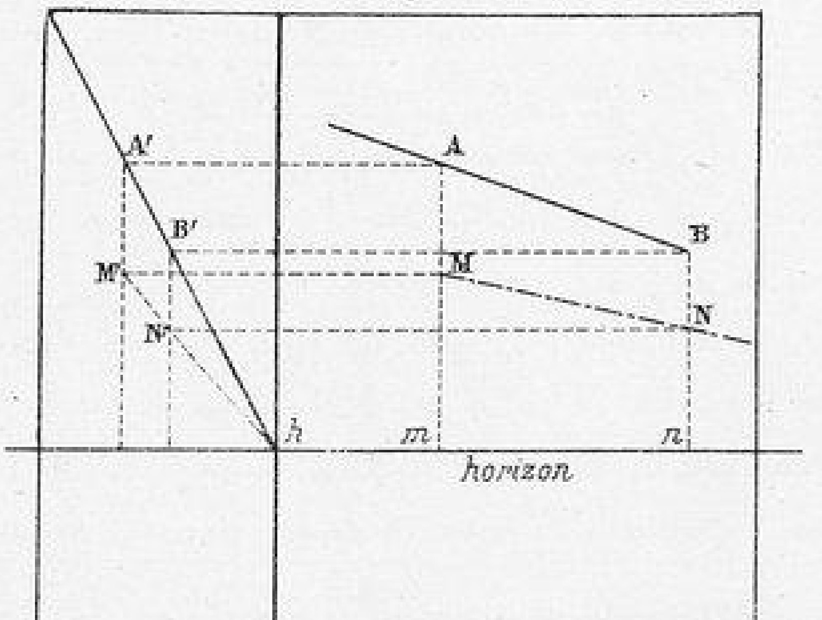
3° Si, maintenant, on a, par un point M, qui n'est pas sur une des lignes précédentes, à mener une fuyante MG, on la trace facilement alors en se guidant sur les deux lignes du réseau qui sont aux environs. On fait en sorte que la ligne MG que l'on trace, partage dans un rapport constant, l'intervalle des lignes du réseau qui lui servent de guide. - Le coup d'œil nous suffit pour cela.

Dans beaucoup de dessins nous aurons des fuyantes dans un sens AB, et d'autres dans un autre sens AC. On appliquera le procédé dans les deux cas.

Le réseau auxiliaire sera, bien entendu, tracé très légèrement au fusain et effacé une fois le dessin terminé.

§ 89. - Procédé par lignes proportionnelles (Exact).

Fig. 123.



Même problème : Mener par M, une parallèle (dans l'espace) à la droite horizontale déjà tracée AB (fig. 123).

Je mène la droite AMm perpendiculaire sur hh'. Sur une autre verticale Bn, je cherche (par les méthodes connues de géométrie) un point N qui la partage dans le même rapport $\frac{AM}{Mm} = \frac{BN}{Nn}$, et je joins ensuite M et N.

Nota - Dans le cas où l'on se serait servi d'un mur latéral fuyant pour la mise en hauteur, comme nous l'indiquerons plus loin, la figure 123 montre comment cette opération peut se faire en

(1) La division en 2.4.8..... parties égales est plus commode, quand on dessine d'après nature et sans compas, parce qu'elle peut se faire à l'aide d'une bande de papier que l'on replie 2.4 ou 8 fois sur elle-même.

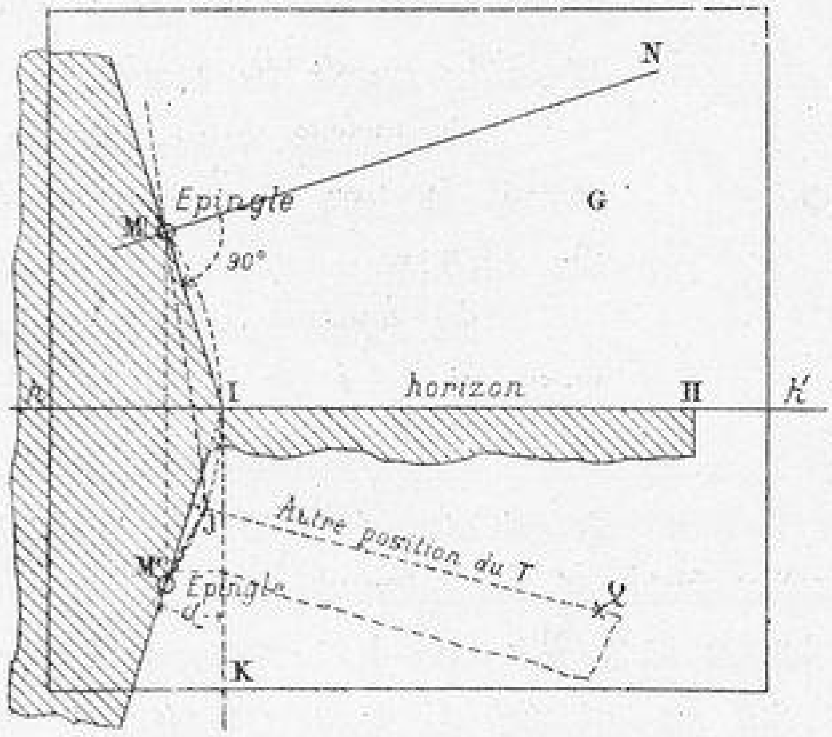
utilisant les fuyantes A'h – M'h tracées sur ce mur.

§ 90. – Emploi du T brisé ou règle à 3 branches.

Soit (fig. 124) à résoudre encore le même problème :

MN est une fuyante déjà tracée ; on veut mener par des points isolés, par le point G par exemple, des lignes horizontales ayant même point de fuite inaccessible.

Fig. 124.



Je fais d'abord la construction suivante :

1° Je prends le point M', symétrique de M par rapport à la ligne d'horizon.

2° Je mène MI perpendiculaire sur MN qui est donné et je joins IM'.

Cela fait, je découpe dans une feuille de carton ou de papier très fort, une sorte de règle triple dont une branche sera la ligne d'horizon IH et les deux autres branches les droites MI et M'I. Cela nous donne une espèce de T dont les lignes de tête IM et IM' ne sont pas perpendiculaires sur la tige IH.

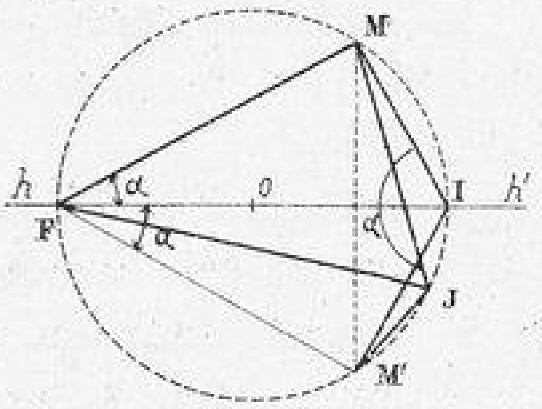
(Une teinte indique sur la figure 22, la partie du papier qui est conservée).

Cela posé : je plante une épingle bien verticalement dans le bois de la planche à chacun des points M et M', et si je fais glisser les 2 branches MI et M'I sur ces épingles, la 3e branche IH, prendra différentes positions, mais toutes convergentes au point de fuite inaccessible de MN.

Ce fait est facile à démontrer par la géométrie, de la manière suivante :

Démonstration (fig. 125). En effet : l'angle MIM' = α est constant par construction. Par conséquent lorsque dans la position MJM', ses deux côtés JM et JM' passeront par les deux points fixes M et M', le sommet J se trouvera toujours sur un segment capable de l'angle α, c'est à dire sur l'arc de cercle MIM'. Mais, les deux angles FMI et FM'I étant droits, ce cercle passe aussi par le point F (accessible ou non) qui est le point où MF rencontrerait hh'.

Fig. 125.



Cela posé : IF est la bissectrice de l'angle MIM' puisque les 3 droites MI, IF et M'I forment une figure de forme invariable ; donc, puisque l'angle MJM' est inscrit dans l'arc de circonférence MJM', il faut que la bissectrice JF passe toujours par le milieu de l'arc opposé, c'est à dire par le point F, c. q. f. d.

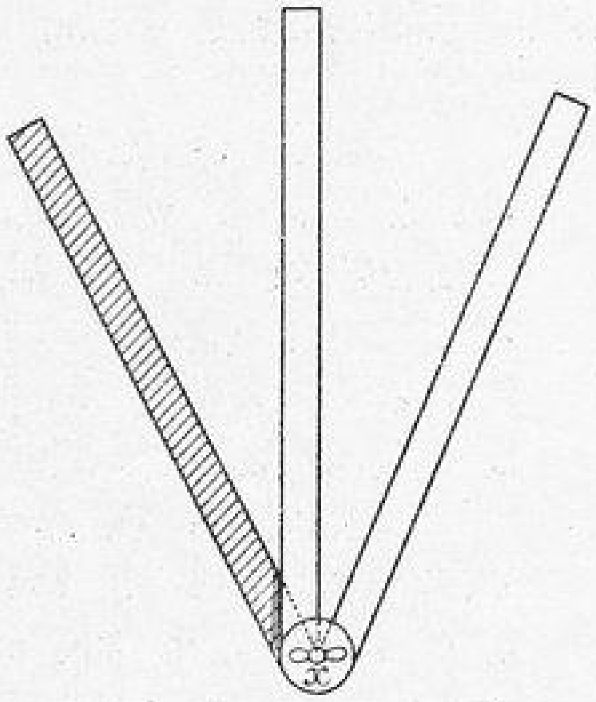
Nota : Nous appellerons angle α du Té brisé, l'angle (fig. 124) que fait la tête oblique IM ou IM' avec la normale IK à la règle IH.

On se servira donc de cette règle à 3 branches aussi facilement que d'un T, et si l'on a une fuyante à faire passer par un point quelconque G de l'épure, on trouvera rapidement

la position à donner à la règle triple pour que la branche IH vienne passer par ce point G.

Nota. – Pratiquement on devra faire en sorte que la première fuyante MN qui sert à découper la règle soit de toutes celles qu'il faut mener, celle qui s'écarte le plus de la ligne d'horizon.

Fig. 126.



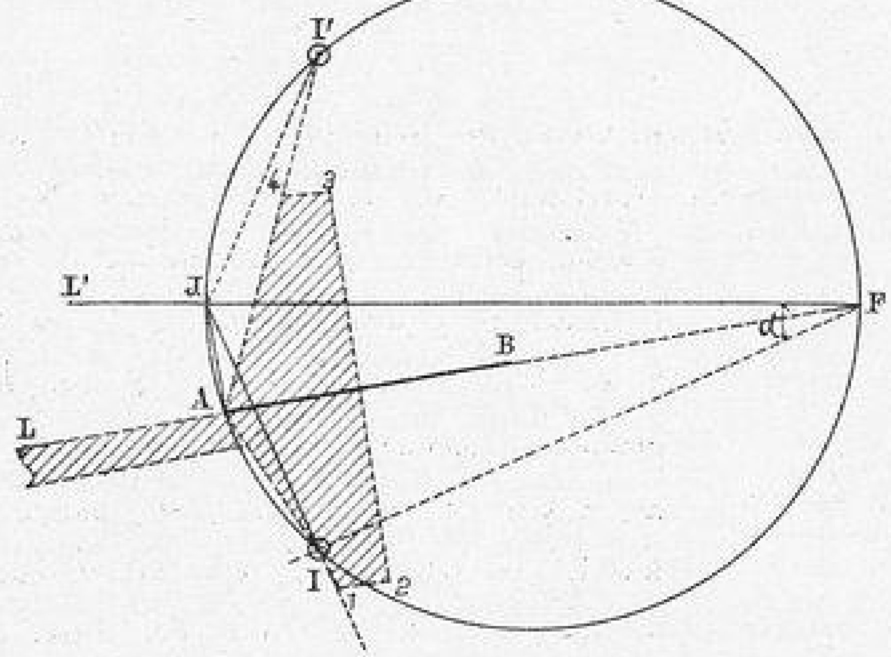
On a construit, en bois, une règle à trois branches mobiles, pouvant s'appliquer à tous les cas (fig. 126). Un écrou (x) permet d'arrêter les branches à l'écartement voulu.

Nota. – L'emploi de cet instrument est tellement avantageux que nous avons cherché à le généraliser dans la pratique : – La règle à 3 branches (fig. 126) est assez encombrante ; les 3 règles ne sont pas dans un même plan ce qui rend le tracé des lignes au crayon difficile à faire exactement.

Le Té brisé au contraire s'applique très exactement sur la planche, comme une équerre. Il est très facile de le guider par deux épingles. – Le seul inconvénient serait d'être obligé d'en construire un pour chaque cas particulier. – Nous allons montrer comment un seul Té brisé, quel que soit son angle peut servir dans tous les cas ; il suffit de savoir placer convenablement les épingles.

§ 91. – Problème 1. – Étant donné une droite AB (fig. 127) fuyant à un point inaccessible F de la ligne d'horizon, placer les épingles de manière à mener des fuyantes à ce point F, en se servant d'un Té brisé déterminé (d'angle α).

Fig. 127.



Solution: En se reportant à la démonstration (fig. 125) on voit que s'il était possible de connaître une droite IF, passant par le point de fuite inaccessible F en faisant avec l'horizon l'angle α, un point quelconque I de cette droite et son symétrique I' pourraient être pris pour emplacement des épingles.

Pour trouver cette droite IF, ou simplement un de ses points, d'un point J quelconque de l'horizon abaissons une perpendiculaire JA sur la première droite donnée AB. Abaissons aussi la perpendiculaire JI sur la direction IF, ce qui se fera en plaçant la tige du Té en JL' sur l'horizon, la tête prendra naturellement la direction JI.

Mais A et I sont deux positions du sommet du Té ; par conséquent, plaçons la tige en AL sur le prolongement de AB, et la tête prendra naturellement la direction AI qui par recoupement avec JI, donnera l'épingle I.

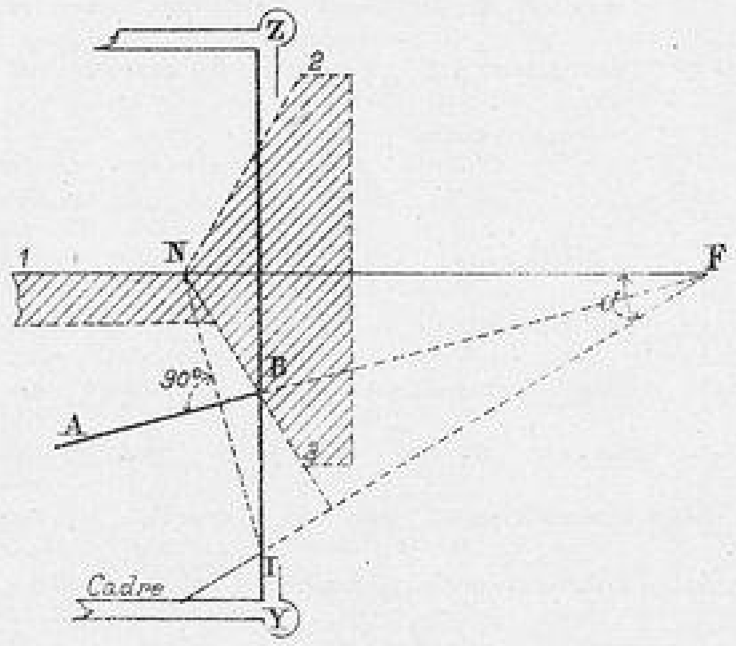
L'autre épingle I' se placera symétriquement par rapport à l'horizon.

§ 92. – Problème 2. – Utile surtout aux peintres qui se servent de toiles fixées sur chassis.

Pour les peintres, il est impossible de fixer des épingles dans la toile ; ils ne peuvent les planter que sur le bois des chassis ; c'est à dire sur les lignes formant le cadre du tableau.

Pour eux le problème se pose ainsi :

Fig. 128.



Enoncé : AB (fig. 128) étant une fuyante, dont le point de fuite F sur l'horizon est inaccessible. YZ étant le bord vertical du tableau, trouver en I la position de l'épingle permettant d'utiliser pour tracer des fuyantes au point F un Té brisé d'angle donné α.

Solution : 1° Au point B où la droite donnée AB rencontre le bord vertical YZ, mener en se servant du Té brisé placé comme l'indique 1N23, une droite NB faisant avec l'horizon le complément de l'angle α.

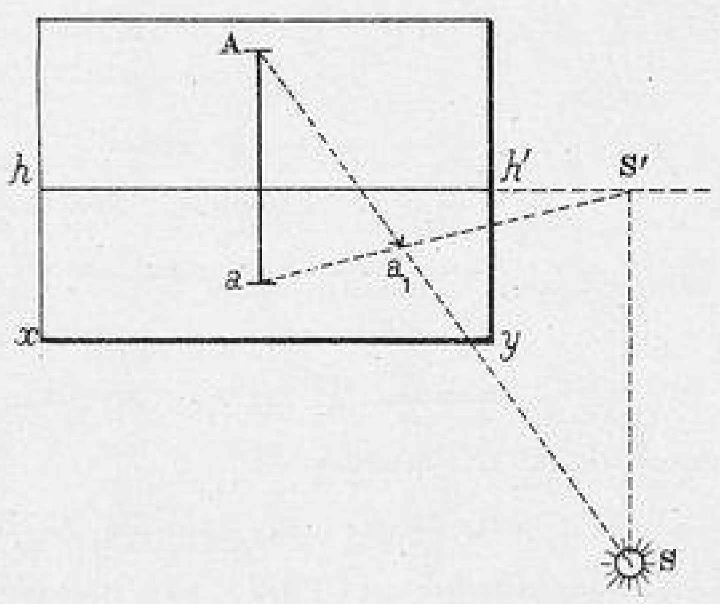
2° Du point N où cette ligne rencontre l'horizon abaisser NI perpendiculaire sur AB. – Le point I où cette droite rencontre le cadre est la position de la 1ère épingle. L'autre I' non indiquée sur la figure, sera symétrique de I par rapport à l'horizon.

Pour démontrer la justesse de la construction il suffit de prouver que IF est perpendiculaire sur NB et par conséquent inclinée à l'angle α sur l'horizon. En effet : dans le triangle NIF, la droite IB est perpendiculaire sur le côté NF ; FB est perpendiculaire sur le côté NI par construction et comme dans un triangle les trois hauteurs passent par un même point, la droite NB est la troisième hauteur et est perpendiculaire sur IF, c.q.f.d.

§ 93. – Problème 3. – Utile dans les questions de perspective des ombres au soleil.

Nous verrons plus loin, quand nous traiterons des ombres en perspective, que pour avoir (fig. 129) l'ombre porté a_1 par un point A de l'espace sur le géométral, il faut 1° joindre le point A de l'espace à la perspective S du soleil dans l'espace (S est ordinairement une perspective virtuelle) ; 2° joindre le point a, projection de A sur le géométral, au point S', projection du soleil sur le géométral, (S' est sur l'horizon et à plomb de S,) et le point de rencontre des deux droites, l'une Aa, rayon lumineux dans l'espace, l'autre aa_1 projection de ce rayon sur le géométral, donne en aa_1 l'ombre portée par A sur le géométral.

Fig. 129.

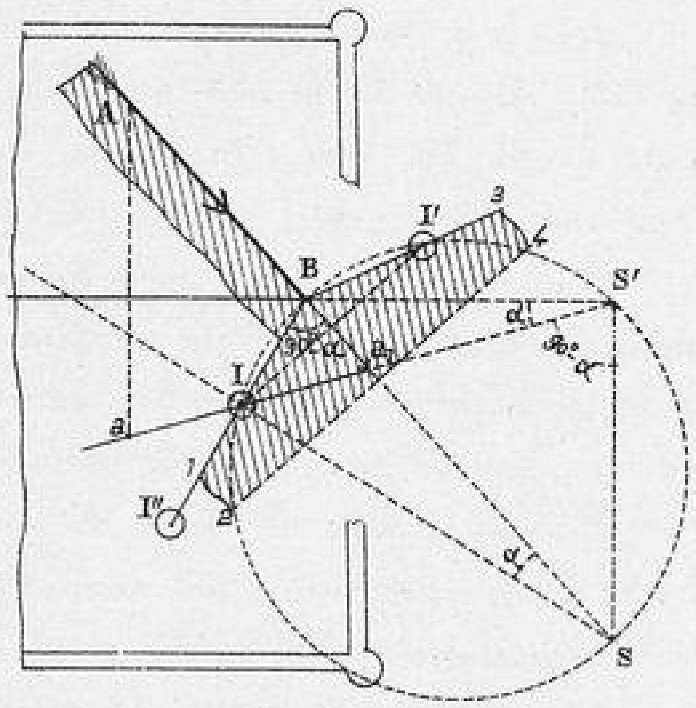


Il faudra répéter cette construction autant de fois qu'il y aura de points ; or, le plus souvent, S' sera inaccessible sur la ligne d'horizon et à plus forte raison S.

Cherchons donc à placer les épingles pour mener toutes ces fuyantes en se servant d'un té brisé d'angle donné α (fig. 130).

1° Pour les lignes telles que aa_1S' dont le point de fuite est sur l'horizon, la question est résolue (problèmes 1 et 2).

Fig. 130.



2° Pour les rayons tels que AB qui fuient en S, prenons en B l'intersection de celui que l'on connaît avec la ligne d'horizon. Supposons en outre que le rayon projeté aa_1 fasse avec la ligne d'horizon l'angle α du té brisé : s'il n'en était pas ainsi on le mènerait (voir problème 1).

Par le point B, en nous servant du té brisé placé comme l'indique 1234, menons une droite BI faisant avec AB un angle complémentaire de l'angle α. Soit I son point de rencontre avec aa_1. Les quatre points IBS et S' sont sur une même circonférence à cause de l'égalité des angles IBS et IS'S. Donc l'angle ISB est égal à l'angle IS'B et par conséquent égal à α.

En piquant une épingle en I et l'autre en I' symétrique de I par rapport à AB, on pourra se servir du té brisé.

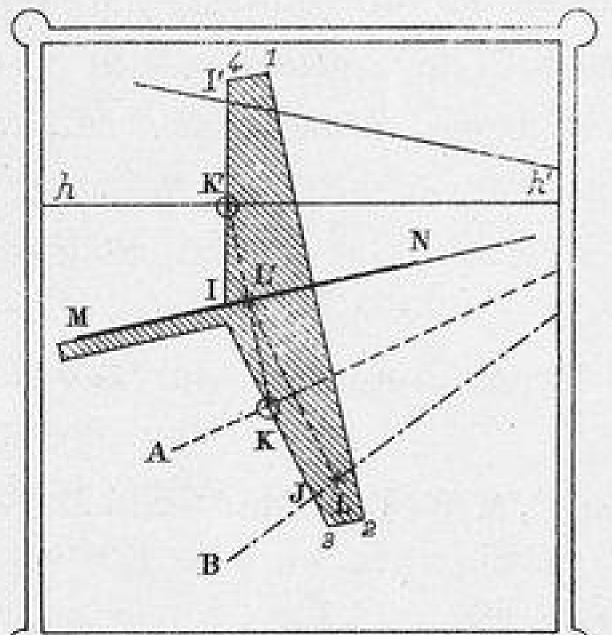
On pourrait encore, puisque l'angle BIS est droit, placer une première épingle en B, et une autre au point I'' symétrique de B, par rapport à IS.

§ 94. – Problème 4. – Changer la position des épingles, dans le courant d'une opération.

On reconnaît en expérimentant le té brisé, que les épingles limitent assez vite le champ des opérations.

Soient I et I' les épingles dans la première position (fig. 131).

Fig. 131.



Lorsque le té aura pris la position 1234 et même un peu avant, l'épingle I' l'arrêtera et il serait impossible de mener des fuyantes telles que AK, situées au-dessous de MI.

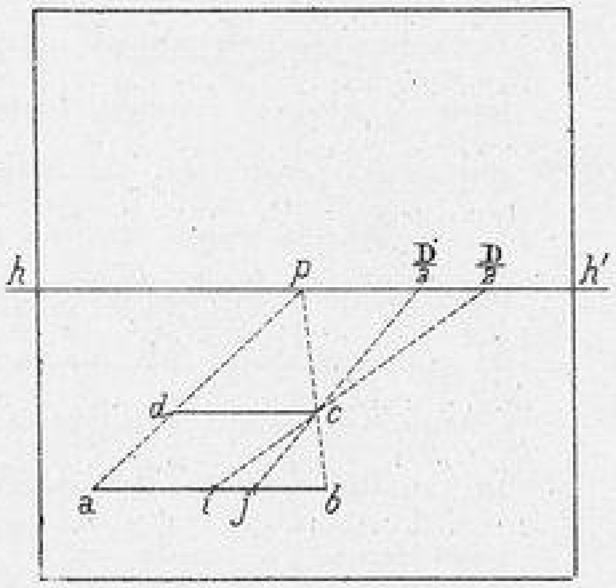
Prenons alors pour pied de l'épingle un point quelconque K' de l'horizon, et plaçons une autre épingle au point K symétrique de K' par rapport à MN, et ainsi de suite ; après K' et K nous prendrons L' et L ou bien encore I et J. On pourra reculer ainsi autant que l'on voudra la limite de l'emploi du té brisé.

Remarque. – Les problèmes précédents ne nécessitent pas la connaissance du point de fuite ni de distance principaux. Ils ont donc leur solution indépendante de la position du spectateur. Il n'en sera pas de même de ceux qui vont suivre.

Problèmes de perspective directe
exigeant la connaissance des points principaux de fuite et de distance.

§ 95. – Problème 1. – Construire un carré sur une droite de front ab comme côté.

Fig. 132.



Soit p le point principal, et $\frac{D}{2}$ le point de demi-distance (fig. 132). Menons les fuyantes principales ap – bp. Ces droites seront les côtés du carré. Prenons le milieu i de ab, et joignons le au point $\frac{D}{2}$.

Nous savons que cette droite fuyant au point de demi-distance intercepte sur la ligne de front ab, un segment ib qui est la moitié du segment bc intercepté sur la fuyante principale. On a donc dans l'espace bc = 2 cd et bc = ab.

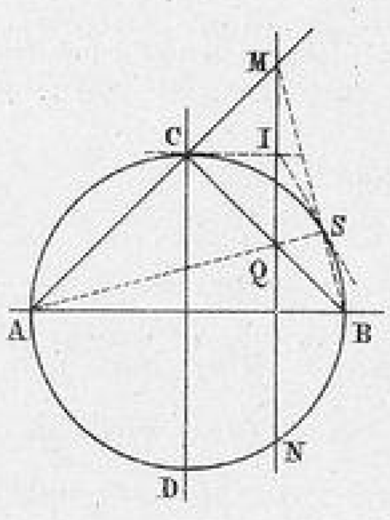
Menons ensuite la ligne de front cd, et nous aurons en abcd la perspective d'un carré.

Remarque. – Si l'on avait à sa disposition le point $\frac{1}{3}$D (tiers de distance) on l'aurait joint au point j situé au tiers de ab (à généraliser pour tous les cas de distance réduite).

§ 96. – Perspective du cercle. – Problème. – Sur une droite de front, ab, comme diamètre, construire un cercle.

1ère Méthode, – fondée sur les remarques suivantes:

Fig. 133.



Soit AB, CD (fig. 133), 2 diamètres à angle droit d'un cercle.

Menons une perpendiculaire quelconque MN sur le diamètre AB. Menons les lignes à 45° AC et BC. Prenons les intersections M et Q avec la ligne MN – Joignons AQ et BM; ces deux droites se rencontrent en un point S, qui appartient au cercle. (Facile à démontrer en considérant les 3 droites PQ – AQ – BQ comme les trois hauteurs d'un même triangle APB, qui, on le sait, se rencontrent en un même point).

De plus, si l'on mène l'horizontale CI et si l'on joint IS cette dernière droite est tangente au cercle.

On le démontre en prouvant que CI = IS et comme CI est une tangente, IS le sera aussi comme étant égal à CI.

En effet: CI = IM = IQ puisque les lignes CM et CQ sont inclinées à 45°; donc I est le milieu de MQ.

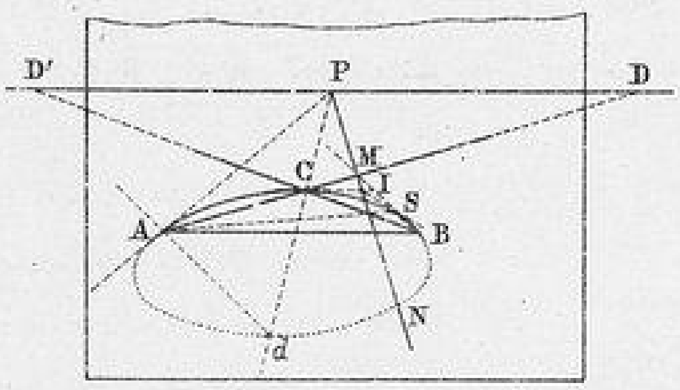
L'angle MSQ est droit, donc IS = IQ = IC, ce qu'il fallait démontrer.

On voit immédiatement l'application de ce qui précède à la mise en perspective d'un cercle (fig. 134).

Les lignes à 45° AC, BD, fuient aux deux points de distance D et D'. – Les lignes parallèles

à AB, restent de front.

Fig. 134.



Les lignes perpendiculaires à AB, fuient au point principal P, etc .....

L'épure perspective (fig. 129) est la traduction évidente de la figure géométrale (fig. 128).

Malgré sa simplicité apparente, cette méthode n'est pas très praticable; elle force à se servir des points D et D' non réduits; or ces points sont presque toujours inaccessibles.

§ 97. – 2e Méthode. – Applicable lorsque, le cercle étant assez petit, il suffira, pour le déterminer, d'en posséder huit points bien choisis.

On remarquera, sur le cercle en vraie grandeur, fig. 135, que les meilleurs points pour le déterminer sont les points milieux ABII et les points de diagonale V.V, W.W (voir 1re partie, ombres du cercle).

Soit sur le tableau (fig. 136) le diamètre de front donné par sa perspective AB. Soit p le point principal et $\frac{D}{3}$ le point tiers de distance. 1° Je prends en S le tiers du rayon OB, je joins S$\frac{D}{3}$ et, par prolongement et recoupement, j'obtiens en I l'extrémité du rayon OI; 2° Une construction analogue me donne le point I'. J'ai donc en MM, NN la perspective du carré circonscrit; 3° Je mène les diagonales et je les

Fig. 135.

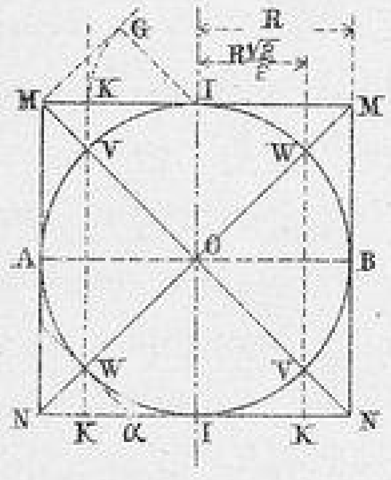
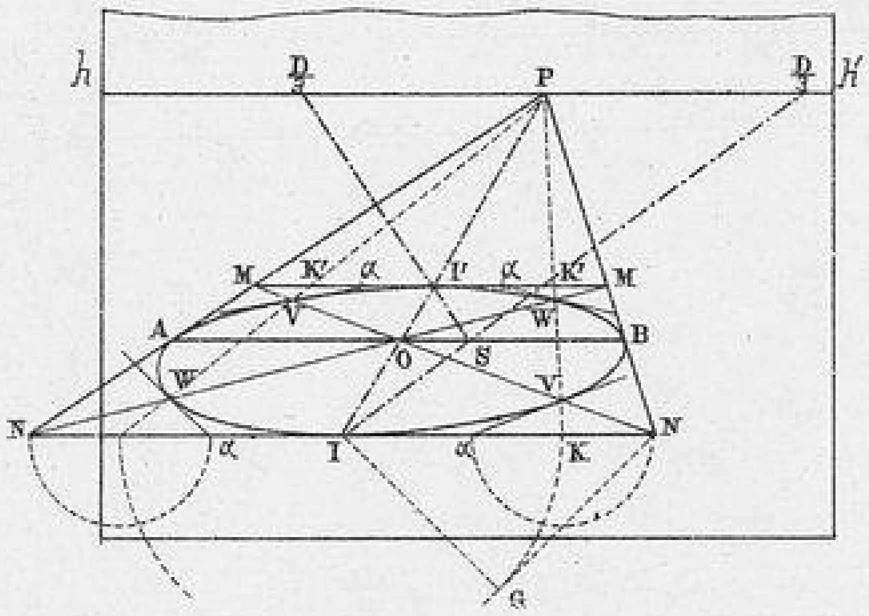


Fig. 136.



partage, perspectivement, dans le rapport de 1 à $\sqrt{2}$, ce qui me donne les points de diagonale.

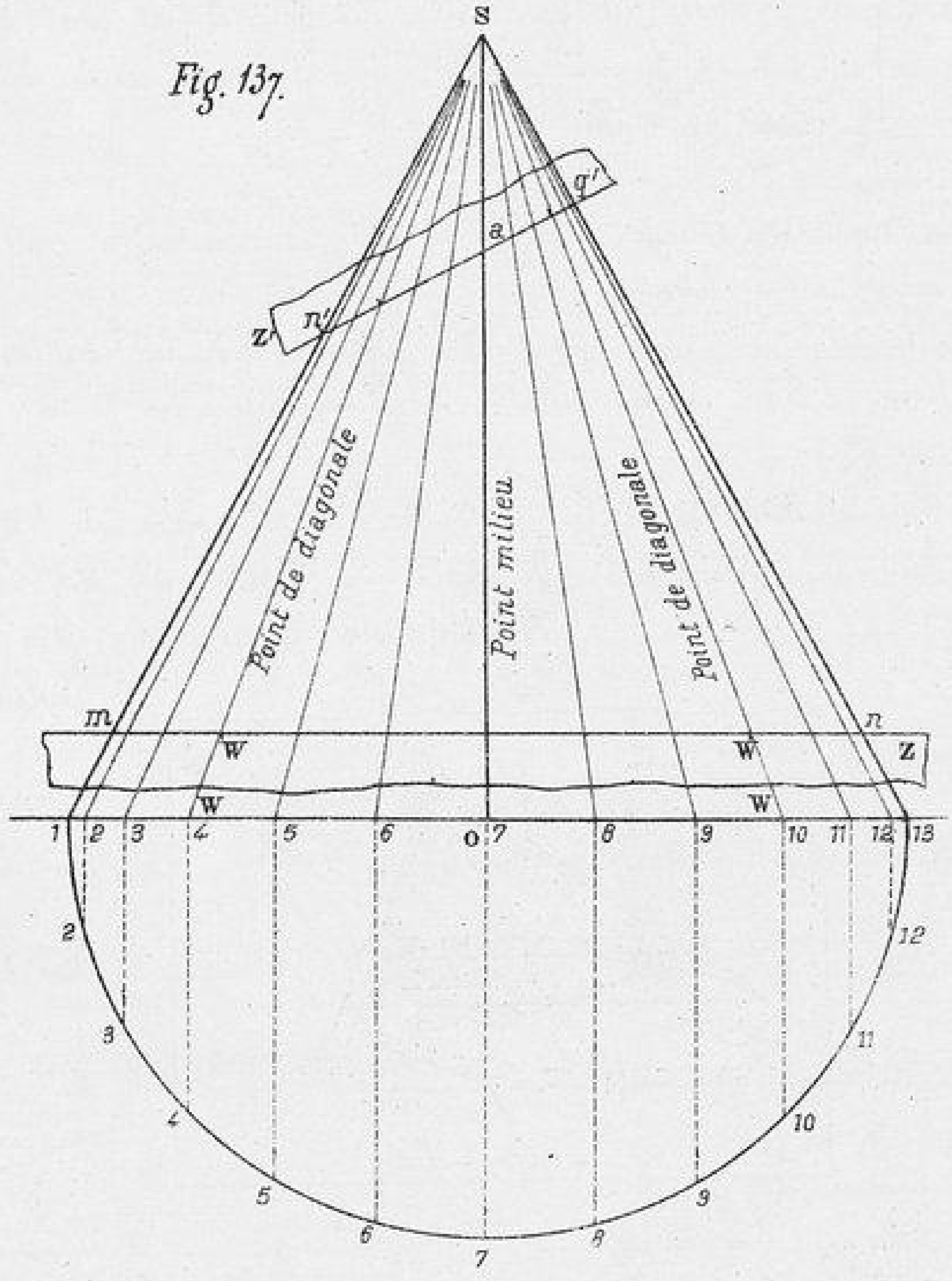
Ce partage se fera en partageant rigoureusement au point K, le demi-côté de front IN, ou le demi-rayon OB dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (sensiblement 0,7) et menant la fuyante principale KWWK'.

Nous avons donné à l'occasion de l'ombre du cercle, une construction simple pour faire ce partage.

Tangentes aux points de diagonale W,W,V,V. – Sur le cercle géométral (fig. 135) on voit que cette tangente Vα, détache sur le côté du carré un segment Kα = KN. – On prendra donc sur le tableau (fig. 136) Kα = KN et on aura en KV la tangente. On fera la même construction pour les autres points de diagonale.

§ 98.– 3e Méthode: Par Echelles. applicable surtout lorsqu'il faut déterminer rigoureusement sur le cercle des points équidistants, en nombre déterminé. On commencera par construire, comme ci-dessus, le carré circonscrit au cercle. Soit m n p q (Tableau fig. 138) ce carré en perspective. - Cela fait, exécutons sur une feuille à part, et une fois pour toutes, la construction suivante (fig. 137).

Fig. 137.



(a) O est un cercle ou, ce qui suffit, un demi-cercle quelconque. On l'a divisé en autant de parties égales qu'il en est demandé, 24 par exemple. - (Cette division par 24 est utile pour les cannelures des colonnes, en architecture; n'ayant pris que la moitié du cercle nous ne l'avons divisé qu'en 12 parties égales); Prenons au-dessus du diamètre un point S. quelconque que nous nommerons le sommet de l'échelle.

(b) On a projeté les points de division 1.2.3...... sur le diamètre, en 1,2,3,4....., et par ces points on a mené des droites S1, S2, S3...... convergeant au point S qui constituent ce que nous nommerons une échelle circulaire divergente, que l'on garde pour s'en servir dans la suite, dans de très nombreuses occasions, comme on le verra plus tard.

Il est évident, que si sur les côtés d'un carré nous portons des divisions proportionnelles à celles de notre echelle comptées sur des parallèles à sa base, et si nous menons par les points de division des parallèles aux côtés du carré, nous aurons, par recoupements des points du cercle inscrit.

Nous appliquerons cette construction en perspective de la manière suivante.

(c) 1° Dans le carré perspectif (fig. 138), nous tracerons, à peu près et fort légèrement au crayon l'ellipse inscrite; dans le seul but de savoir approximativement où sont les points exacts, et pour ne pas garder un réseau trop chargé de lignes inutiles.

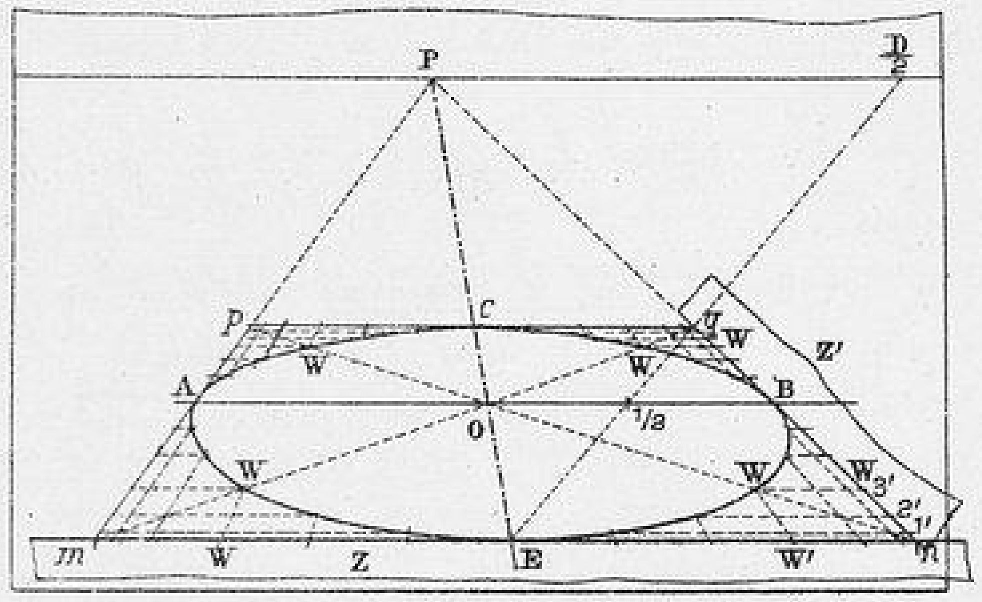
2° Sur le côté de front m n, nous reporterons les divisions de l'échelle en 1,2,3 ......; A cet effet nous aurons relevé sur une 1re bande de papier Z, les 3 points m (extrémité), n (extrémité) et i (milieu) et inscrivant (fig. 137) la bande de papier en m,W,i,W,n, sur l'échelle, nous pointerons les points de rencontre et nous les reporterons sur m n du tableau, en 1,2,3.....

3° Sur un côté fuyant n q, nous ferons une division proportionnelle à la précédente, soit en nous servant des points 1.2.3..... déjà obtenus, et les reliant par un point de fuite auxiliaire

aux points à obtenir, soit en opérant comme au problème 2 § 81 (partager une droite dans un rapport donné).

Mais il sera plus simple et plus rapide pour faire ce report de se servir encore de l'Échelle divergente, de la manière suivante :

Fig. 138.



1° Sur une 3e bande de papier je porte (tableau) les points d'extrémité n et q et le point milieu B ; 2° J'inscris par tatonnements, ce qui est facile, la bande de papier, en Z' dans l'échelle de telle sorte que les extrémités n' et q' étant sur les lignes extrêmes le point B soit sur la ligne milieu ; 3° Je reporte sur le tableau, en n 1', 2', 3'...... les points ainsi obtenus ; 4° Je fais la même opération sur tous les côtés en joignant deux à deux, les points qui se correspondent j'obtiens par recoupements, les points de l'ellipse cherchée (1).

Nous donnerons plus loin une application des échelles divergentes à la mise en perspective des moulures et d'un cercle placé d'une manière quelconque.

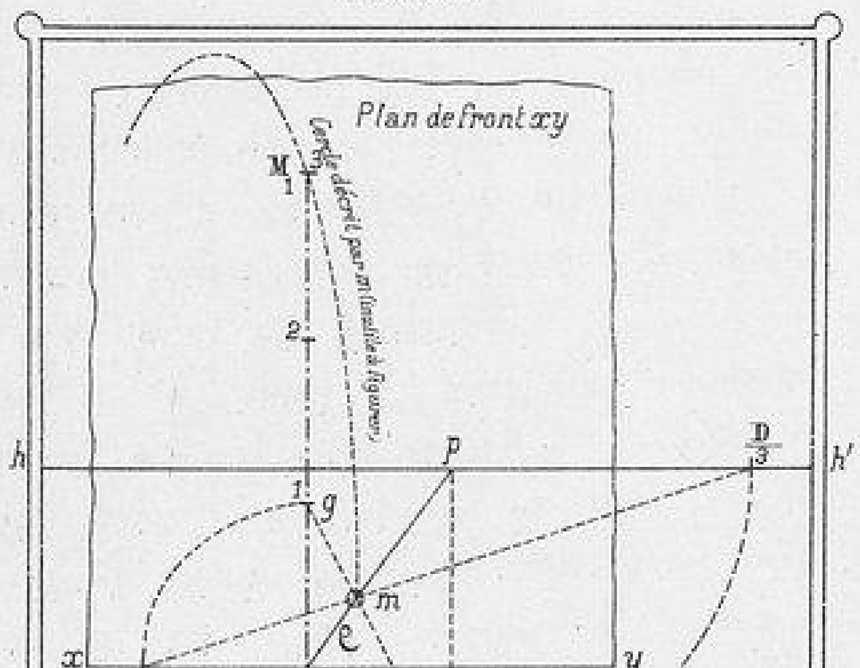
Nous nous occuperons d'abord de l'opération perspective connue sous le nom de *Relèvement du géométral*.

Relèvement du Géométral.

10e Leçon.

§ 99. – *Relèvement d'un point.* – On relève le géométral, ou plutôt une portion du géométral, en la faisant tourner autour d'une ligne de front comme charnière, et l'amenant à être elle-même ligne de front. Ce mouvement est analogue à celui d'un dessus de table à jeu qui tournerait autour de sa charnière et, de la position horizontale passerait à la position verticale.

Fig. 139.



Dans cette position la portion du géométral qui est relevée se perspective semblable à elle-même, ce qui permet de résoudre tous les problèmes d'angles ou de rapports. – En rabattant ensuite autour de la même charnière, on remet les figures en place.

Soit, par exemple, le point m, (fig. 139) à relever autour de la ligne de front x y comme

(1) La justesse de ce tracé se prouve par la théorie des rapports anharmoniques.

charnière.

1° J'abaisse du point m, dans le géométral, une perpendiculaire sur xy : sa perspective est la fuyante principale pmi ;

2° Je joins m au point tiers de distance (supposé donné) et je prolonge jusqu'en m'' ;

3° $\overline{m''i}$, donne, à l'échelle du plan de front qui aurait xy pour trace géométrale, le tiers de la longueur $\overline{im}$;

4° Je relève la perpendiculaire im ; elle devient la verticale $\overline{iM_1}$, que je prends égale à 3 fois $\overline{im''}$, et j'ai en M_1 le relèvement demandé.

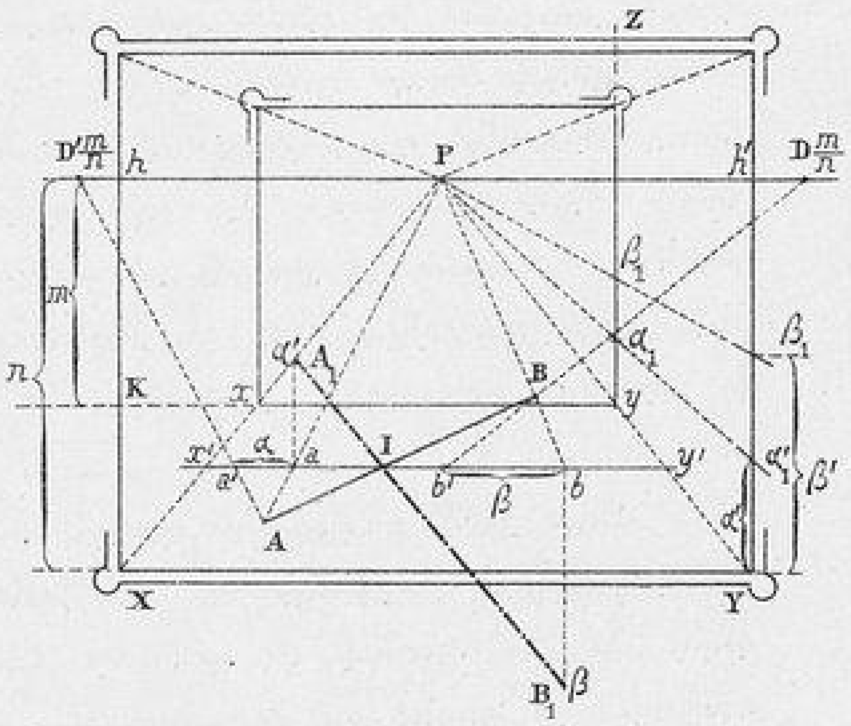
Nota. — L'opération inverse ou rabattement sur le géométral du plan de front xy et du point M_1 se fera en exécutant les constructions précédentes dans l'ordre inverse.

Remarque. — Prenons sur la verticale du point p, une longueur $\overline{p\frac{D'}{3}} = \overline{p\frac{D}{3}}$. Nous nommerons $\frac{D'}{3}$ le point terrestre de tiers de distance (voir fig. 104^{bis}), et il est évident sur la figure que si l'on joint $\frac{D'}{3}$ à m, cette droite recoupe en g la verticale $\overline{iM_1}$ au tiers de sa hauteur ; on a $\overline{im''} = \overline{ig}$.

Le point $\frac{D'}{3}$ sera le point de fuite des droites de resection $\frac{1}{3}$ dans des murs perpendiculaires au tableau ; c'est-à-dire des droites qui détacheront sur des verticales, telles que iM_1 des segments qui seront le tiers de ceux détachés sur des lignes de front telles que ip. L'emploi de ce point terrestre $\frac{D'}{3}$ permettra souvent de simplifier les constructions.

§ 100. — On connaissait dans le problème précédent le point $\frac{D}{3}$, ce qui supposait implicitement que le tableau était une amplification, au triple, de l'épure. Nous avons vu que cette amplification pouvait être toute autre et même être incommensurable ; dans ce cas on a le point $D\frac{m}{n}$ de distance réduite, le rapport $\frac{m}{n}$ pouvant être très compliqué. L'épure sera cependant facile à exécuter.

Fig. 140.



On a en XY (fig. 140) le grand tableau, en xy le petit tableau et l'on a vu que le rapport d'amplification $\frac{m}{n}$ est égal au rapport $\frac{hK}{hX}$. On se donne aussi (c'est une conséquence de la mise en perspective), en $D\frac{m}{n}$ le point de distance réduite, correspondant à cette amplification.

Soit AB la perspective d'une droite du géométral, que l'on veut relever avec le géométral en prenant l'horizontale de front $x'y'$ pour charnière. Relevons le point A : à cet effet : 1° Menons la perpendiculaire Aa sur la charnière, et cherchons sa grandeur à l'échelle du plan de front $x'y'$. — 2° Joignons A au point $D'\frac{m}{n}$ de gauche ; le segment obtenu aa' est les $\frac{m}{n}$ du segment aA du géométral ; par conséquent amplifions le segment aa' ($= \alpha$) dans le rapport d'amplification du tableau et nous aurons à l'échelle du plan de front $x'y'$, la grandeur de aA. 3° Pour faire cette amplification portons aa' de y en α, sur l'échelle des hauteurs yZ, laquelle est contenue dans le petit tableau ; joignons $P\alpha$, et par prolongement avec le coté YZ' du grand tableau nous aurons en $Y\alpha'$ la grandeur cherchée qu'il suffira de porter de a en α' pour avoir en A_1

le relèvement du point A.

On a relevé de même le point B en B_1. – A cet effet : 1° On a mené la fuyante principale PBb. – 2° On a mené $B(D'\frac{m}{n})$ et pris le recoupement b' de cette droite avec la charnière. 3° Le segment bb', ainsi obtenu a été porté de y en $\mathcal{B}_1$ sur l'échelle des hauteurs. 4° On a joint $P\mathcal{B}_1$ et par recoupement de cette ligne avec le côté droit Yh' du grand tableau on a obtenu en $y\mathcal{B}'_1$ la grandeur de bB à l'échelle du plan de front $x'y'$. – 5° On a porté $Y\mathcal{B}_1$ de b en $\mathcal{B}'$ et cela a donné en B_1 (au-dessous de $x'y'$) le relèvement de B.

La droite AB est relevée en $A_1 B_1$.

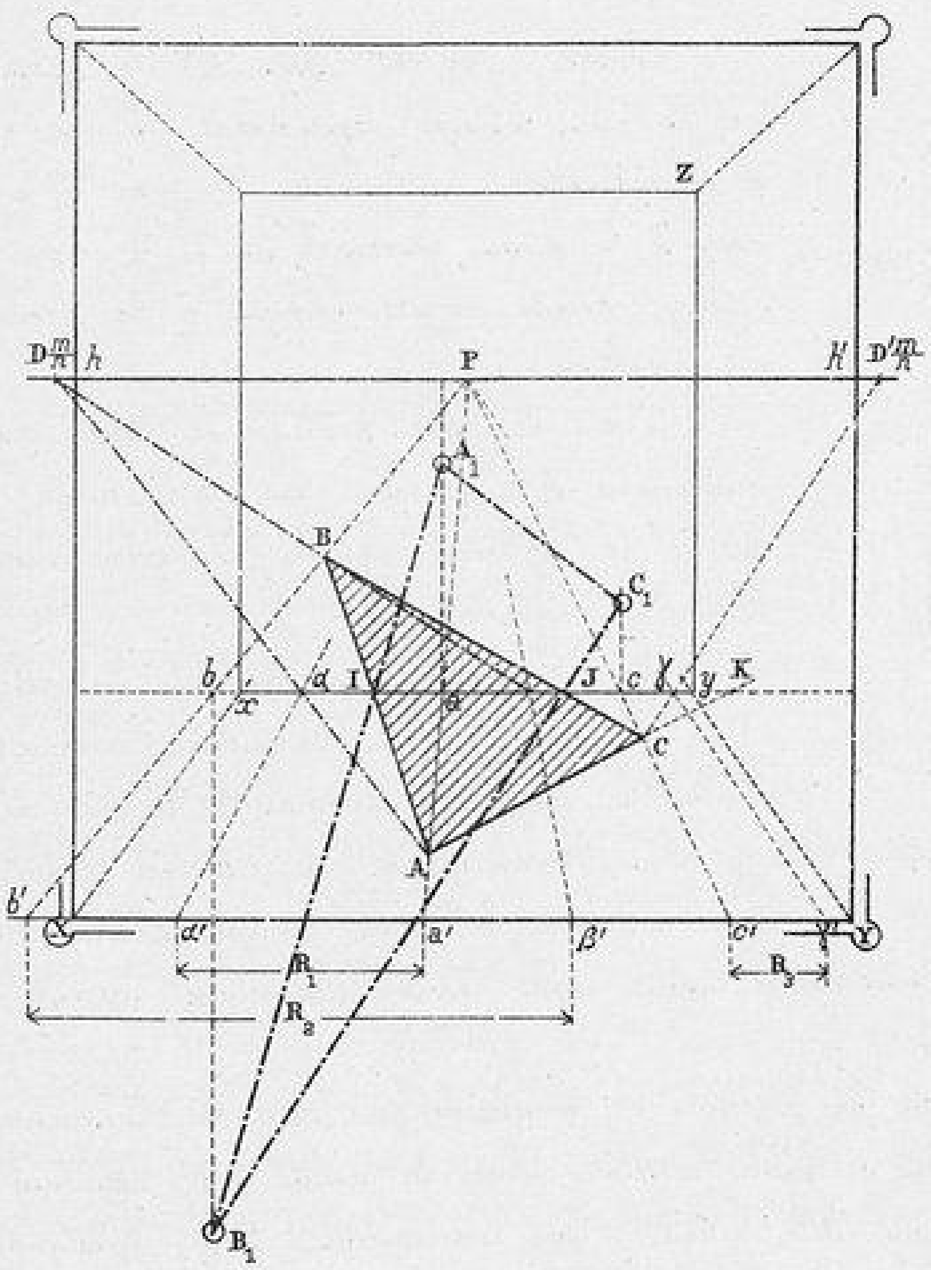
Remarquer le point I, dit point de charnière qui ne bougeant pas dans le mouvement est commun à AB et à son relèvement $A_1 B_1$.

Nota. – Dans un cas analogue, en prenant pour charnière la trace xy du petit tableau on simplifiera beaucoup les constructions et, de plus, on pourra déduire très facilement du relèvement les vraies grandeurs (longueurs ou surfaces) des figures relevées, comme l'exemple suivant le fera comprendre.

§ 101. – Problème de restitution perspective.

Énoncé. – Sur un tableau XY amplifié arbitrairement (fig. 141) ($\frac{m}{n}$ est quelconque) mais dans lequel est figuré le petit tableau, on a en perspective sur le géométral un triangle ABC. On demande, sachant que l'échelle du petit tableau xy est de $\frac{1}{20}$, (c'est-à-dire de $0^{m},05$ pour 1 mètre), de déterminer les dimensions absolues des côtés du triangle ABC, ses angles et sa surface.

Fig. 141.



Solution. – A *Relèvement.* – Je prends pour charnière la base xy du petit tableau ; et je relève les 3 points A B et C. Opérons pour A :

1° Fuyante principale PA, rencontrant la charnière en a ;

2° On joint A au point $D\frac{m}{n}$ de gauche, ce qui donne le point α sur xy ;

3° On amplifie $a\alpha$ dans le rapport inverse $\frac{n}{m}$ ce qui se fait en joignant Pa, Pα et prolongeant ces fuyantes jusqu'à la base XY du grand tableau on obtient ainsi le segment amplifié $a'\alpha' = R_1$;

4° On prend la verticale aA_1 égale à R_1 et on a en A_1 le relèvement de A.

Nota. – Les points de charnière I, J et K permettent des vérifications et des simplifications.

B. - Vraies grandeurs. - Mesurée sur le petit tableau la ligne $A_1 B_1 = 0^m,08$; et comme le petit tableau est à l'échelle de $\frac{1}{20}$, il en résulte que la vraie grandeur de la ligne AB du géométral est égale à $0,08 \times 20 = 1^m,60$.

On mesurera de même les autres côtés $B_1 C_1$ et $C_1 A_1$ sur le petit tableau et on les multipliera par 20.

On calculera la surface et elle sera multipliée par 20^2 c'est-à-dire par 400.

Quant aux angles, ils sont les mêmes sur la figure relevée $A_1 B_1 C_1$ que dans l'espace ; le rapporteur les donnera donc immédiatement.

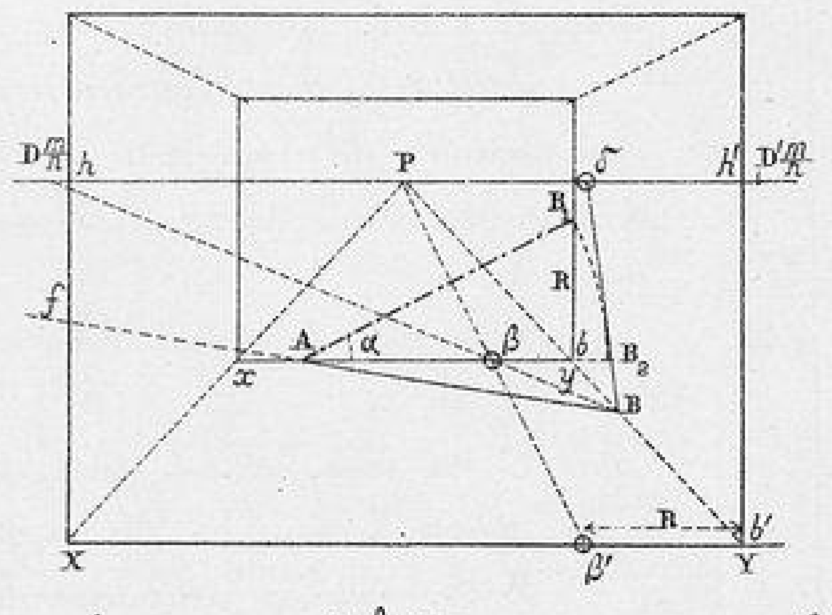
§ 102. - Recherche de points accidentels de fuite et de leurs points de distance.

Problème (fig 142). - Déterminer le point de fuite et le point de distance (accessibles ou non) d'une direction horizontale, sachant qu'elle doit faire un angle donné α avec le tableau (α n'est pas égal à 90°).

Solution. - Il suffira d'établir la perspective d'une droite du géométral parallèle à la direction imposée ; en prolongeant cette perspective jusqu'à la ligne d'horizon on aura le point de fuite demandé ; le plus ordinairement il sera inaccessible, mais la ligne perspective trouvée permettra de placer des épingles pour utiliser le Té brisé (§ 91 et 92).

On aura le point de distance en construisant la perspective d'une ligne d'égale resection pour la droite précédente : cette nouvelle droite perspective, prolongée jusqu'à l'horizon donnera le point de distance cherché.

Fig. 142.



Epure. - (fig. 142) : Soit XY le grand tableau ; xy le petit tableau répondant à un rapport d'amplification quelconque $\frac{m}{n}$ (ici $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$).
Soit P le point principal et $D\frac{m}{n}$ son point de distance réduite correspondant à la grandeur du petit tableau.

Dans le petit tableau je trace une droite quelconque AB_1 faisant avec xy l'angle donné α, et je la considère comme le relèvement d'une droite du géométral.

Je fais l'opération inverse du relèvement, elle porte le nom de Rabattement. - A cet effet : 1° J'abaisse $B_1 b$ perpendiculaire sur xy ; 2° Je prends sur XY le segment $b'\beta'$ égal à bB_1 ; 3° je mène la fuyante principale $\beta'\beta$ et j'ai en $b\beta$ la grandeur bB_1 réduite dans le rapport $\frac{m}{n}$; 4° Je joins β au point de distance réduite $D\frac{m}{n}$ de gauche et j'ai en B le rabattement de B_1. Donc AB est la droite perspective demandée.

Nota. - Son point de fuite f est inaccessible mais nous avons néanmoins appris à y mener des fuyantes, surtout avec l'aide du Té brisé.

Pour avoir le point de distance δ de la direction f, je prends sur xy la longueur AB_2 égale à AB ; je joins $B_2 B$; cette ligne est d'égale resection pour la droite AB ; puisque en vraie grandeur $AB_1 = AB$ et que $AB_1 = AB_2$, donc $AB_2 = AB$. Par conséquent BB_2 prolongée jusqu'à l'horizon donne en δ le point accidentel de distance.

Nota. – Ce point δ pourrait lui aussi être inaccessible, mais il est à remarquer que plus le point f sera inaccessible, moins son point de distance δ, le sera, et inversement.

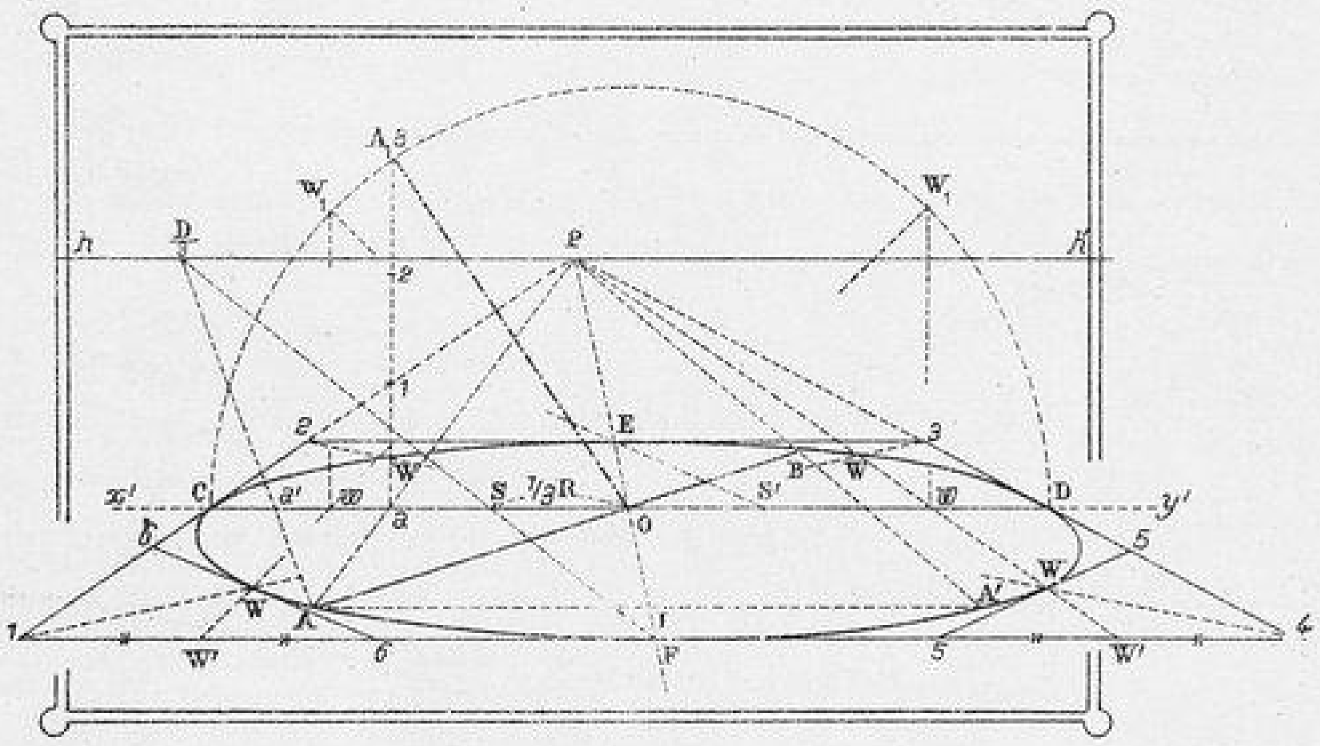
§ 103. – Problème. – (même figure). Trouver le point de distance δ, d'une direction donnée dont le point de fuite f, est accessible ou non.

Solution : Soit AB une droite perspective définissant la direction donnée : 1° On relève la droite en AB_1 comme ci-dessus ; 2° On prend $AB_2 = AB_1$ et 3° BB_1 prolongée donne en δ, le point de distance cherché.

§ 104. – Applications. – Perspective d'un cercle dont on donne, en perspective, le diamètre fuyant AB.

Solution : (fig. 143). 1° Chercher le milieu perspectif O de AB, ce sera le centre du cercle ; à cet effet : mener la ligne de front AA, et la fuyante principale PB ; prendre le milieu vrai I de AA' ; joignant ensuite IP on en déduit le centre O du cercle ;

Fig. 143.



2° Mener par O, la ligne de front x'O y' et faire un relèvement du géométral autour de cette ligne x'y' comme charnière : Le point A se relève en A_1 ; on a utilisé pour ce relèvement le point tiers de distance $\frac{D}{3}$ de gauche ;

3° OA_1 est la grandeur, à l'échelle du plan de front x'y', du rayon du cercle. On décrit ce cercle, ce qui donne en C et D les extrémités du diamètre de front ;

4° Prenant $OS = OS' = \frac{1}{3}$ du rayon et joignant S et S' au point $\frac{D}{3}$ on obtient en E et F les extrémités du diamètre principal ;

5° On construit alors en 1 2 3 4 le trapèze perspective du carré de front circonscrit et on achève comme à la figure 136, en se contentant des points W, W..... de diagonales.

§ 105. – Application. – Architecture.

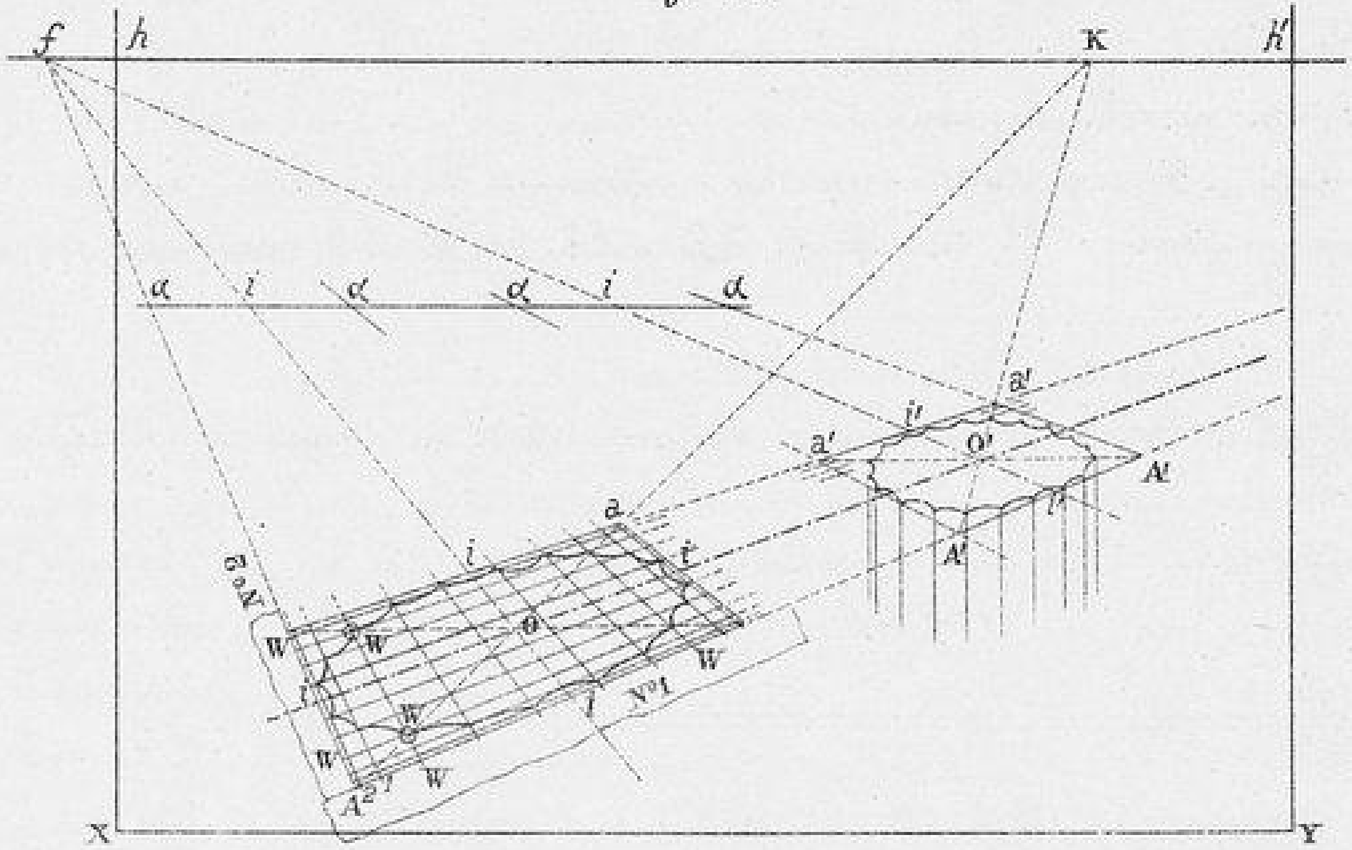
Mettre en perspective le plan d'une colonne cannelée (fig. 144).

Nous supposons que par les méthodes générales nous ayons mis en perspective en AAaa et A'A'a'a' les carrés circonscrits aux cercles cannelés. Nous menons les diagonales ; nous avons en O et O' les perspectives des centres et nous trouvons facilement les perspectives f i o, f'i'o', des axes principaux des cercles. Nous avons à ce moment la perspective des masses ; il faut maintenant entrer dans le détail des cannelures en considérant comme exacte la perspective AAaa du carré circonscrit. – Nous emploierons

encore une échelle divergente.

Supposons qu'il y ait à établir 20 cannelures comme aux colonnes du Parthénon :

Fig. 144.



1° Construisons (fig. 145) en épure, un cercle, ou plutôt un demi-cercle ce qui suffira à cause de la symétrie et figurons sur ce cercle les cannelures que nous voulons W, 1, 2, 3 .....

2° Projetons ces points de division du cercle ainsi divisé en A, W, 1, 2, ... sur le diamètre A A, et construisons une échelle divergente de sommet S sur cette division, en ayant soin d'y marquer aussi la ligne S I, que nous nommerons la ligne milieu, et qui répond au milieu de A A ;

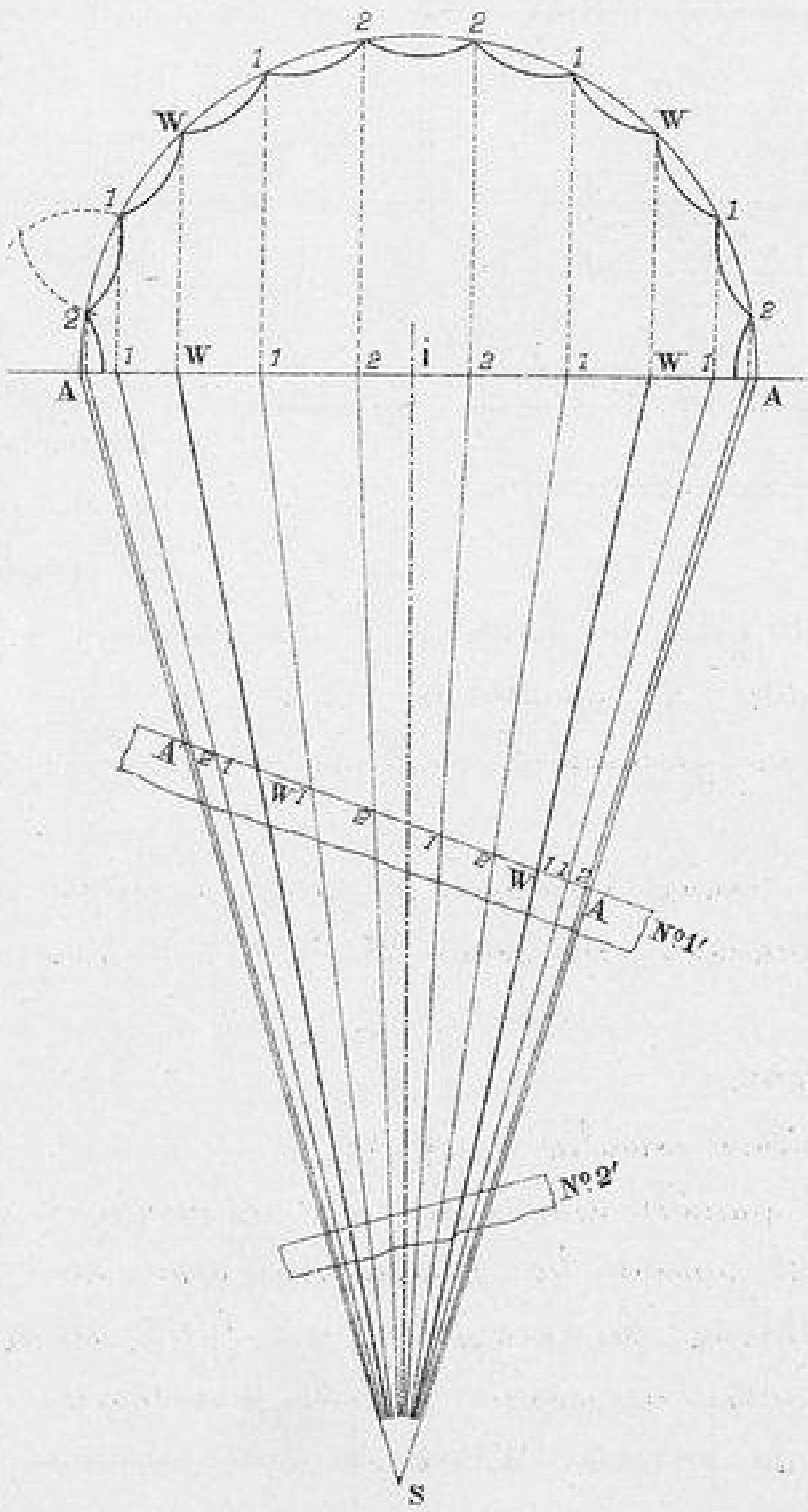
3° Sur une bande de papier N° 1 (Tableau), relevons les 3 points A I A sur un des côtés du carré ;

4° Par tatonnement inscrivons sur l'échelle (Position N° 1') la bande de papier de manière que les 3 repères savoir les repères d'extrémité A, A et celui du milieu I soient sur les lignes correspondantes ;

5° Marquons en W, 1, 2, ... les points de division et reportons cette division en A A du tableau ;

6° Faisons la même opération pour tous les côtés des carrés circonscrits et en joignant les points qui sont en face les uns des autres nous aurons un réseau dans lequel on retrouvera facilement les points cherchés.

Fig. 145.



Nota. – Dans la pratique on se garde bien de surcharger ainsi le dessin. Lorsque l'on a le carré circonscrit en perspective, on trace très légèrement au crayon et de sentiment, l'ellipse perspective du cercle ; elle est inexacte, bien entendu, et sera effacée plus tard ; mais on ne trace les lignes du réseau qu'aux environs de cette courbe (voir fig. 138) ce qui dégage beaucoup le dessin.

11e Leçon. § 106. – Perspective d'une série de cercles concentriques. – Emploi d'échelles divergentes.

Le problème se présentera souvent de la manière suivante : (fig. 146). On a en AAAA une ellipse, perspective d'un cercle horizontal ; cette perspective a été obtenue par un procédé quelconque ; soit que l'on dessine d'après nature soit que l'on ait employé les méthodes exactes. On voudrait maintenant tracer directement, sans être obligé de revenir à l'épure, d'autres ellipses, perspectives de cercles concentriques au premier ; on sait seulement que les rayons R', R" de ces nouveaux cercles sont dans un rapport donné avec le rayon R du cercle déjà tracé.

1ère Partie. – Restitution perspective du centre. – On mène deux tangentes de front m m – m' m' – on détermine les points de contact AA – On les joint par une droite qui, prolongée, donne en P sur la ligne d'horizon, le point de fuite principal. – Du point P on mène deux tangentes à l'ellipse, ce qui détermine en m m m' m' la perspective du carré circonscrit. – On en mène les diagonales qui se recoupent au centre.[1]

Fig. 146.

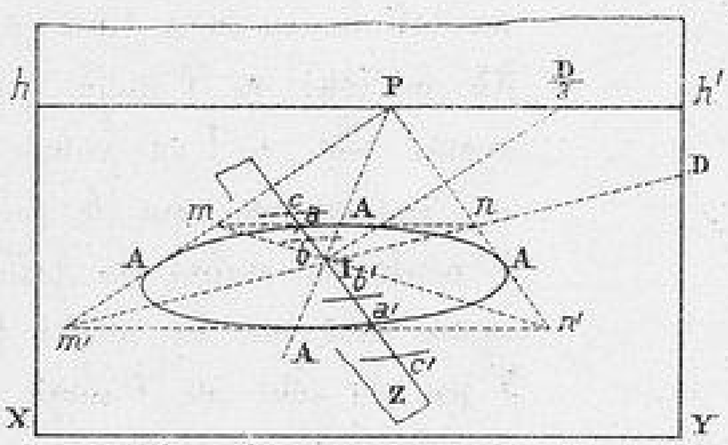
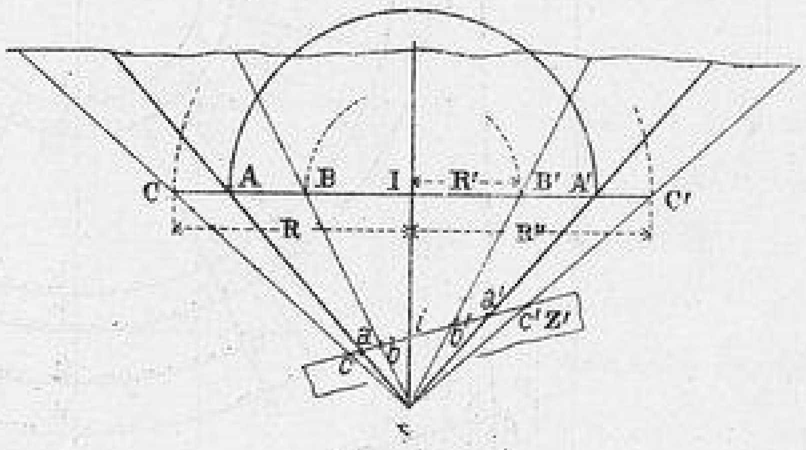


Fig. 147.



2e Partie. – (fig 147) Construction d'une échelle divergente. – Prenant 3 longueurs IA IB IC qui soient entre elles comme les rayons R, R' et R" on construira une échelle divergente sur ces lignes comme base.

Les 3 lignes de repère de cette échelle sont SA, SI et SA'.

3e Partie. – Mise en place directe des points des cercles R' et R". – On mènera (fig 146) un rayon quelconque a I a'. – Sur une bande de papier Z on piquera les 3 points de repère, savoir : a et a' pris sur le cercle donné en perspective et I pris au centre. – On reportera la bande de papier en Z' sur l'échelle en la repérant par les points a, i et a' – on y marquera les autres points c, b, b' et c' en reportant l'échelle sur le tableau on aura en c, b, b' et c' des points des cercles concentriques demandés.

On recommencera cette opération plusieurs fois et on joindra par des courbes continues les points qui répondent à un même cercle.

---

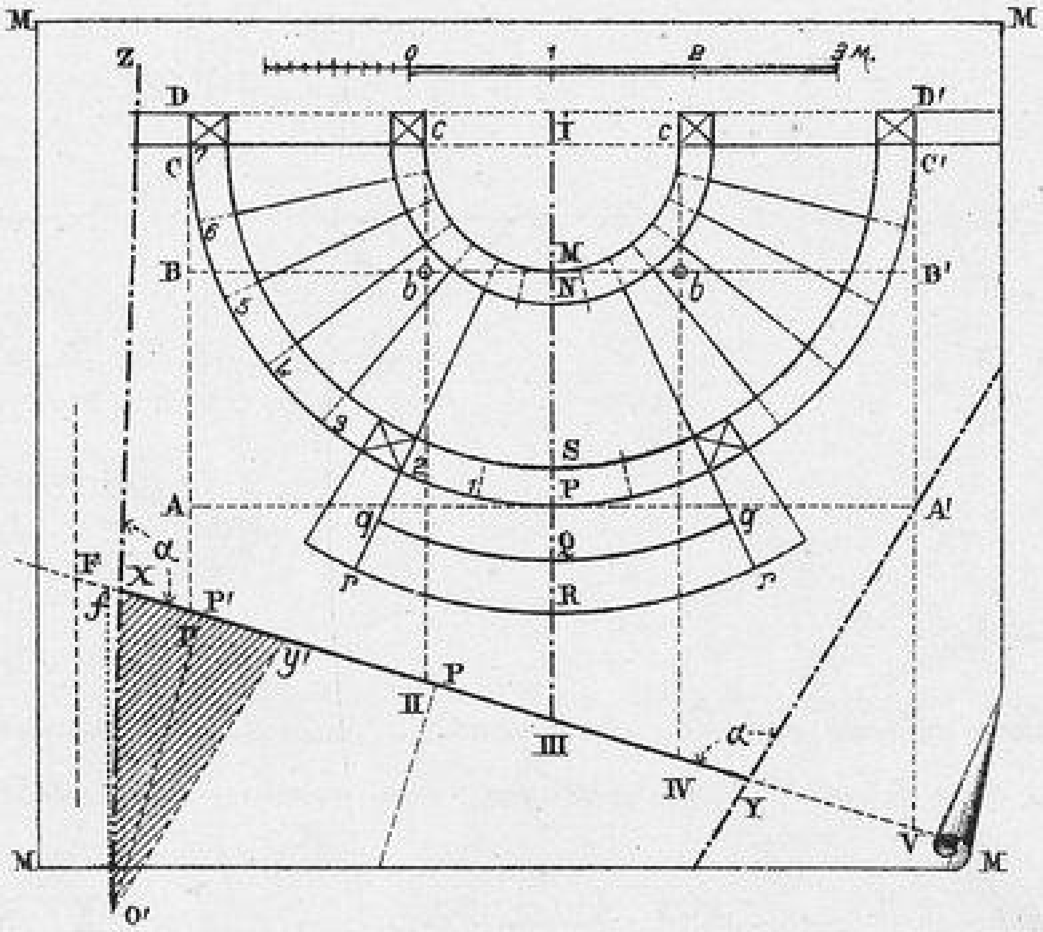
[1] On voit que cette construction permet de restituer non-seulement le centre du cercle mais encore en P, le point principal. – La diagonale m'n prolongée jusqu'à l'horizon restituerait le point principal de distance. Il sera presque toujours inaccessible. – Mais si on prenait le tiers ou le quart de A n, en joignant le centre I, on aurait une ligne de resection 1/3 ou 1/4, qui donnerait le point tiers, ou quart de distance probablement accessible.

§ 107. – Remarque générale. – Cet exemple est de nature à faire comprendre ce qui doit guider le perspecteur dans l'application des méthodes de perspective directe. On voit comment après avoir accepté comme exacte la perspective d'un premier cercle on en déduit celle d'autres cercles, sans avoir recours à l'épure. On pourrait croire préférable au point de vue de l'exactitude de revenir à l'épure et d'établir avec autant de précision que possible les autres cercles sans s'occuper du premier ; ce serait mauvais au point de vue du dessin. Il faut admettre que le premier cercle présente quelques fautes ; si l'on dessinait les autres avec une précision absolue les erreurs seraient beaucoup plus choquantes que si, admettant, comme nous l'avons fait, le premier cercle comme bien mis en place, nous en déduisons, points par points, ceux qui lui sont concentriques.

§ 108. – Application au plan d'un escalier circulaire.

La figure 148, donne le plan géométral de l'escalier à une échelle quelconque donnée sur le croquis. – Le cadre de la feuille est indiqué en M, M, M.... avec obligation de ne pas sortir sensiblement de ses limites. – On a pris en XY la position du tableau et on a tracé en YA' et XZ les côtés de l'angle optique, en ayant soin si l'on veut, comme cela est recommandé, que le point principal P tombe au milieu du tableau de prendre égaux entre eux les angles faits en X et Y par les côtés de l'angle optique et par la base du tableau.

Fig 148.



On voit de suite que ces côtés prolongés se rencontreraient hors de la feuille.

On fait alors une réduction proportionnelle. Il y a bien des manières de la faire ; nous avons adopté la suivante.

J'ai pris en Xy' le quart de XY. Par y' j'ai mené une parallèle à YA', et j'ai obtenu un point O' que je nomme l'<u>œil réduit</u>. Il est évident que Xy'O' est une réduction au quart de l'angle optique.

J'abaisse O'P' perpendiculaire sur XY et j'ai en O'P' le quart de la distance principale. On voit que O' tient à très peu près dans la feuille. – S'il n'avait pas tenu on aurait fait une

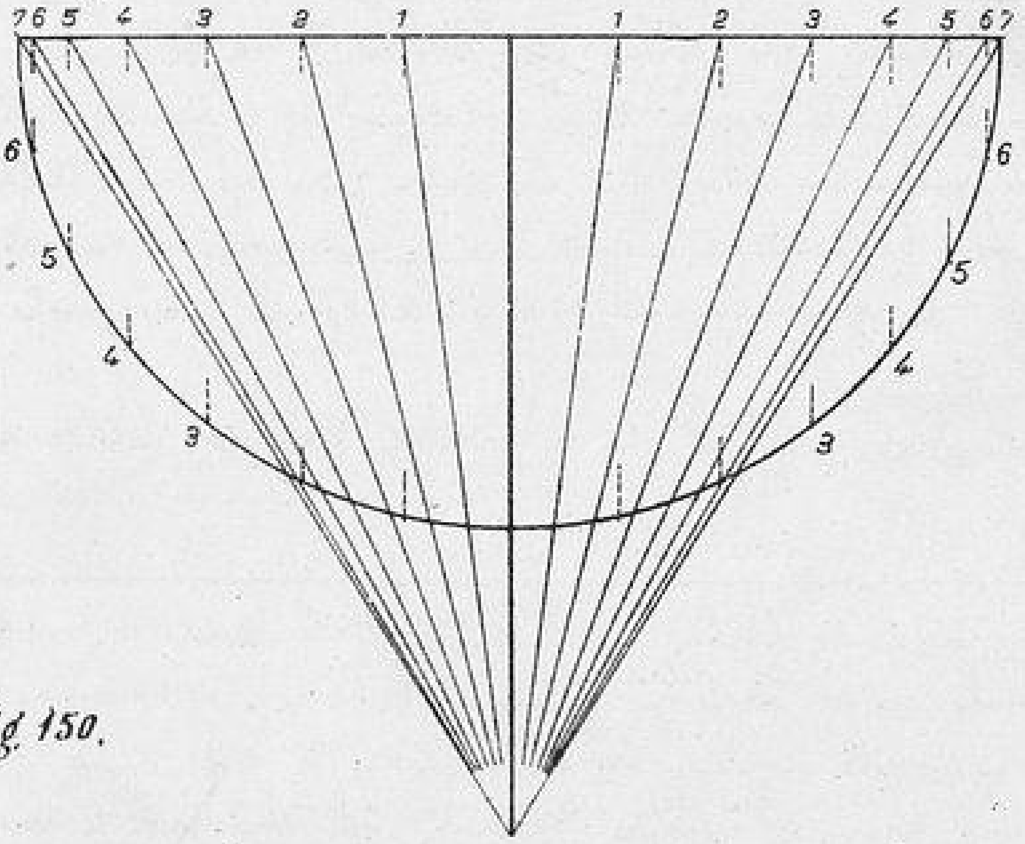


Fig. 150.

une réduction au cinquième ou au sixième.

Cela posé : je prends comme dominantes les lignes telles que AD, parallèles à l'axe du dessin, j'emploierai donc la méthode des points accidentels de fuite :

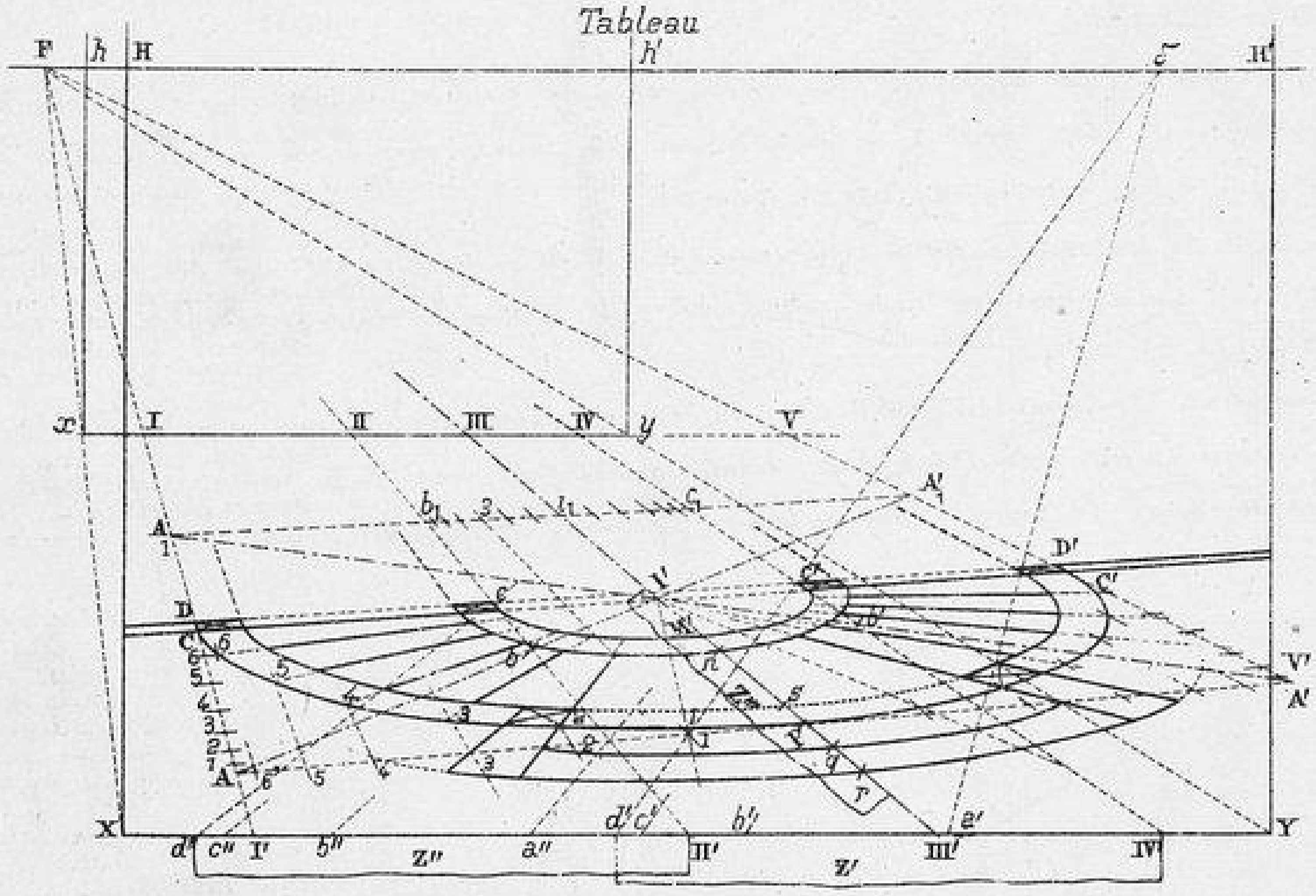
De l'œil réduit O', je mène O'f parallèle aux dominantes et portant XF égal à quatre fois Xf, j'ai en F le point de fuite des dominantes, le même que si j'avais à ma disposition l'œil non réduit et que j'aie mené par lui une parallèle aux dominantes.

La distance accidentelle δ, sera égale à 4 fois O'f.

Cela posé je ne mets en perspective, par la méthode générale que les lignes DD'-CC'-BB'-AA' et les dominantes numérotées I, II, III, IV et V.

(fig. 149.) *Tableau.* - On voit en hh'xy le petit tableau : la hauteur d'horizon a été prise égale à 3 mètres mesurés sur l'échelle de l'épure. En F on a reporté le point de fuite des dominantes (Fh du tableau = FX de l'épure). - On a joint Fx - Fy et on a pris le grand tableau XY aussi grand que le permettait la feuille ou la toile. Ici le grand tableau est environ les $\frac{81}{46}$ du petit tableau. - Le rapport d'amplification est donc très compliqué. On a porté, sur l'horizon, Fδ égal à 4 fois O'f de l'épure, et δ est le point de distance réduit de la direction F. En réalité c'est le point $\frac{46}{81}$ de distance.

Fig. 149.



Mise en largeur. On a reporté sur l'échelle des largeurs xy les points I. II, III, IV, V pris sur le bord du tableau XY dans l'épure. On a mené les dominantes FI, FII, etc......

Mise en profondeur. Afin de ne pas sortir du cadre on a mis en profondeur les points situés sur les dominantes II et IV. - On voit en Z' et Z'' sur le tableau la position des bandes de papier qui ont servi pour cela. - Il est inutile d'insister, la méthode ayant été exposée en détails au § 81.

A ce moment nous n'avons encore obtenu que les perspectives DD'-CC'-AA', du demi carré circonscrit au plus grand cercle, et que cb - c'b',

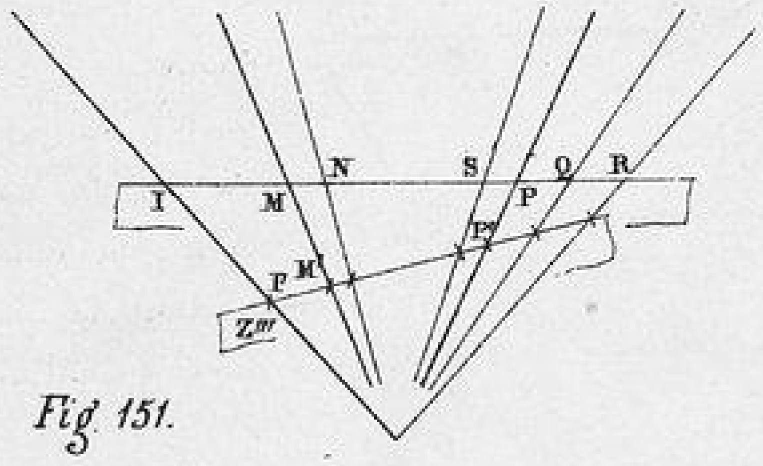


Fig. 151.

perspective du demi-carré circonscrit au plus petit cercle. Tout le reste va s'obtenir par les procédés de la perspective directe.

Les marches. — De chaque côté de l'axe il y aurait 7 marches; l'espace des deux premières est occupé par le palier.

On construira donc (fig. 150) une échelle circulaire répondant à la division du demi-cercle en 14 parties égales et se servant de l'échelle et de la bande de papier comme on sait, on obtiendra (Tableau) en 1, 2, 3, 4 ...... les extrémités des marches sur la grande circonférence. On obtient de même les extrémités situées sur la petite circonférence.

Balustrade et marches placées en avant (R, Q, P ....). On relève sur l'épure (fig 148) les points I, M, N, S, P, Q et R, parmi lesquels les 3 points I, M et P serviront de repères.

On construit (fig. 151) une échelle sur cette division et s'en servant comme nous avons dit au paragraphe précédent et comme l'indique la bande de papier placée en Z''' sur l'épure et ensuite en Z''' sur l'échelle (fig. 151), on aura autant de points que l'on voudra des balustrades et des marches centrales.

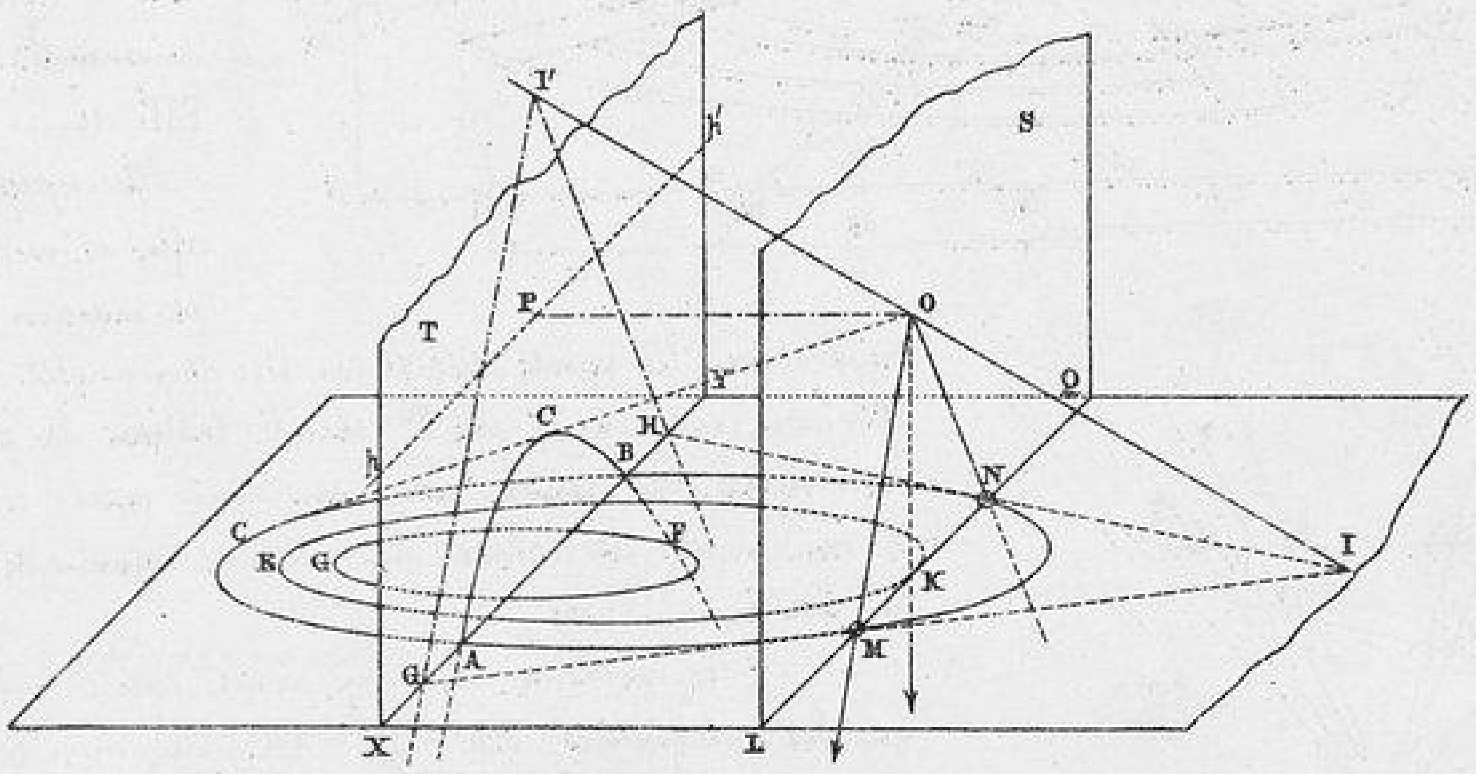
§ 109. – Cas particuliers de la perspective d'un cercle horizontal – Ellipse, hyperbole ou parabole.

Le croquis perspectif de la figure 152, montre en T la position du tableau, en O celle du point de vue. Nous nommerons Plan neutre, le plan S qui est mené par l'œil parallèlement au tableau, et ligne neutre, L Q, son intersection avec le géométral.

Il est facile de voir qu'un point quelconque M, ou N du plan neutre a sa perspective sur le tableau reculée à l'infini; car le rayon visuel OM, du point M étant parallèle au tableau rencontre ce dernier à l'infini.

Par conséquent si, dans un tableau, nous voyons deux droites, que nous savons être dans un même plan, avoir pour perspectives deux lignes parallèles, loin d'en conclure qu'elles sont parallèles en réalité dans l'espace, nous pouvons affirmer, au contraire, qu'elles se rencontrent dans le plan neutre.

Fig. 152.



Cela posé, un cercle peut avoir pour perspective, une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

1° L'ellipse est une courbe fermée qui n'a pas de branches infinies; pour que la perspective d'un cercle donne une ellipse il faudra donc qu'aucun des

points du cercle ne soit dans le plan neutre ; c'est le cas du cercle GF, fig. 152.

Nota. — Une partie du cercle, telle que F peut être située dans la région intermédiaire, c'est à dire comprise entre le tableau et le plan neutre sans que la perspective cesse d'être une ellipse.

2° L'<u>hyperbole</u> présente des branches infinies avec des asymptotes ; ces dernières sont des tangentes aux points situés à l'infini.

Pour que la perspective d'un cercle donne une hyperbole il faut donc que le cercle occupe une position analogue à CMN, c'est à dire rencontre le plan neutre en M et N. Ces points M et N se nommeront les <u>points neutres</u> du cercle et se perspectiveront à l'infini sur le tableau.

3° <u>Asymptotes</u> : Menons les tangentes en M et N aux points neutres, mettons-les en perspective et nous aurons les tangentes à l'infini c'est à dire les asymptotes. Les points G et H où elles rencontrent le tableau sont à eux-mêmes leur perspective ; joignons OM et ON les perspectives seront I'H et I'G parallèles à OM et à ON.

4° <u>Parabole</u> ; Si le cercle occupe la position EK et s'il est tangent au plan neutre, en E par exemple, ce point E se perspectivera aussi à l'infini comme les points M et N ; mais la tangente au cercle LQ étant dans le plan neutre, se perspective toute entière à l'infini, ce qui veut dire qu'elle n'existe plus. Donc dans ce cas la perspective sera une courbe à branche infinie mais sans asymptote ; ce sera donc une parabole.

§ 110. — *Application.* — *Perspective des bancs d'un cirque.*

Fig. 153.

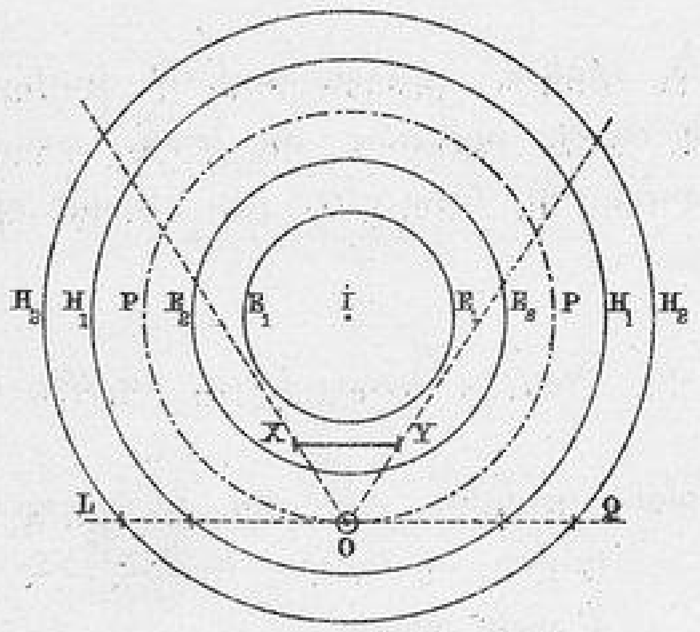
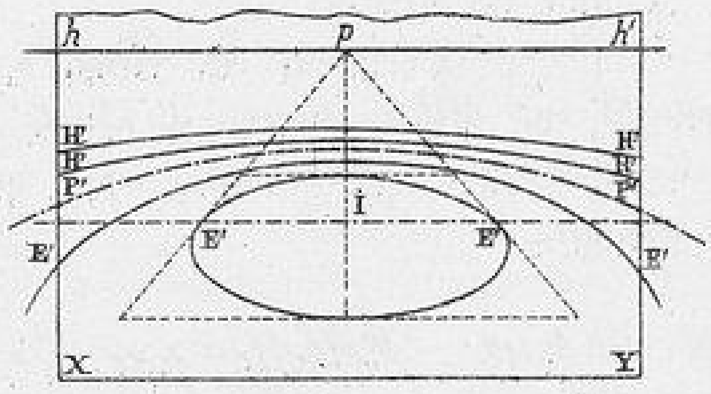


Fig. 154.



On peut observer tous ces cas de perspective lorsque (fig. 153) on est placé en O, sur un des bancs d'un cirque.

On peut se figurer le tableau placé en xy, en avant du spectateur et si ce dernier regarde le centre I de l'arène alors le plan neutre LQ est tangent au cercle du banc sur lequel on est assis. — Donc ce cercle PP apparaîtra (voir fig. 154) suivant une parabole P'P'. Les deux cercles (fig. 153) E_1 et E_2 placés en avant de lui auront pour perspective, E' et E', des ellipses (fig. 154). Enfin les deux cercles H_1 et H_2 qui passent derrière le spectateur apparaissent suivant des hyperboles H' et H'.

§ 111. — *Remarque sur la position prise par la ligne neutre quand on relève le géométral.*

La figure 155 représente une coupe faite par un plan vertical perpendiculaire au tableau.

XT est le tableau — LS le plan neutre — O le point de vue — Z est une charnière autour de

laquelle on a relevé le géométral : la ligne neutre L a pris la position L_1 ; la perspective de la charnière se fait en Z' et celle de la ligne neutre relevée L_1 se fait en l'.

Or les triangles semblables donnent :

$\frac{Zl'}{ZL_1} = \frac{OZ'}{OZ} = \frac{LX}{LZ}$ et comme $LZ = ZL_1$ il en résulte que $Zl' = LX$ (Distance principale).

D'où il résulte ce fait assez important :

Fig. 155.

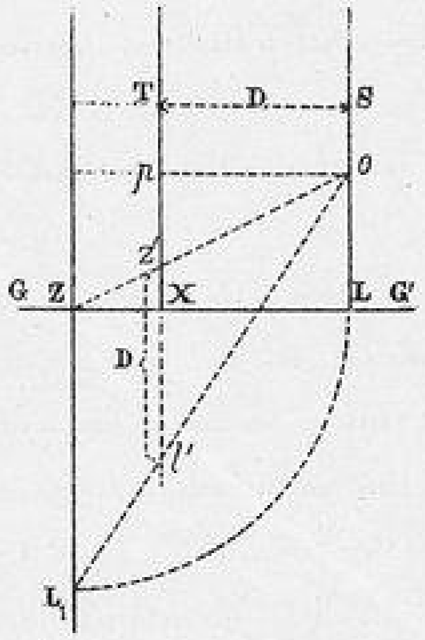
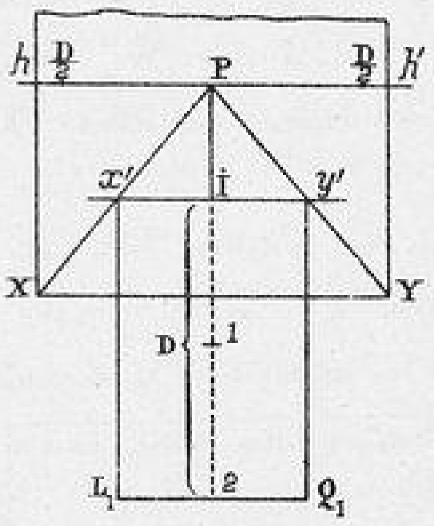


Fig. 156.



Si dans un tableau (fig. 156), on fait autour d'une charnière de front quelconque x'y', un relèvement du géométral, la ligne neutre se relèvera toujours en L_1Q_1 à une distance de la charnière égale à la <u>distance principale</u> D, et cela aura lieu quelque loin ou quelque près du tableau que soit placée la charnière x'y'.

Cette remarque peut trouver son application dans certains problèmes de tangence, comme celui-ci :

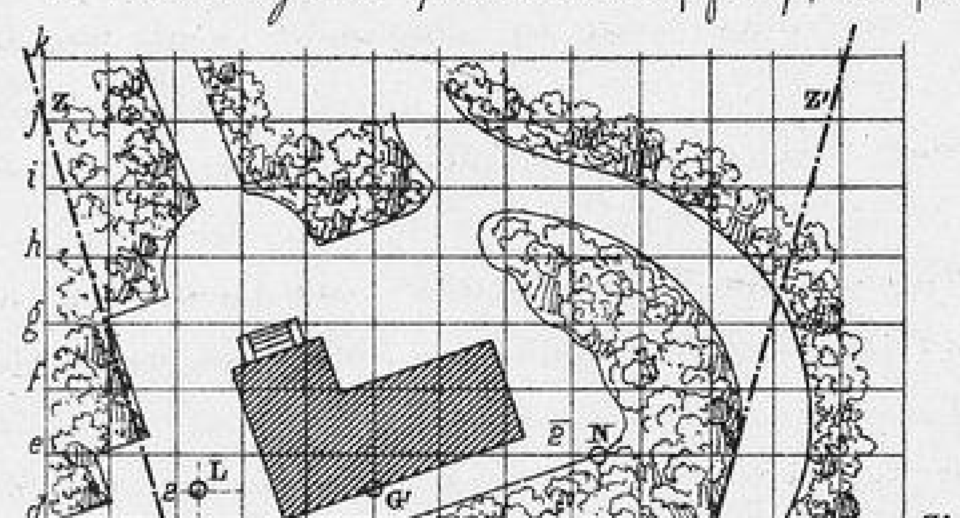
Problème : Connaissant la perspective du carré circonscrit à un cercle du géométral, déterminer directement le point de cette perspective pour lequel la tangente est parallèle à une direction donnée, et en particulier est perpendiculaire à la ligne d'horizon.

Nous engageons les Élèves à en chercher la solution, quoique dans la pratique du dessin perspectif on préfère tracer d'abord par points la courbe, perspective du cercle, comme nous l'avons indiqué plus haut, après quoi, on lui mène les tangentes par simple appréciation du contact.

§ 112. – Méthode par les carreaux (ou craticulage) pour mettre en perspective des plans irréguliers.

1° Craticulage du plan. – Soit fig. 157, un plan irrégulier à mettre en perspective, XY la position du tableau et XZ, YZ' les côtés de l'angle optique.

Fig. 157.



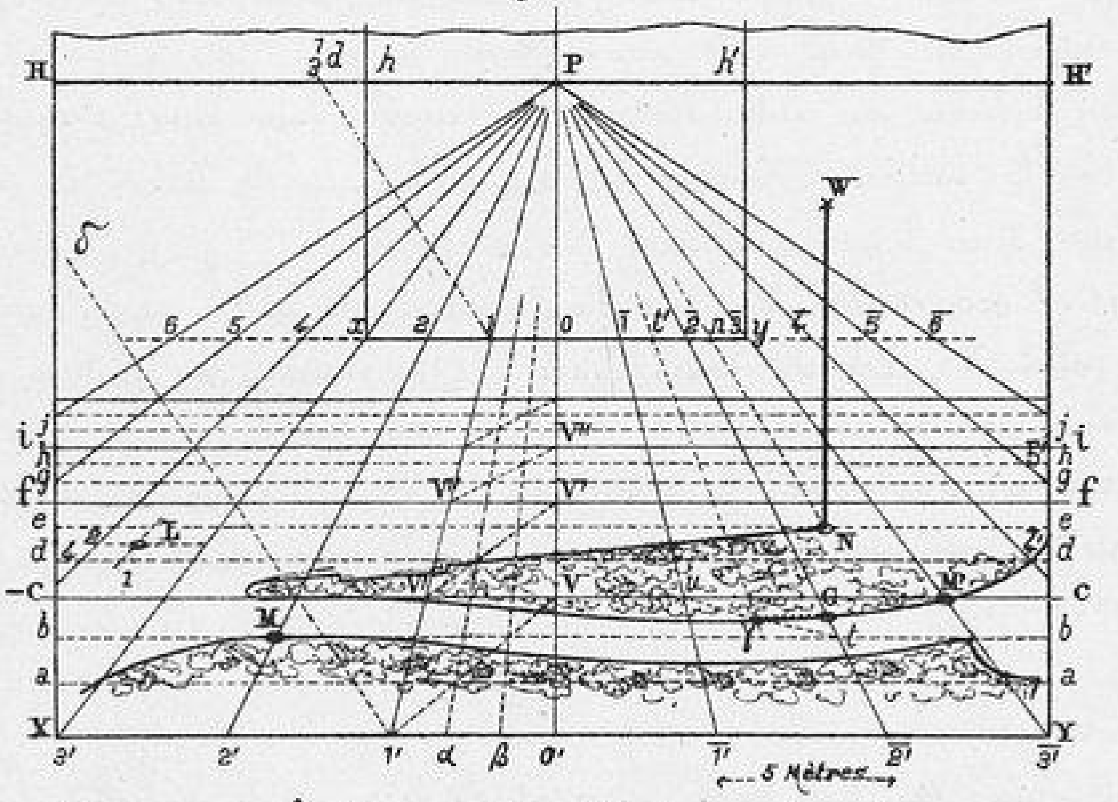
On couvrira le plan par un réseau de lignes de front (lignes a, b, c, d .....) et de lignes principales (numérotées 1, 2, 3 à gauche et $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ à droite). – Ces lignes seront équidistantes et formeront un réseau de carrés égaux entre eux.

Nota. – Autant que possible on fera en sorte que les côtés des carrés représentent à l'échelle du dessin, une longueur exacte ; par exemple, 1 mètre, 2 mètres, etc...... Sur le croquis, fig. 157, ils représentent 5 mètres.

2° *Mise en perspective du réseau* (fig. 158). On a comme à l'ordinaire en $xy - hk'$ le petit tableau; sur xy on a reporté les longueurs 1.2.3...... $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$..... prises sur l'épure et les fuyantes principales sont mises en perspective.

Le grand tableau est XY; il est une amplification tout à fait quelconque du petit tableau. - Pour mettre en profondeur les lignes de front a, b, c ...... il faudrait connaître soit le point de distance, soit le point de demi, ou tiers de distance du grand tableau. Mais remarquons d'abord que la feuille d'épure fig. 157, est trop petite pour avoir la position du point de vue et par conséquent pour en déduire la distance. Nous lèverons la difficulté en prenant sur l'épure de Y en T le tiers de la demi largeur du tableau; la ligne principale TS nous donne donc en TS le tiers de la distance. - Portons cette distance TS, de P en $\frac{1}{3}d$ sur le tableau nous aurons en $\frac{1}{3}d$ le point tiers de distance du petit tableau. - Ainsi une ligne telle que $1\frac{d}{3}$ du petit tableau fuirait à ce point tiers de distance. Mais le grand tableau étant une amplification du petit tableau si, par le point 1' (grand tableau) homologue du point 1 (petit tableau) nous menons une vraie parallèle 1'δ à $1\frac{d}{3}$, cette ligne 1'δ fuiera au point tiers de distance (inaccessible d'ailleurs) du grand tableau.

Fig. 158.



Cela fait, 1'δ est une ligne de résection $\frac{1}{3}$, donc elle recoupe les fuyantes 2', 3', 4' en des points qui appartiennent aux lignes de front, de trois en trois, c'est à dire aux lignes c, f, i. Nous les avons marquées en traits pleins sur le tableau.

Pour avoir les lignes intermédiaires a b - d e ...... 1° Nous menons des diagonales telles que 1'V - VV' - V'V''; 2° Nous divisons 0'1' en 3 parties égales aux points α, β; 3° Nous menons les fuyantes α P - β P et 4° Par les points de recoupement avec les diagonales nous traçons les lignes de front intermédiaires.

Le réseau est ainsi mis en perspective. - En menant les diagonales on aurait de nombreux points de vérification.

3° *Mise en perspective du plan.* - On placera les points les plus importants des courbes ou des lignes droites du plan et les lignes se traceront ensuite au sentiment. On considérera 4 catégories de points:

(a). Point tel que M (épure) placé au croisement de deux lignes du réseau. M sera le point $\overline{b.2}$, c'est à dire placé au croisement de la ligne b et de la ligne 2. On le place immédiatement en M sur le tableau au croisement des lignes b et 2 de la perspective.

(b) Point tel que N (de l'épure), placé sur la ligne de front e, entre les fuyantes $\bar{2}$ et $\bar{3}$. - On le placera de même en N sur le tableau, soit en évaluant sur le côté de front du petit carré le rapport de division à vue d'œil, soit en portant sur l'échelle des largeurs xy, un segment

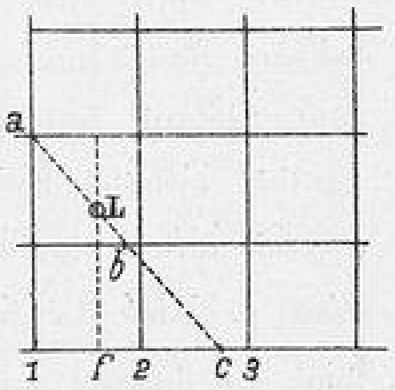
Σn égal au segment correspondant de l'épure et menant la fuyante P n N.

(C) Point tel que G (épure) placé sur une fuyante (Σ par exemple, entre les lignes de front b et c). On mène (tableau) la diagonale t u du petit carré; on porte le segment Σ G pris sur l'épure de 2 en t' sur la base x y du petit tableau qui est l'échelle des largeurs. On mène la fuyante p t' y, jusqu'en y sur la diagonale t u du petit carré et on trace la ligne de front y G.

(d) Point quelconque tel que L. On combine la mise en largeur et la mise en profondeur dans un carré en opérant comme nous venons de l'indiquer § b et § c.

Il serait plus commode encore pour un point tel que L (fig. 159) qui n'est pas situé sur une ligne de front, de le joindre au sommet d'un carré quelconque tel que a, et de prendre en b ou en c l'intersection de cette droite avec une ligne de front.

Fig. 159.



Le point a se mettra immédiatement en perspective; le point c se placera en appréciant le rapport dans lequel il divise le côté de front 2 3. — Ce rapport se conserve en perspective. Il suffira, le plus souvent de faire cette appréciation à vue. Par le point L sur l'épure on mènera une autre ligne, par exemple une ligne principale L f, on la mettra de même en perspective et le point L sera au croisement des deux lignes auxiliaires a L et L f.

4° *Mise en hauteur d'un point W.* — Supposons que l'on veuille mettre en hauteur le point W situé à plomb du point N, sachant que W est à 15 mètres de hauteur au-dessus de N. — Sur la ligne de front l, sur laquelle se trouve le point N on sait qu'une des divisions représente 5 mètres, on prendra donc la verticale N W égale à 15 mètres, c'est-à-dire à 3 divisions.

Nota. — Sur le tableau fig. 158, le plan n'est pas complètement mis en perspective. Il sera facile d'achever.

§ 113. — Généralisation de la mise au carreau.

Cette méthode, bien appliquée, est très exacte et surtout très rapide; Viollet Leduc, l'employait presque exclusivement pour la mise en place perspective des admirables dessins dont il a, avec tant de prodigalité et de talent, enrichi ses ouvrages.

Un dessinateur qui voudrait se spécialiser dans la mise en perspective pourrait s'organiser de la manière suivante :

D'une part il aurait une série de papiers <u>transparents</u> sur lesquels auraient été tracés des réseaux analogues à celui de la figure 157. Ces feuilles différeraient les unes des autres par les dimensions des côtés des cadres. Ayant un plan à mettre en perspective on placerait un de ces réseaux transparents sur le plan, en le fixant sur la planche par un moyen quelconque. De cette façon on n'aurait pas à tracer le réseau sur l'épure, laquelle resterait intacte et sans aucune ligne de construction.

D'autre part, sur des feuilles blanches, non transparentes cette fois, on aurait à l'avance exécuté des perspectives de ces réseaux, analogues à la figure 158, avant qu'on n'y ait rien dessiné. Ces réseaux perspectifs différeraient les uns des autres par l'écartement des lignes et par la hauteur d'horizon.

Cela fait : sur le réseau perspectif que l'on aurait choisi, on fixerait une feuille de <u>papier</u>

transparent, ayant les dimensions que l'on veut donner au tableau et c'est sur elle que sans avoir à retracer le réseau perspectif, puisqu'il apparaîtrait au travers, on exécuterait directement la perspective du géométral donné.

De cette façon, grâce à cette double collection de quadrillages géométraux et de quadrillages perspectifs, les premiers sur calque et les seconds sur feuilles ordinaires il serait possible d'exécuter les perspectives les plus compliquées sans faire, pour ainsi dire, aucune construction graphique auxiliaire.

C. - Perspective des Élévations

C. – Perspective des Élévations ou mise en hauteur.

12e Leçon. § 114. – Problème. – Étant donné : la projection m d'un point sur le géométral et connaissant sa hauteur vraie h au-dessus du géométral, construire la perspective M de ce point. – Cette opération se nomme la mise en hauteur du point M. (fig 160).

Si la perspective du plan a été faite comme nous l'avons indiqué dans les leçons précédentes, il existera toujours un plan de front x y, celui que nous avons appelé le petit tableau, dont nous connaîtrons l'échelle. – Supposons que cette échelle soit ici 1/200, c'est à dire de cinq millimètres pour un mètre. Si au lieu d'être en m le point était reporté en m'' sur la base x y du petit tableau, base que nous avons appelé l'Échelle des largeurs, en prenant la verticale m''M'' égale à la hauteur h donnée, réduite à l'échelle (ici nous l'avons supposée de 3m,50) ; le point M'' serait mis en hauteur.

Cela posé, menons par m une fuyante quelconque p m.

Par le point m'' où elle rencontre l'Échelle des largeurs, menons la verticale m''M'' = 3m,50 hauteur donnée, à l'échelle ; puis la fuyante p M'' jusqu'à la rencontre en M avec la verticale du point m. – On aura évidemment, dans l'espace, m M = m''M'', mais m''M'' = h = 3m,50 donc le point M est bien dans l'espace à une hauteur h au-dessus de la projection m. M est donc le point cherché.

§ 115. – Emploi d'un mur fuyant auxiliaire. – Échelle des hauteurs.

La construction précédente aurait pour inconvénient de tracer de nombreuses lignes dans la partie importante du Tableau. – Lorsque l'on a une série de points à mettre en hauteur, on procède comme il suit :

Sur le côté du tableau, en h'V on trace une fuyante quelconque ayant une inclinaison aussi voisine que possible de 45°, afin de donner plus de précision aux recoupements.

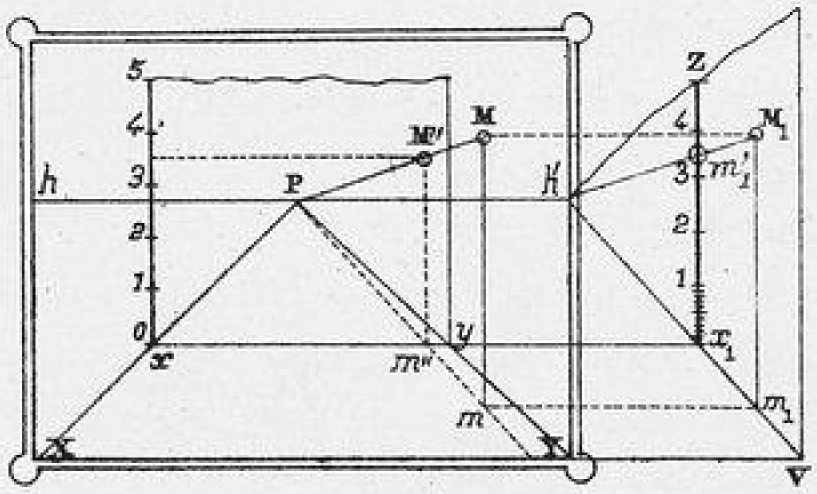
Cette droite est la trace sur le géométral d'un mur vertical fuyant.

Soit x_1 le point où l'échelle des largeurs rencontre la trace h'V de ce plan. La verticale $x_1 Z$ se nomme Échelle des hauteurs. Il est évident que toute hauteur portée sur cette droite se perspective à la grandeur qu'elle posséderait sur l'Épure ; ou pour parler plus généralement, se perspective à l'échelle qui caractérise le plan de front $x\ y\ x_1$.

Cela fait : pour mettre le point M en perspective, on porte, à l'échelle voulue sa hauteur h de x_1 en m'_1 sur l'échelle des hauteurs. – On trace la fuyante $h'm'_1$ dans le mur fuyant. – On l'arrête en M_1 sur la verticale du plan de front qui passerait par m. – Puis on reporte la hauteur $m_1 M_1$ sur la verticale du point m, de m en M ce qui donne le point cherché.

On remarquera que dans une épure faite par cette méthode, sur une planche à dessin, toutes les lignes de construction se tracent avec

Fig 160.



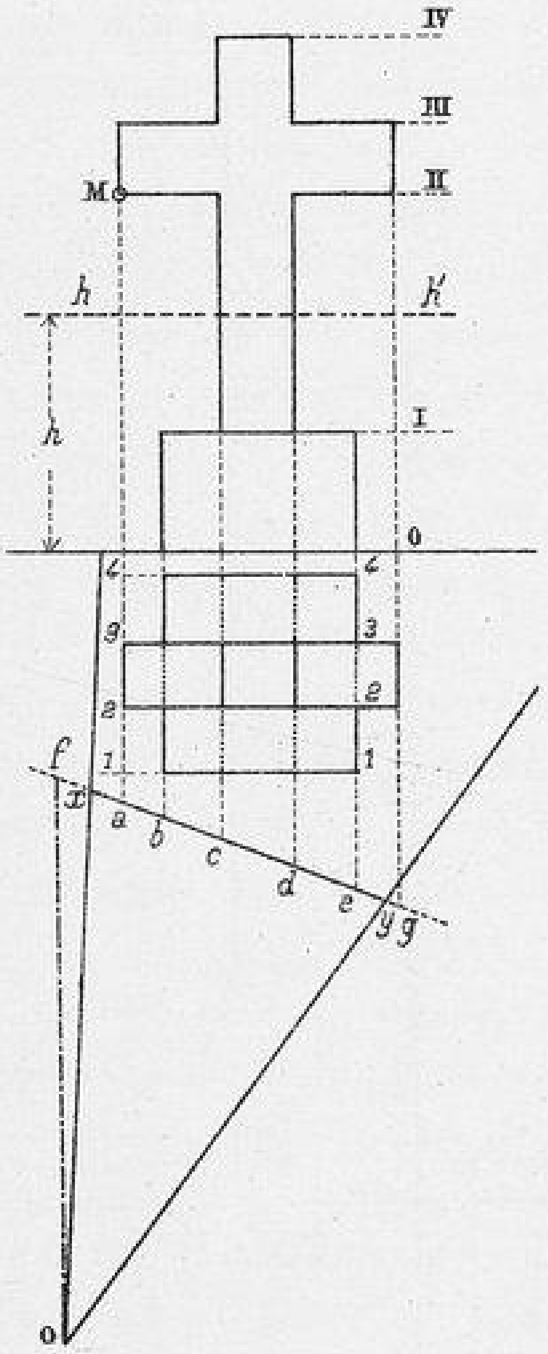
le T et avec l'équerre, ce qui permet de les exécuter rapidement et presque sans laisser de trace sur l'épure.

Si l'élévation et le plan n'étaient pas donnés à la même échelle sur l'épure, l'échelle des largeurs et l'échelle des hauteurs ne seraient pas dans un même plan de front.

§ 116. – Application à la perspective d'une croix.

(a). Epure: On a (fig. 161) l'épure géométrale de la croix en plan et élévation – x y est la base du tableau, O le point de vue – h h' la hauteur d'horizon.

Fig 161.



Les Dominantes du plan sont les lignes a, b, c, d, e, g, dont le point de fuite f est accessible.

(b) Perspective du plan sur un géométral abaissé. – Nous prenons comme cela a été dit plus haut en x y un petit tableau égal en grandeur à celui de l'épure – Le point de fuite est reporté en f; nous menons les fuyantes f x – f y et nous les arrêtons en X et Y lorsque la largeur XY est celle que nous voulons donner au tableau (Le petit tableau x y avait 31^{mm} de large; le grand tableau en a 88; le rapport d'amplification est donc $\frac{88}{31}$, il est compliqué).

Seulement nous descendons XY en X'Y' aussi bas que la feuille de papier le permet, et, gardant le même horizon h h', c'est sur un géométral qui aurait X'Y' pour ligne de terre, c'est à dire abaissé au-dessous du vrai géométral XY de toute la hauteur XX' que nous faisons la perspective du plan.

On voit cette perspective en 1 4 m n etc.....

Il est inutile d'expliquer comment elle a été obtenue (voir §§ 80 et 81).

(c) Mise en hauteur. – Nous remarquons (épure) que les points de l'objet à représenter sont à cinq niveaux différents; il y en a sur le sol (hauteur zéro) puis aux niveaux indiqués en chiffres romains I. II. III. IV.

Nous prenons, sur la droite, en disposant de la place libre qui reste sur la feuille, un mur vertical fuyant: H'α est sa trace sur le géométral (niveau zéro) et H'α' sa trace sur le géométral abaissé.

En OZ dans le plan de front du petit tableau, nous traçons une verticale qui est l'échelle des hauteurs, et nous y reportons en I, II, III, IV les différents niveaux.

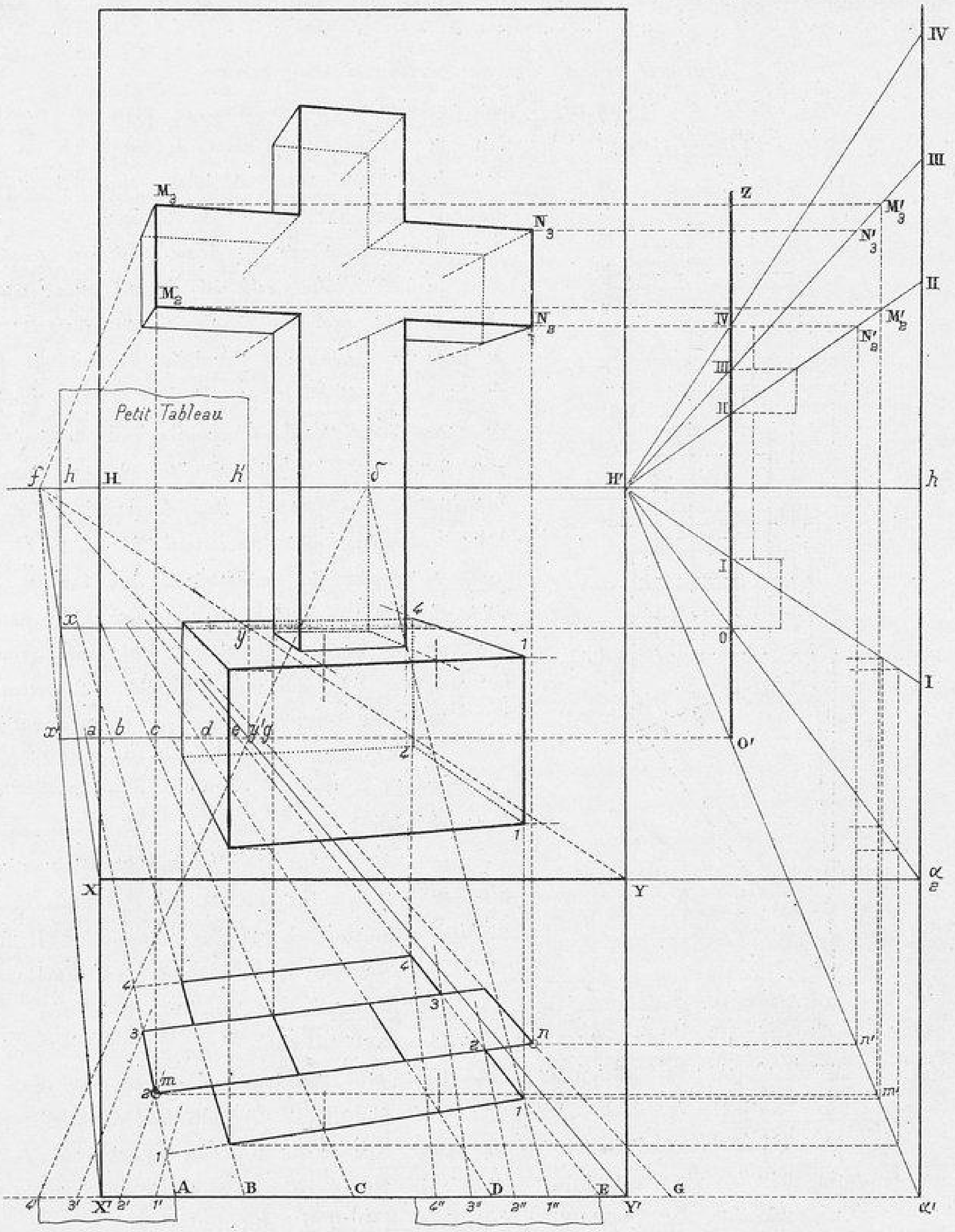
Le croquis de la moitié de la croix que l'on voit en pointillé à droite de l'échelle des hauteurs aide à se reconnaître dans ces différents niveaux.

Nous menons les fuyantes horizontales H'I, H'II, etc......

Cela fait: soit à mettre le point M (Epure, fig. 161) en hauteur: Il est au niveau N° II. Sa perspective sur le géométral abaissé est m. – On mène la ligne de front m m' jusqu'à la rencontre en m' avec H'α' – On mène la verticale m' M_2 que l'on arrête en M'_2 au niveau N° II,

et on reporte finalement M'_2 en M_2 à plomb du point m, par une ligne de front $M'_2 M_2$.

Fig. 162.



On opérera de même pour un certain nombre de points convenablement choisis. Avec un peu d'habitude, cette mise en hauteur se fait très vite et presque sans laisser de traces sur le

tableau, car il n'y a pas besoin de dessiner les lignes de construction dans toute leur longueur.

La considération du point de fuite accessible f, auquel doivent converger toutes les dominantes, donnera des vérifications nombreuses et permettra de réduire considérablement les points à mettre directement en hauteur.

Perspective directe dans l'espace.

§ 117. – Représentation perspective d'un point du géométral.

De même que pour le géométral nous avons à donner des méthodes permettant de résoudre directement des problèmes sur des figures déjà mises en perspective par les procédés généraux. Il importe d'abord d'être fixé sur la position perspective d'un point du géométral suivant que ce point est situé : 1° dans la partie réelle (c'est à dire au-delà du tableau) ; 2° dans la partie intermédiaire (entre le tableau et le plan de front du spectateur ou plan neutre) ; 3° dans le plan neutre ; 4° dans la région virtuelle (c'est-à dire en arrière du plan neutre).

La figure 163 montre tous ces cas.

1° Le point a est dans la région réelle ; sa perspective a' (voir le tableau fig. 164) est au-dessous de l'horizon, mais au-dessus de la ligne de terre XY, ou base du tableau.

2° Le point b, dans la région intermédiaire, a sa perspective b' située au-dessous de la ligne de terre, en dehors du cadre.

3° Le point g situé dans le plan neutre aurait sa perspective à l'infini.

4° Enfin le point c, dans la région virtuelle a une perspective c' tout à fait de convention, puisque le rayon visuel cO, passe par l'œil avant de percer le tableau : aussi dit-on que c'est un point virtuel.

Fig. 163.

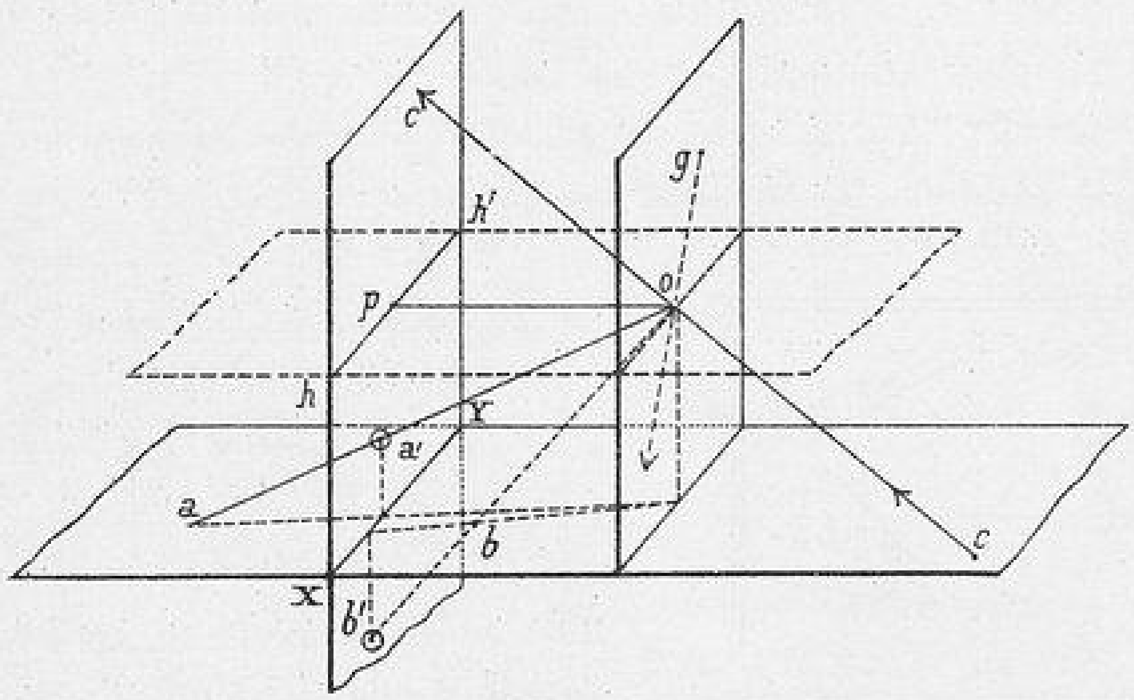
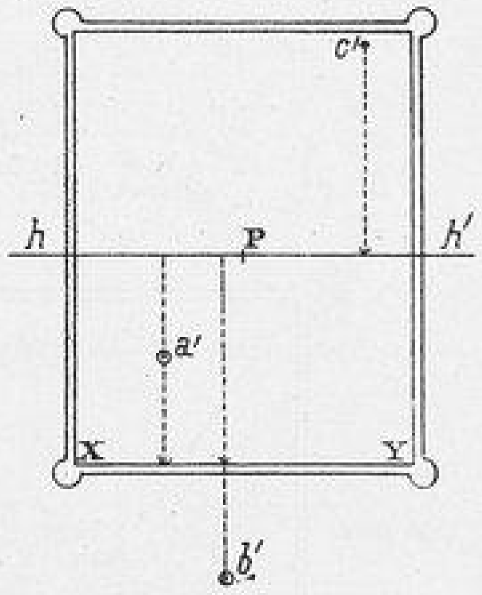


Fig. 164.



Nous aurons, pour les problèmes d'ombre, à faire usage de points virtuels analogues au point c'. – Sur le tableau (fig. 164), la perspective c' se trouve au-dessus de l'horizon. Il y a dans ce cas un renversement apparent des positions occupées par le point c et par sa perspective, renversement avec lequel il faut se familiariser. Ainsi le point c, est au-dessous du plan d'horizon, sa perspective c' se tient au contraire au-dessus. – Le point c était à gauche du point de vue O ;

sa perspective C' se trouve au contraire à droite du point principal P.

§ 118. – Perspective d'un point de l'espace. (fig. 165).

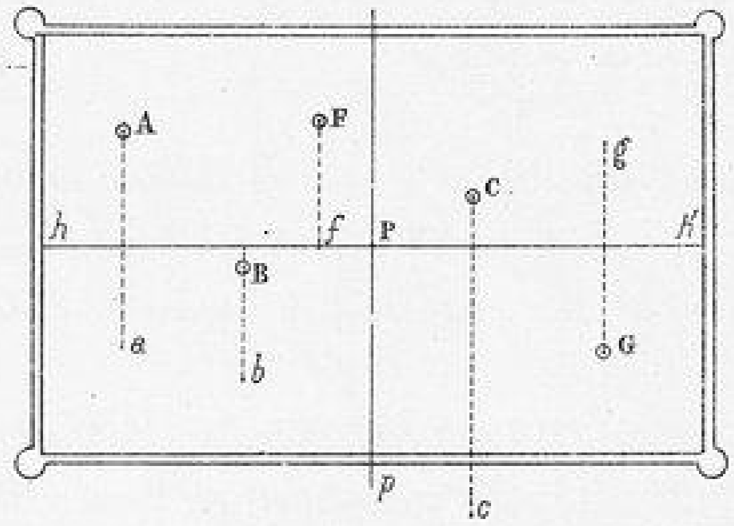
Un point, pour être bien déterminé, doit être donné sur un tableau par sa perspective propre A, et sa perspective géométrale a, c'est à dire la perspective de sa projection a sur le géométral. Par conséquent nous désignerons toujours un point par deux lettres; la grande lettre s'appliquera au point lui-même et la petite lettre à sa projection géométrale.

1° Aa, représente un point dans l'espace réel: le point A est situé au-dessus de l'horizon.

2° Bb, est aussi un point réel, mais il est placé au-dessous de l'horizon.

3° Ff, est un point situé à l'infini: Je le reconnais à ce que son géométral f est placé sur l'horizon, c'est à dire à l'infini. F sera un point de fuite.

Fig. 165.



4° Cc est un point intermédiaire.

5° Gg est un point virtuel: Je le reconnais, à priori, à ce que son géométral g est au-dessus de l'horizon.

Le point G est donc situé derrière le spectateur. Pour mieux juger encore de sa position je dirai: G apparaît en perspective, à <u>droite</u> de la verticale principale Pp. Donc, en réalité, à cause du renversement, le point G de l'espace est à gauche du spectateur. La perspective G est au-<u>dessous</u> de l'horizon. Donc, le point de l'espace est au-<u>dessus</u> du plan d'horizon.

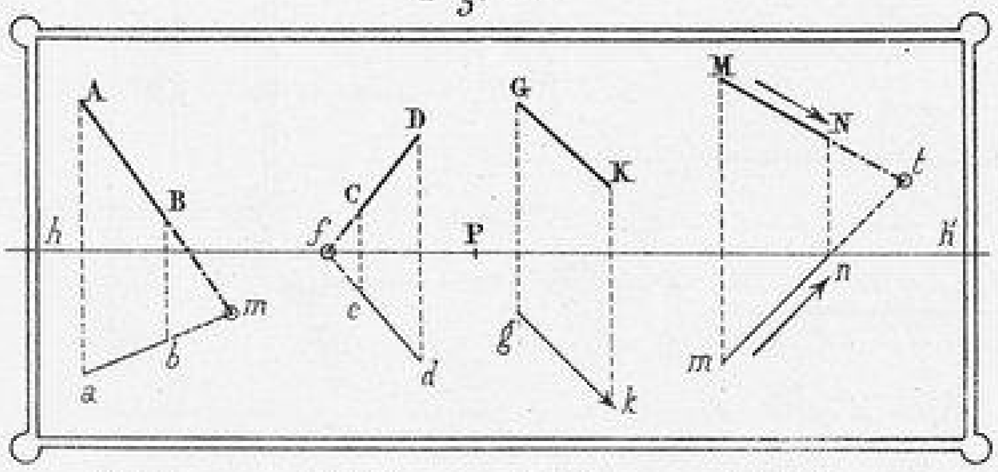
§ 119. – Perspective d'une droite. – Recherche de sa trace géométrale. (fig. 166).

Il suffit de prolonger la droite de l'espace jusqu'à la rencontre avec la droite en géométral.

1er Cas: droite AB – ab. La trace géométrale m est réelle.

2e Cas: droite CD – cd. La trace géométrale est à l'infini en f sur l'horizon: La droite AB de l'espace est horizontale et parallèle à la droite en géométral ab.

Fig. 166.



3e cas: GK de l'espace est parallèle, sur le tableau, à son géométral gk; – ce n'est pas une ligne de front, on le reconnaît à ce que le géométral gk n'est pas parallèle à la ligne d'horizon; On en conclut que GK et son géométral gk loin d'être parallèles dans l'espace se rencontrent, au contraire, dans le plan neutre.

4e cas: Droite GM – gm. La trace est virtuelle, et obtenue en t: ce qui veut dire que la droite perce le géométral en arrière du Spectateur; et de plus, comme t apparaît à <u>droite</u> du point principal P le point t, de l'espace en vertu du renversement des figures virtuelles est en réalité à <u>gauche</u> et en arrière du Spectateur.

§ 120. – Problème 1. – (fig. 166 bis). – Trouver l'intersection d'une droite AB – ab et d'un plan vertical KLk (un pareil plan se nomme un mur).

Solution : Un mur se projette géométralement tout entier suivant sa trace géométrale Kl : Par conséquent en relevant par une verticale le point m (où la droite en géométral rencontre la trace du mur) en M sur la droite on a le point cherché.

Fig. 166 bis

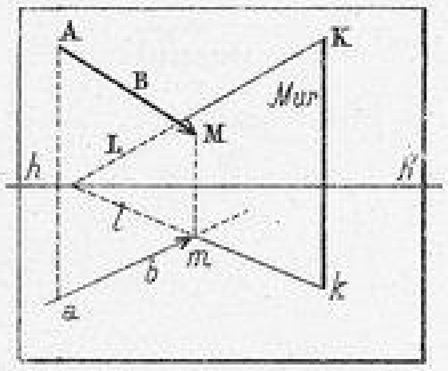
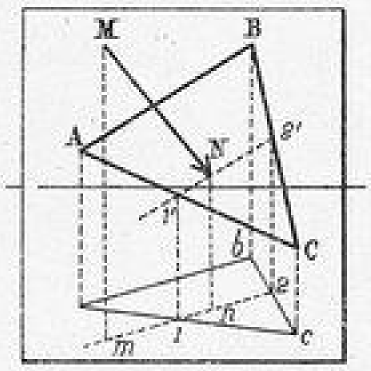


Fig. 167

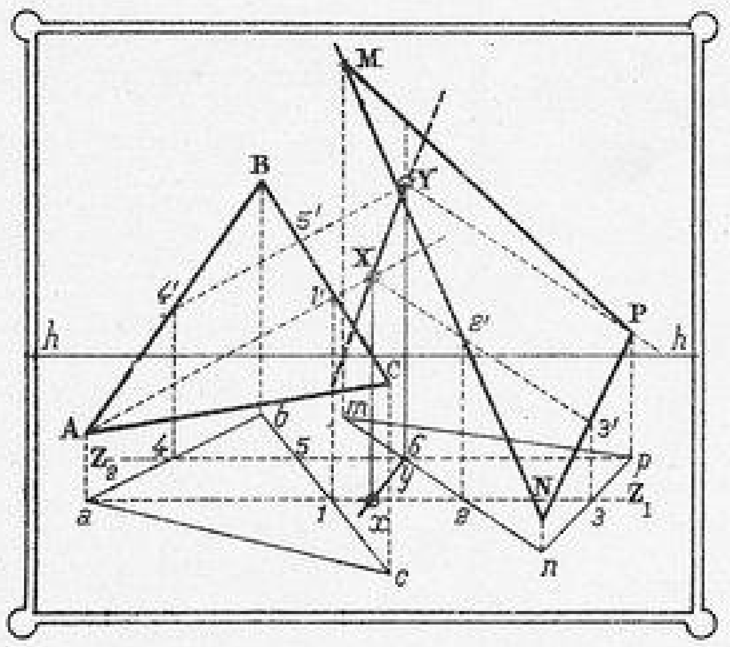


§ 121. – Problème 2. – (fig. 167). – Trouver l'intersection d'une droite quelconque MN-mn et d'un plan quelconque défini par 3 points Aa - Bb - Cc.

Solution : 1° Par la droite on fait passer un mur auxiliaire dont la trace géométrale est mn. 2° On prend en 1 relevé en 1' et en 2 relevé en 2' les intersections de ce mur avec les droites AC et BC du triangle, ce qui donne en 1'2' dans l'espace l'intersection auxiliaire du mur et du triangle. 3° Le point Nn où la ligne de l'espace recoupe 1'2' est le point d'intersection cherché.

§ 122. – Problème 3. – Trouver l'intersection de deux plans (fig. 168).

Fig. 168.



Nous supposons chacun des plans défini par trois points qui sont sur le tableau, les sommets Aa - Bb - Cc et Mm Nn Pp de deux triangles.

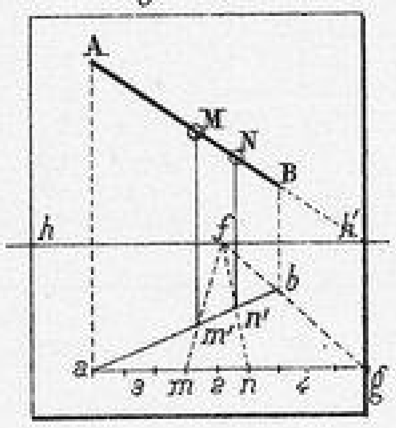
Solution : On coupe par deux plans de front auxiliaires. Le premier Z_1 donne dans chaque triangle une ligne de front, savoir : a1 – A1' dans le premier et 2 3 – 2'3' dans le second. Ces lignes se recoupent en un point Xx qui est un premier point de l'intersection. Un deuxième plan de front Z_2 donnera un second point Yy.

L'intersection est XY – xy.

Nota. – Le tracé précédent montre comment on obtient une ligne de front d'un plan quelconque.

§ 123. – Problème 4. – Partager une droite de l'espace en parties proportionnelles à des longueurs ou à des nombres donnés. (fig. 169).

Fig. 169.



Soit AB - ab la droite à partager en trois parties qui soient entre elles comme les nombres 3, 2 et 4.

Solution : 1° Par le procédé connu on partage aux points m' et n' le géométral ab de la droite dans les rapports donnés. 2° On remonte par des verticales, des points m' et n' aux points M et N dans l'espace.

Applications.

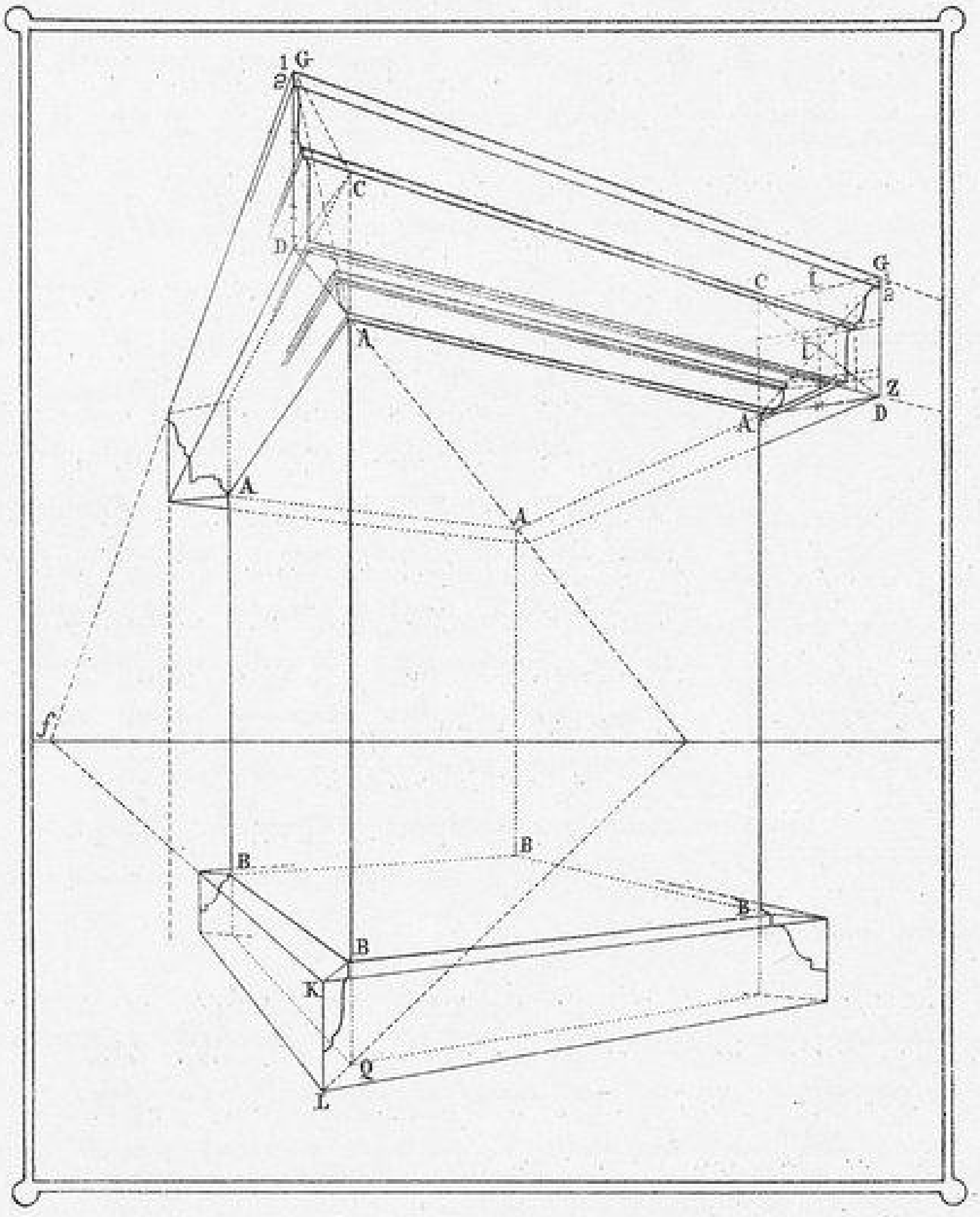
13e Leçon. ## Perspective des moulures.

§ 124. – Les moulures qui couronnent un édifice ou une partie d'édifice doivent avoir leur perspective bien en rapport avec la masse qu'elles accompagnent ; c'est pourquoi on les met presque toujours en perspective par les méthodes directes, sans revenir à l'épure géométrale et en acceptant comme bien mises en place les masses ou épannelages (1) des moulures. Il suffit de connaître à une échelle quelconque le profil exact de la moulure, profil encadré dans son épannelage, pour la mettre ensuite en perspective, en employant, comme nous allons le montrer, des échelles divergentes, construites spécialement pour chaque cas.

§ 125. – Moulures d'un piédestal isolé.

1° Nous supposons d'abord que la masse AA-BB... du piédestal a été mise en perspective (fig. 170) par les méthodes générales ainsi que l'épannelage ACGD du couronnement et celui BKLQ du soubassement. Ces épannelages affectent ici la forme de parallélipipèdes rectangles. On les comprendra parfaitement en observant sur un édifice en construction les masses de pierre que les appareilleurs livrent aux sculpteurs lorsque le gros œuvre de la construction est terminé.

Fig. 170.



2° On se donne (fig. 171) à une échelle quelconque le profil exact des moulures. Autour de ce profil on trace en A'D'G'C' et en B'K'L'Q' l'épannelage correspondant à celui qui a été mis en perspective.

On prend en 1. 2. 3. 4 .... 12 les points importants de ce profil et on les projette sur les côtés du rectangle d'épannelage ; on a soin, de plus, de prendre le centre I du rectangle d'épannelage et de le projeter aussi sur les côtés.

3° On construit en S et en T deux échelles divergentes répondant à ces points de division des côtés du rectangle. L'échelle S sera

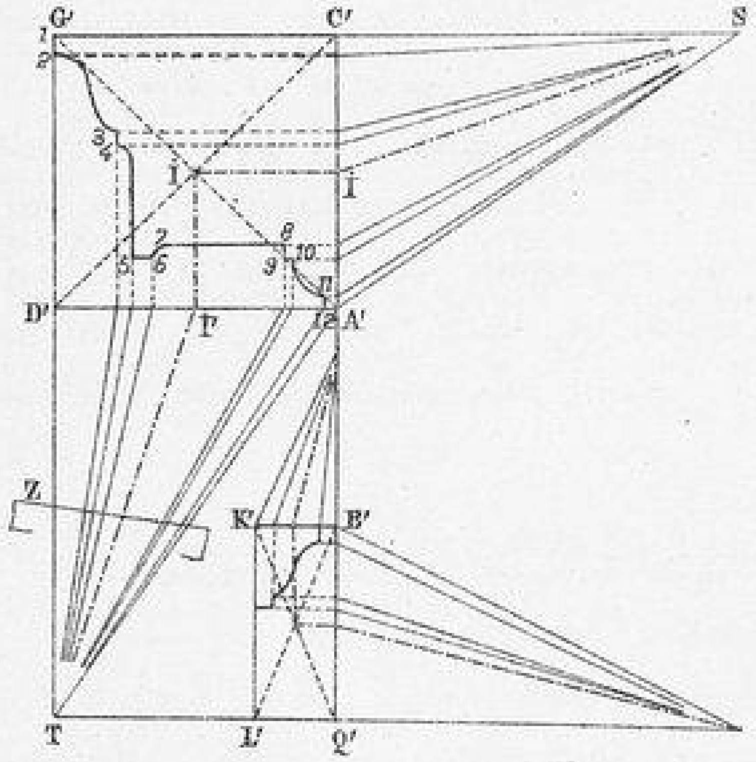
---

(1) L'épannelage d'une moulure est le bloc de pierre de forme simple, en général, dans l'intérieur duquel on vient ensuite sculpter ou traîner la moulure.

l'échelle des hauteurs. L'échelle T sera l'échelle des largeurs.

On sait que pour se servir perspectivement d'une pareille échelle il faut trois points c'est à dire trois lignes de repère. Ces trois lignes seront SC' SA' et la ligne milieu SI'.

Fig. 171.



Cela posé revenons au tableau.

Remarquons d'abord que si l'on coupe une moulure cylindrique par un plan de section droite et par d'autres plans de sections obliques, les sections obliques seront toutes différentes de la section droite mais les ordonnées et les abscisses, autrement dit, les hauteurs et les largeurs de toutes les sections resteront proportionnelles entre elles.

La section oblique sera une dilation en largeur et, quelquefois aussi en hauteur, de la section droite. Par conséquent, pour mettre en place les lignes de la moulure on pratiquera deux sections (droites ou obliques); on déterminera dans le rectangle d'épannelage qui leur correspond les points importants du profil et on joindra deux à deux les points qui se correspondent.

C'est à nous de choisir convenablement les plans de section:

Dans le cas actuel, qui est le cas ordinaire, les moulures se retournent d'une face sur l'autre, par l'intermédiaire d'un plan dit de <u>retournement</u>, qui est ordinairement le plan bissecteur du dièdre formé par les deux faces.

On choisira donc ce plan, car les points qu'on y aura placés serviront pour les deux faces.

L'épure perspective se comprend facilement.

1° On voit (fig. 170) en ACGD l'épannelage du plan de retournement. Les diagonales se croisent en I. - On relève à la bande de papier les trois points de repère CIG; On porte la bande de papier en Z sur l'échelle T des largeurs en s'appuyant sur les 3 lignes de repère - On marque les points de division - On reporte la bande de papier sur le tableau et on marque les points.

On fait de même pour les hauteurs, d'une part en CA, d'autre part en GD, et on déduit le profil perspectif 1, 2, 3, 4 ...... (voir en plus grand la figure 172).

Le reste de l'épure se comprend facilement.

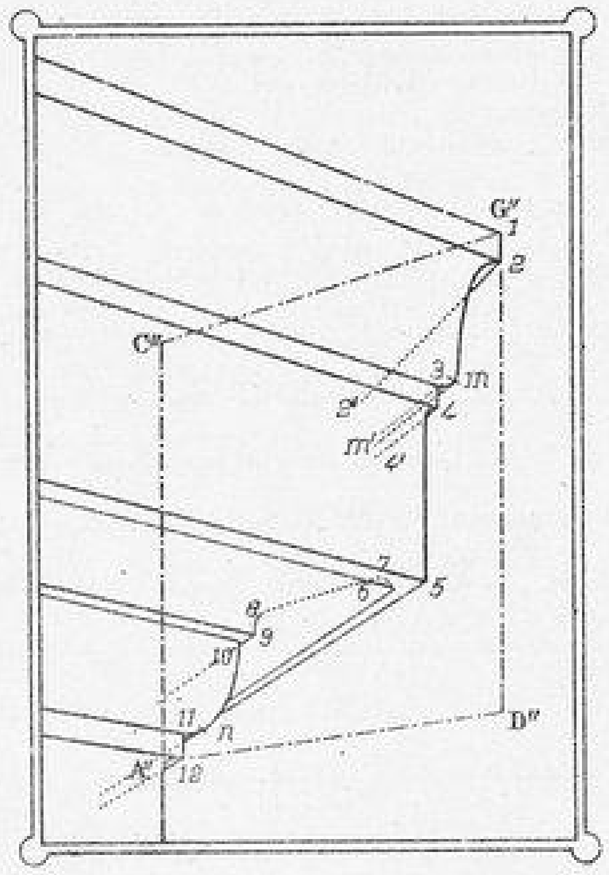
La figure 172, montre, en plus grand, les effets à observer aux environs du retournement.

On remarquera en particulier en dehors des lignes d'angle telles que 22'-33'-44'. etc.... les lignes tangentielles telles que mm'. Ces dernières sont des lignes de contour apparent.

On remarquera aussi que les dessous plans et horizontaux tels que celui qui est compris entre les lignes 5 et 6 doivent se retourner sans accuser de ligne d'intersection dans le plan de retournement.

Nota: 1° Pour ne pas embrouiller l'épure, le soubassement (fig. 170) ne comporte que les profils de retournement sans indication des constructions qui ont permis de les

Fig. 172.



obtenir. Il resterait à joindre les points qui se correspondent.

2° Dans la pratique, avec un peu d'habitude, les architectes tracent au sentiment les profils dans les rectangles d'épannelage. Comme ces profils s'étagent en général sur des lignes droites ayant des directions faciles à retrouver en partageant les côtés du rectangle dans des rapports simples, on met en place ces lignes d'étagement et, se guidant sur elles, on trace ensuite, au sentiment, le profil en perspective; mais cela demande une certaine habitude du dessin.

§126. Moulures d'un fronton.

Les frontons sont formés par des moulures à arêtes parallèles, mais inclinées sur le plan horizontal. - Les moulures d'un fronton ne sont autre chose que celles de la corniche que l'on incline en leur gardant la même section droite MN. - Une section verticale AB CD faite à la fois sur le fronton et sur la corniche, donne un profil a b c d f g sur le fronton ayant les mêmes saillies que le profil c'd'f'g' de la corniche, mais des hauteurs plus grandes.

Fig. 173.

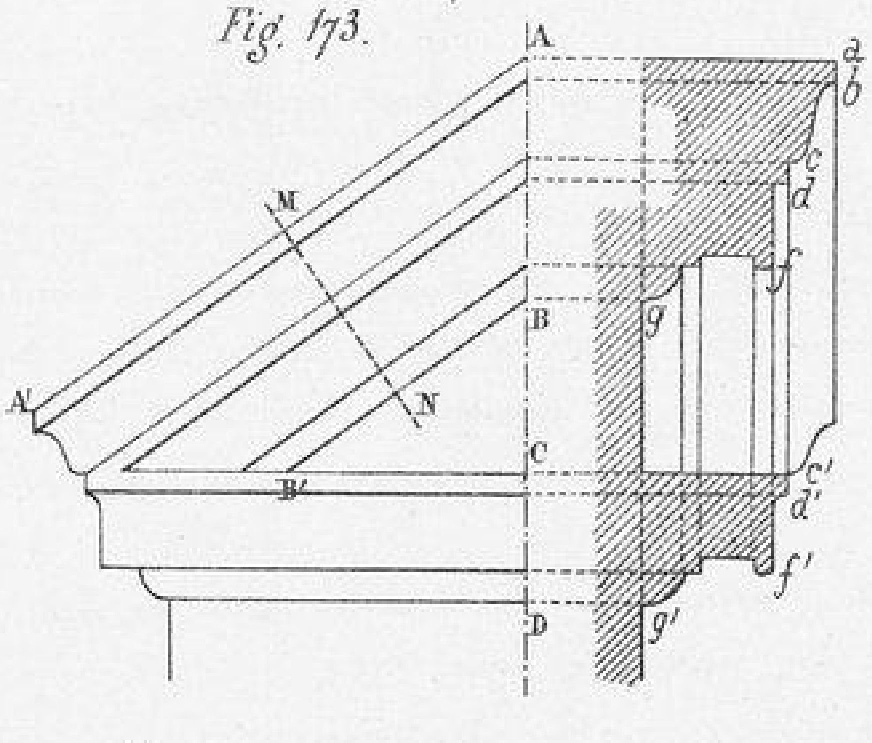
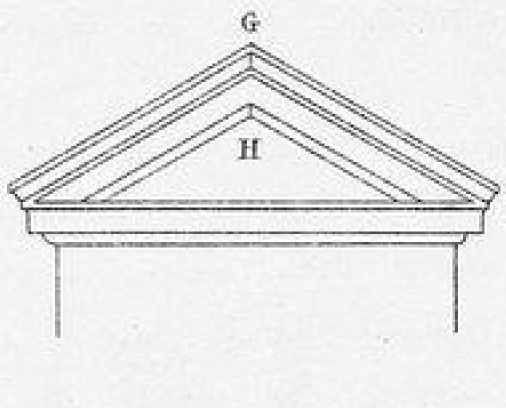


Fig. 174.



Pour mettre un fronton en perspective, on établira par les méthodes générales la perspective des lignes extrêmes AA' et BB', puis on déterminera comme ci-dessus deux profils verticaux tels que AB, ce qui suffira.

On fera bien de choisir le profil vertical GH, (fig. 174.) suivant lequel se coupent les deux rampants du fronton, parce qu'il servira pour chacun d'eux.

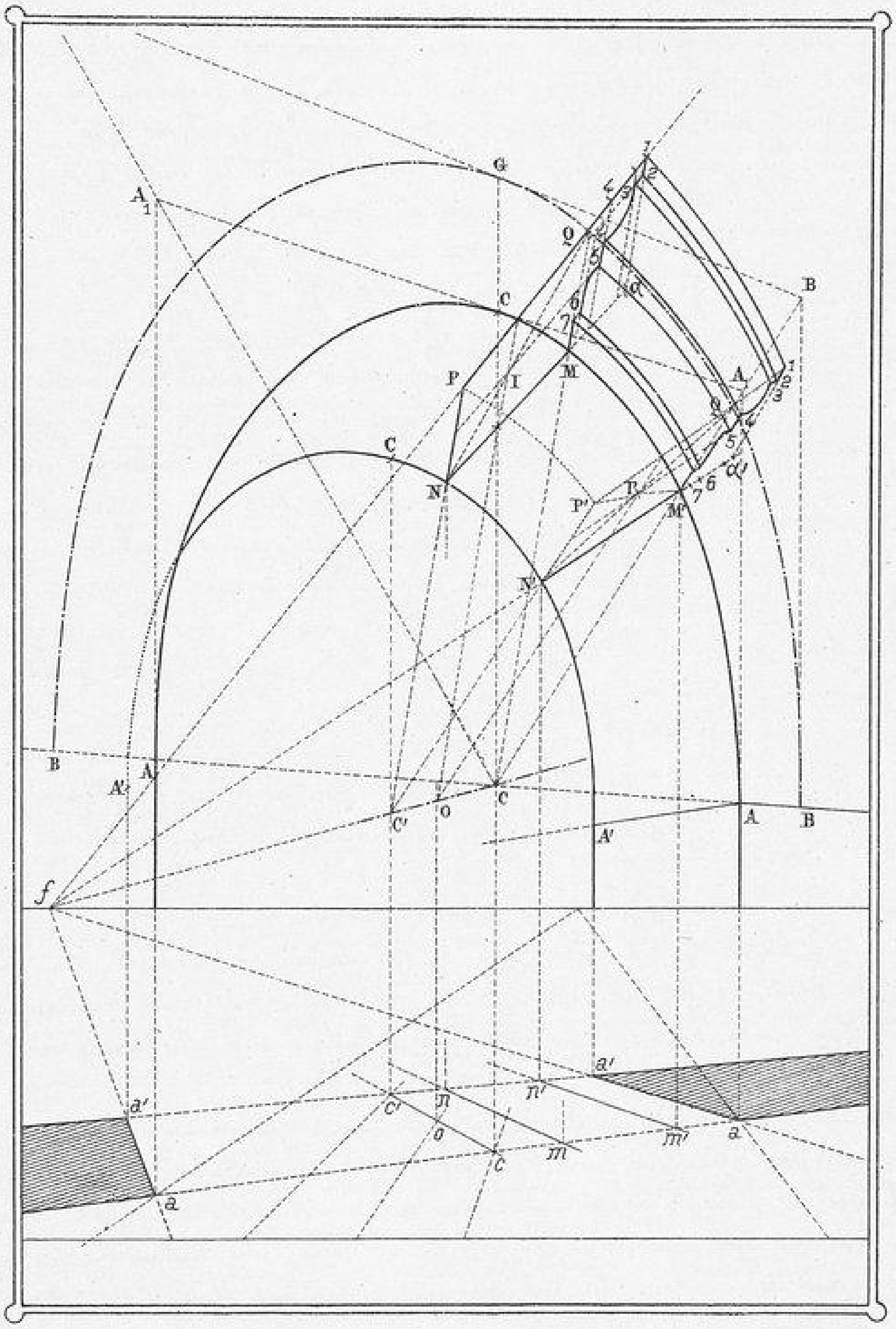
§127. Moulures circulaires.

Comme exemple nous prendrons les moulures d'une archivolte couronnant une arcade.

(A) Les masses (fig. 175) - 1° La masse de l'arcade a été mise en perspective par les méthodes générales.

Un géométral quelconque donne en a a - a'a' le plan de l'arcade. - Le carré circonscrit au cercle d'ouverture de l'arcade est mis en perspective en AAA,A, par la méthode générale de mise en hauteur. (L'épure ne porte pas trace de ces diverses constructions préalables).

Fig. 175.



Du carré circonscrit AAAA on déduit l'ellipse perspective du cercle exactement comme on l'a fait dans la perspective du géométral, soit en se contentant de trouver le point milieu C, et les points à 45° situés sur les diagonales du carré, soit, si l'arcade est divisé en voussoirs dont on veuille dessiner les joints, en construisant une échelle circulaire divergente répondant au nombre donné de voussoirs.

3° Le cercle extérieur de l'arcade BGQB....... est déduit du cercle qui vient d'être tracé en employant la méthode donnée déjà pour les cercles concentriques. D'ailleurs son carré circonscrit possède les mêmes diagonales que le carré qui a déjà servi.

4° Des cercles tracés dans le plan de la face antérieure a a de l'arcade on déduit les points NP.... N'P' qui leur correspondent sur le plan de la face postérieure a'a', de la manière suivante :

M' a pour géométral m' ; on mène la génératrice M'N'f dont on a le point de fuite accessible, en f. Son géométral est m'n'f, que l'on arrête en n' sur le plan a a' ; on remonte ensuite, par une verticale de n' en N'.

On a en C et C' les centres des deux cercles parallèles, par conséquent joignant CM' CN' et menant la fuyante Q'f, on complètera facilement en M'N'P'Q' la perspective du rectangle de joint. On opérera de même pour un autre joint MNPQ et pour tous les autres.

On remarquera que les figures MNPQ, M'N'P'Q', sont des quadrilatères tout à fait quelconques.

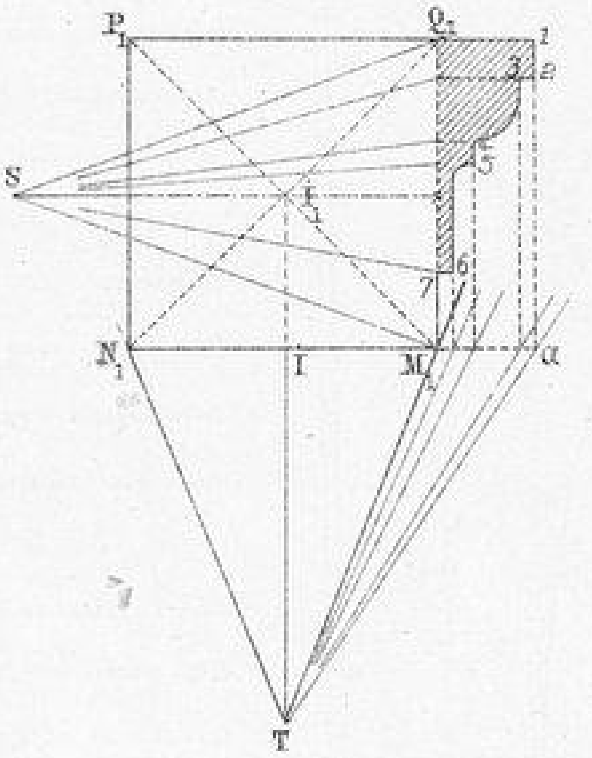
A ce moment le dessin des masses est terminé.

(B) Les détails : 1° On a (fig. 176) en vraie grandeur ou à une échelle donnée, le profil exact 1.2.3.4...... de l'archivolte débordant le profil $P_1 Q_1 M_1 N_1$ du rectangle de joint.

On construit en S et T des échelles divergentes : l'échelle S répond aux hauteurs, l'échelle T aux largeurs, et comme toujours on prend pour troisième repère le centre I du rectangle.

2° Cela fait, sur le tableau (fig. 175) nous allons reporter perspectivement le profil de l'archivolte sur chacun des plans de joint ; par exemple sur le plan de joint MNPQ.

Fig. 176.



A cet effet nous menons les diagonales ce qui donne le centre I ; nous avons, au préalable, cherché en O, le milieu perspectif de la ligne des centres CC', et joignant d'une part IO et IS, nous trouvons ainsi les milieux perspectifs des quatre côtés du rectangle MNPQ. Dès lors, sur chaque côté, nous avons les trois repères voulus pour appliquer les échelles comme cela a été indiqué plusieurs fois.

Nous obtenons ainsi le profil en perspective 1.2.3.....

3° On opérera de même pour le joint M'N'P'Q' et pour tous les autres.

4° On joindra, finalement, tous les points analogues des différents profils par des arcs d'ellipse.

Nota : Sur le croquis ci-contre les ellipses ne sont tracées que pour un voussoir.

§ 128. – Perspective des surfaces de révolution.

Nous étudierons d'abord le cas où l'axe de la surface est vertical. Plus loin lorsque nous aurons traité les problèmes de perspective directe dans l'espace, nous indiquerons la marche à suivre pour mettre en perspective des surfaces de révolution dont les axes sont dirigés d'une manière quelconque.

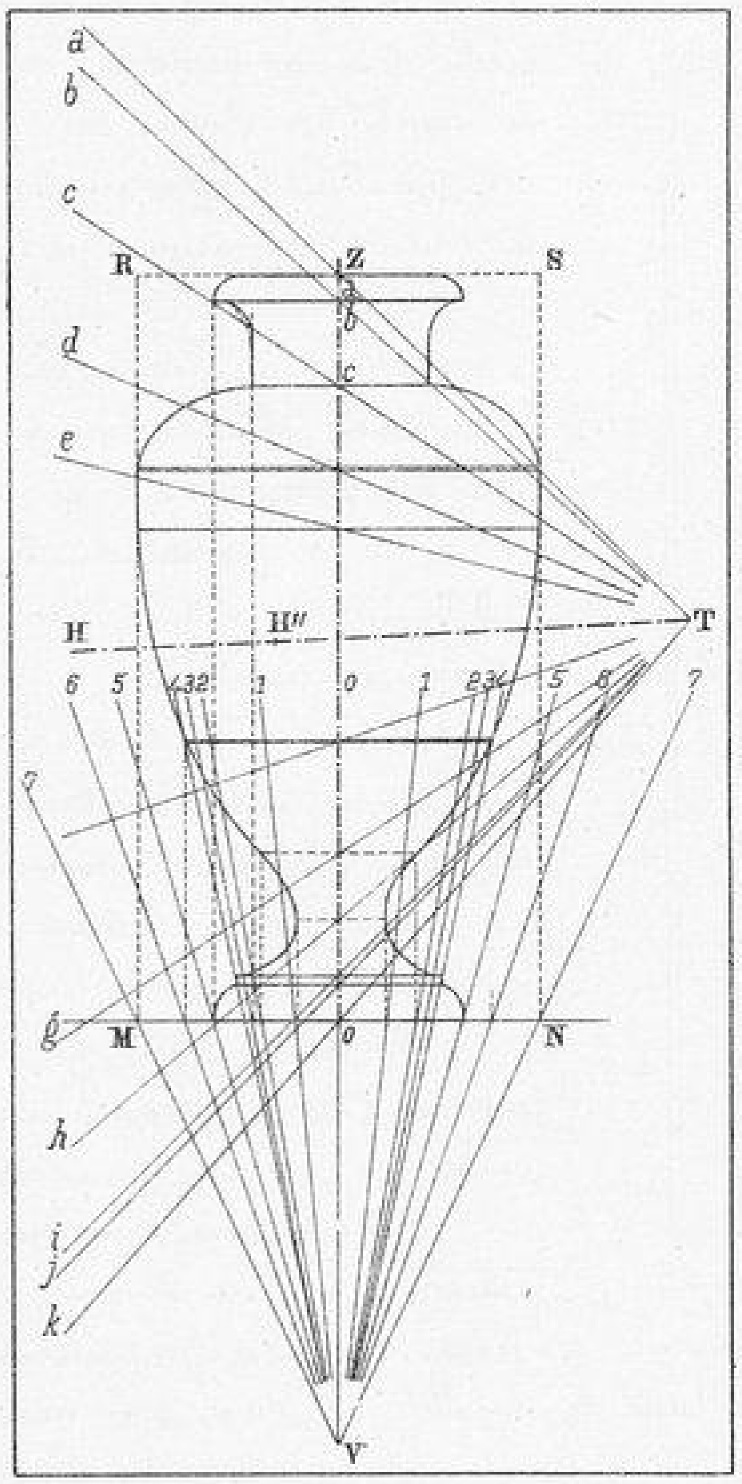
Méthode pratique : La méthode pratique, la seule qui soit d'un usage commode en dessin consiste : 1° à mettre en perspective une série de méridiens, en général également espacés ; 2° à joindre par des ellipses les points correspondants de ces méridiens ; ces ellipses seront les perspectives de parallèles de la surface convenablement choisis ; 3° à tracer, au sentiment, une courbe enveloppant tous les parallèles et tous les méridiens, c'est-à-dire leur étant tangente, exactement comme nous avons fait dans les questions d'ombre. Cette courbe enveloppe sera le contour apparent perspectif de la surface ; 4° à observer la loi des points de passage. Nous indiquerons tout à l'heure en quoi cela consiste.

§ 129. – Soit (fig. 177) le profil d'un vase à une échelle déterminée. Ce profil s'enveloppe dans un rectangle d'épannelage MNRS ; nous prenons une série de parallèles et nous construisons deux échelles divergentes ; la première T relative aux hauteurs, la seconde V relative aux largeurs.

Cela posé, dans un tableau quelconque (fig. 178) dont on connaît le point principal P et le point tiers de distance $\frac{D}{3}$ on se donne une droite verticale OZ limitée en hauteur, et

quelconque. On suppose que cette droite est, en perspective, l'axe du vase dont nous avons le profil (fig. 177).

Fig. 177.



On demande sur ces seules données d'achever la perspective du vase. — Voici l'ordre des constructions.

(a) *Mise en place du cylindre d'épannelage.*

1° En M N R S (tableau) on construira en partant de OZ comme hauteur, un rectangle d'épannelage semblable à celui de la figure 177.

2° Se servant du point $\frac{D}{3}$, on établira, comme cela a été dit plus haut, la perspective du carré construit sur M N comme axe, et celle du cercle $M_1 M' M_2 M$..... inscrit dans ce carré. Ce cercle serait la base du cylindre d'épannelage dans lequel pourrait s'inscrire le vase.

3° On prendra dans ce cylindre plusieurs positions obliques au tableau telles que $M_1 N_1 R_1 S_1$ du rectangle d'épannelage. On prendrait aussi les positions $M'N'$ — $M_2 N_2$ etc.......

A ce sujet indiquons comment l'échelle divergente des hauteurs T (figure 177) peut facilement servir pour mettre en hauteur les points tels que R_1 et S_1. — On prend (tableau) sur le rectangle d'épannelage de front, et sur une bande de papier la hauteur MR. On a soin de marquer au passage le point H situé sur l'horizon; puis on inscrit cette bande de papier dans l'échelle T en la tenant bien verticale, et on y reporte le point H''; la ligne TH'' de l'échelle correspondra comme hauteur à l'horizon du tableau.

Cela fait: je veux mettre en hauteur non seulement le point R_1 (tableau) mais aussi les points b, c, d..... répondant aux parallèles de la surface. Alors sur une autre bande de papier, je prends (tableau) la distance de M_1 à la ligne d'horizon, j'inscris la bande de papier, tenue verticale, dans l'échelle T en me repérant sur la ligne inférieure Tk et sur l'horizon, je marque tous les points de rencontre avec les lignes de l'échelle y compris le point le plus haut a et, finalement je reporte la division sur la verticale $M_1 R_1$ du tableau.

(b) *Mise en place perspective des principaux méridiens.*

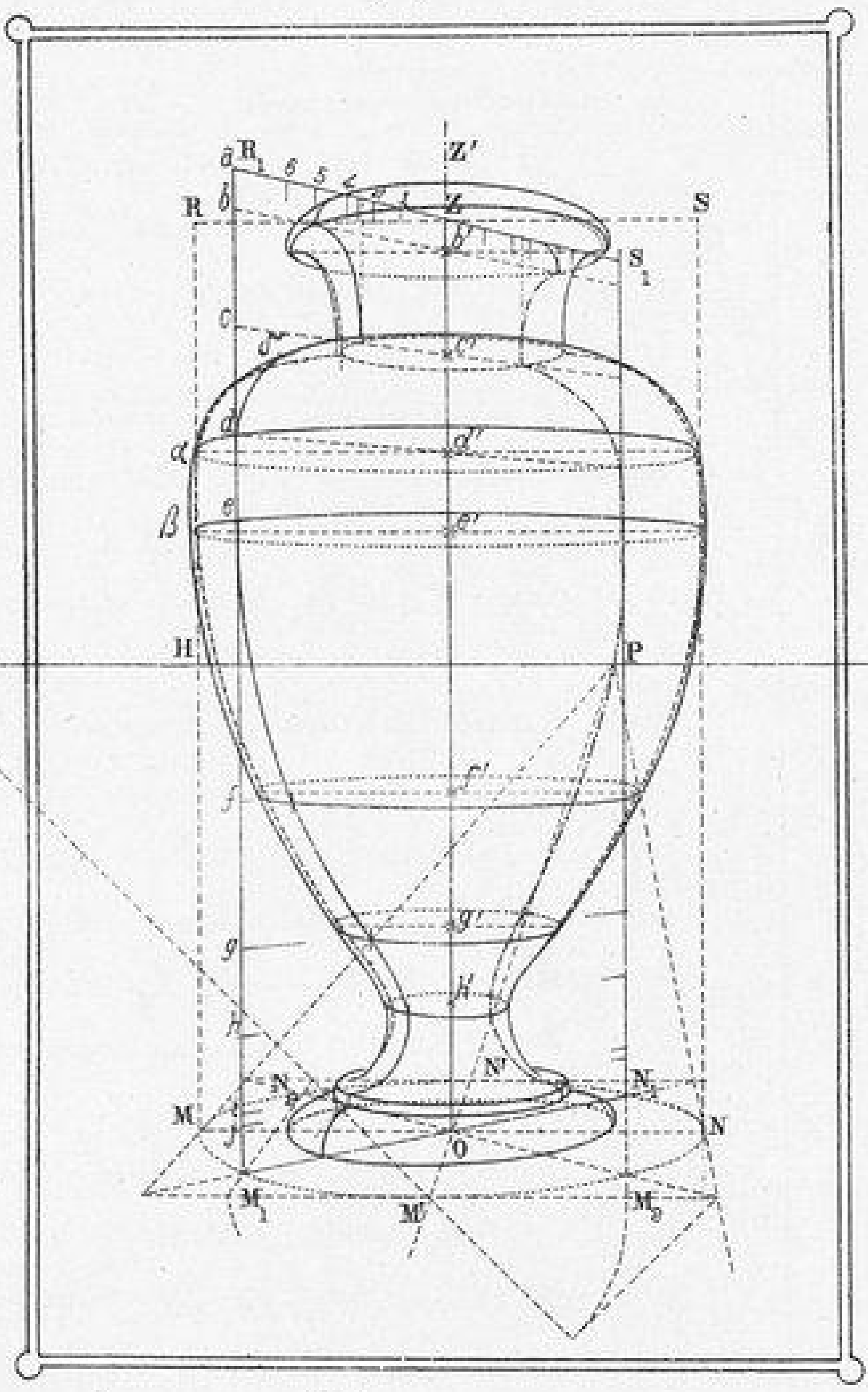
On voit sur la figure 178, comment en se servant des deux échelles T et V, le méridien placé dans le rectangle d'épannelage $M_1 N_1$ a été obtenu.

On dessine de même le méridien de front MN, et l'on pourrait (ce qui n'est pas fait sur le tableau) trouver la perspective d'autant de méridiens que l'on voudrait.

(c) *Mise en perspective des principaux parallèles.*

On joindra par des ellipses les points qui se correspondent sur les méridiens déjà obtenus.

Fig. 178.



(d) Contour apparent.

La figure 179 dessinée à plus grande échelle fait comprendre comment on trace la courbe enveloppe des méridiens et des parallèles : cette enveloppe constituera le contour apparent perspectif du vase.

On voit (fig. 179) en A B C D..... le méridien de front, et en $A_1 B_1 C_1 D_1$...... le méridien oblique, ce dernier très déformé par la perspective.

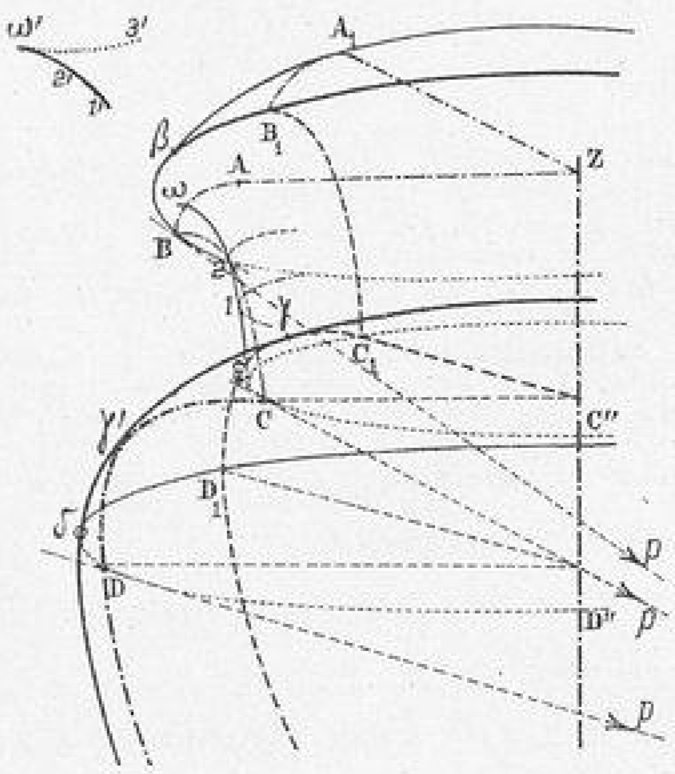
On a figuré en $B_1 \beta B$ – $C_1 C C''$ – $D_1 D D''$..... les ellipses perspectives des principaux parallèles.

On a eu le soin aux points B, C et D de ces ellipses situées sur le méridien de front, de leur donner des tangentes Bp – Cp – Dp, allant passer par le point principal.

Il ne reste plus qu'à prendre l'enveloppe ou les enveloppes de ces différentes courbes.

Une première enveloppe se trace facilement ; c'est $\delta, \gamma' - \gamma$, laquelle est tangente en δ au parallèle $D_1 D''$, en γ' au méridien de front et en γ au méridien oblique. Elle laisse le parallèle $C C_1$ dans son intérieur.

Fig. 179.



Une seconde enveloppe est la courbe $\beta \omega$.

Elle est tangente en ω au parallèle $C C_1$ et elle le serait à d'autres tels que 1.2.......

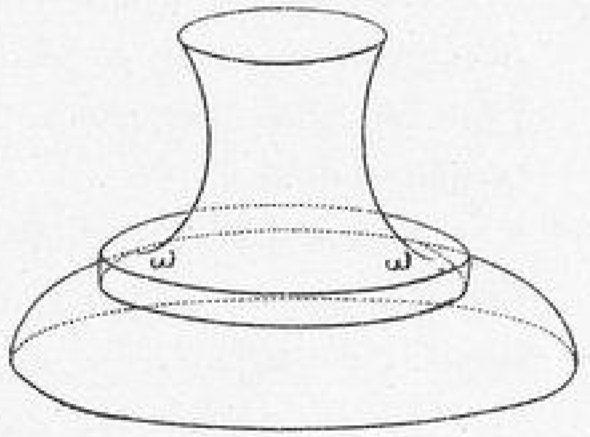
(e) Point de passage.

En traçant un très grand nombre de parallèles analogues à 1, 2, etc.... très rapprochés et essayant de mener leur enveloppe on la verra, comme l'indique le croquis placé à gauche, présenter un rebroussement ω' et de la direction $1'2'\omega'$ passer à la branche $\omega'3'$.

Ce point de rebroussement ω' se nomme le point de passage ; en réalité le contour apparent réel 1.2...... cesse en ce point ω et semble se perdre dans la masse générale du solide.

La géométrie supérieure donne des méthodes pour déterminer rigoureusement le point de passage ; ces méthodes sont compliquées ; en dessin on se contente d'obtenir ce point par à peu près, en voyant où les parallèles cessent d'avoir une enveloppe.

Fig. 180.



On devra (fig. 180) observer aussi ces points de passage en ω, ω, sur la base du vase.

Ils existent toutes les fois qu'une surface est à double courbure, c'est-à-dire lorsqu'elle est convexe dans un premier sens et concave dans le sens perpendiculaire au premier.

Les surfaces à courbures simples comme la sphère, les ellipsoïdes n'en présentent jamais.

14e Leçon.

Mise de front d'un mur vertical. – Méthode de la corde de l'arc.

§ 130. – *Remarque préliminaire.* – Dans les problèmes qui précèdent, nous n'avions pas à nous occuper d'angles connus en vraie grandeur, ni des rapports des lignes ayant des directions différentes. Ces problèmes n'exigeaient pas la connaissance exacte de la position du spectateur, c'est-à-dire se résolvaient sans les points de fuite et de distance principaux ; – il n'en sera pas de même des suivants :

On se proposera dans les problèmes qui vont être traités d'amener, comme dans l'opération que nous avons appelée le Relèvement du géométral une figure plane quelconque et dont les rapports de dimensions sont altérés par la perspective, à se présenter de front de manière à pouvoir juger de ses proportions exactes.

§ 131. – *Problème. – Un plan est perpendiculaire au Géométral ; l'amener de front. Perspective d'une arcade.* (fig. 181.)

Soient Aa – Bb, deux verticales définissant un mur vertical ; – Nous voulons l'amener de front en le faisant tourner, comme une porte, autour de la charnière Aa.

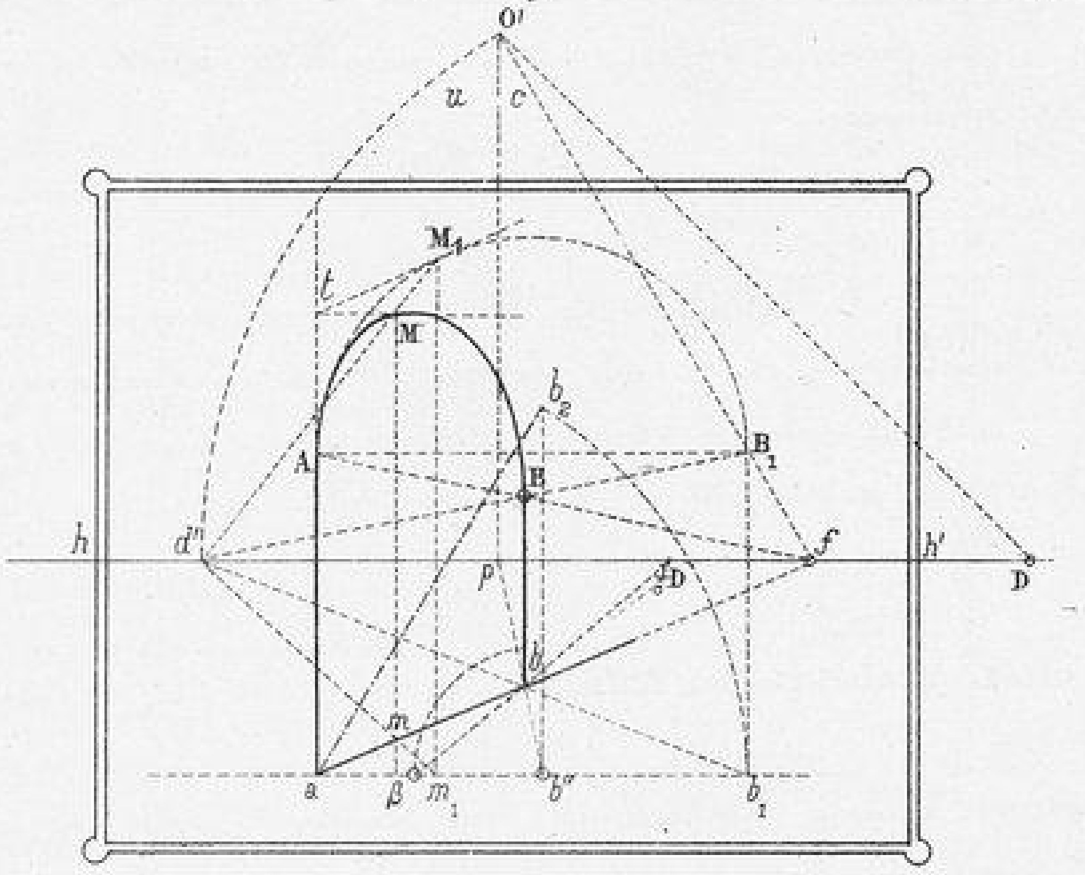
Nous supposons de plus : 1° que Aa est sinon dans le plan de front des vraies grandeurs du moins dans un plan de front dont nous connaissons l'échelle ; 2° que les points A et B sont au même niveau, et que nous voulons mettre en perspective un cercle décrit sur AB comme diamètre. Après la rotation le point b sera venu en b_1, et l'on aura, dans le géométral de l'espace $ab = ab_1$. – Par conséquent, joignons bb_1, cette droite intercepte un segment de front ab_1 égal au segment ab intercepté sur la fuyante abf ; c'est donc une ligne concourant au point de distance accidentel d' de la direction ayant pour point de fuite f.

On se rappelle comment s'obtient d' connaissant le point principal p et le point de distance principale D. – On joint O'f, et l'on prend fd' = fO'.

La verticale bB prend la position b_1B_1. – La ligne AB_1 étant parallèle à hh', on décrira, en vraie grandeur, le cercle sur aA_1B_1 comme diamètre, et l'on ramènera tous les points en place par une construction inverse de la précédente. – Par exemple : Soit M_1 un point du cercle de front, projeté en m_1 sur a_1b_1. – Je mène la ligne m_1m, et M_1M fuyant toutes deux en d'.

Je prends l'intersection m de la fuyante $m_1 d'$ et de ab, et remontant par la fuyante de l'espace, et par une verticale, nous obtenons le point M.

Fig. 181.



Tangente en M.

Menons la tangente $M_1 t$ au cercle de front. Elle rencontre la charnière au point t qui ne bouge pas. On a donc en tM la tangente cherchée.

Il est facile de trouver le point pour lequel la tangente est parallèle à une direction donnée. – Il suffit de se donner dans le plan vertical abAB une droite parallèle à cette direction ; de faire tourner cette droite en l'amenant de front ; de mener au cercle AM_1B_1 une tangente parallèle à cette direction devenue de front, et de remettre en place cette dernière tangente.

Remarque 1. – Dans ce mouvement de rotation, les points m - b - M ...... décrivent des arcs de cercle dont les lignes mm_1 - bb_1 ..... sont les cordes. C'est ce qui a fait donner à ce tracé le nom de *Méthode par la corde de l'arc.*

Remarque 2. – La méthode serait la même dans le cas où le plan fuyant vertical serait perpendiculaire au tableau, c'est-à-dire aurait sa trace ab sur le géométral, fuyant au point principal p.

Remarque 3. – Pour faciliter le raisonnement nous avons employé le point D, de distance principal et le rabattement supérieur de l'œil O'. – Mais nous savons que ces points D et O' seront toujours inaccessibles. Nous n'aurons à notre portée qu'un point de distance réduite, $\frac{D}{3}$ par exemple.

Dans ce cas, on remarquera que toute la méthode revient à obtenir en ab_1 sur une ligne de front, une longueur égale à la grandeur de la ligne perspective ab. – Nous savons qu'un relèvement préalable du géométral la donne.

Ici, pour faire ce relèvement, nous avons mené la fuyante principale pb, et l'avons prolongée en b''. On a joint b $\frac{D}{3}$ et la longueur b''D a été portée 3 fois de b'' en b_2 ; finalement on a pris $ab_1 = ab_2$ et la ligne $b_1 b$ prolongée jusqu'à l'horizon, donne en d' le point de distance accidentelle de la direction abf, car c'est, pour cette direction, le point de fuite d'une ligne d'égale resection. – C'est le point de fuite de toutes les cordes des arcs.

Remarque 4. – Plus le point f sera inaccessible, c'est-à-dire plus la base ab du mur se rapprochera d'être de front, plus le point d' se rapprochera du point principal P.

§ 132. – Préliminaires. – Mise de front d'un plan quelconque.

Lorsqu'un plan est quelconque, c'est-à-dire n'est pas vertical, sa mise de front exécutée pour faciliter à sa surface soit des recherches de rapports, soit des résolutions de problèmes, est plus difficile. Mais on la ramènera au cas précédent en commençant par prendre un nouveau géométral qui soit perpendiculaire au plan donné quelconque, c'est-à-dire par rapport auquel

le plan occupe la position d'un mur.

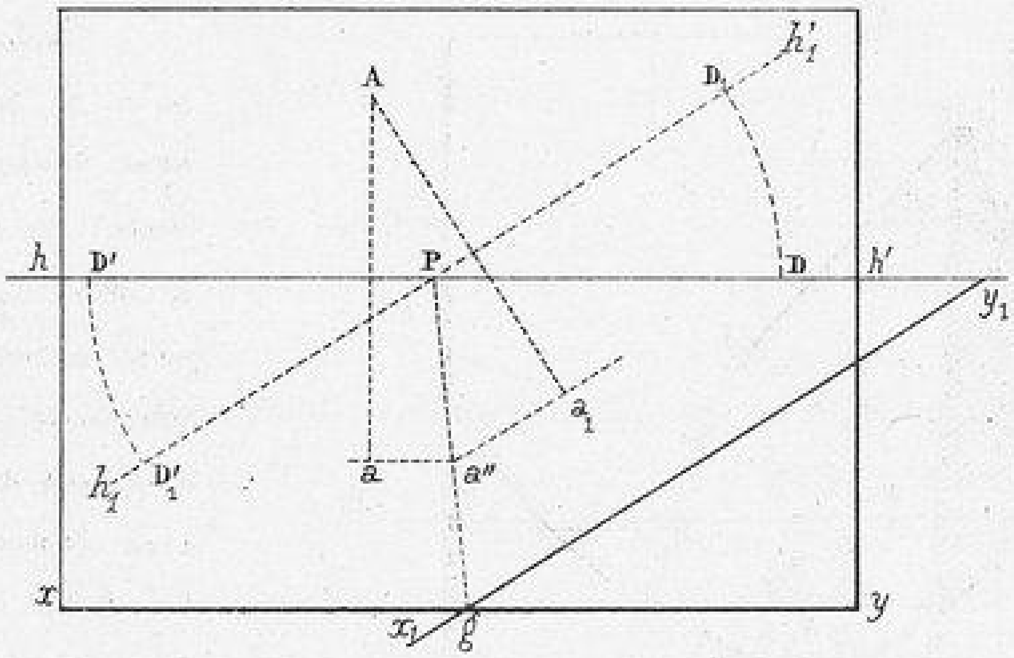
Nous commencerons d'abord par résoudre le problème auxiliaire suivant.

§ 133. – Changement du Géométral.

Ce problème est analogue au problème de géométrie descriptive connu sous le nom de Changement de Plan horizontal de projection.

Soit xy le bord inférieur du tableau ou ligne de terre, trace du géométral primitif sur ce tableau, et hh' la ligne d'horizon correspondante.

Fig. 182.



Soit $x_1 y_1$ une nouvelle droite choisie dans ce tableau, comme nouvelle ligne de terre, c'est-à-dire prise comme trace, d'un nouveau géométral, perpendiculaire aussi au tableau, mais non plus horizontal. Sa ligne d'horizon $h_1 h'_1$ passera encore par le point principal P, puisque ce point est la trace du rayon visuel perpendiculaire au tableau. – Elle sera parallèle à $x_1 y_1$.

Les points de distance nouveaux seront en D_1 et D'_1 sur $h_1 h'_1$ à la même distance de P que les points anciens D et D'.

Soit A un point, a, sa projection géométrale ancienne. Déterminons sa projection géométrale nouvelle a_1.

Soit g l'intersection des deux bords inférieurs du tableau ou lignes de terre, gP est l'intersection des deux géométraux. – Par le point a je mène dans le premier géométral la ligne de front aa'', et parallèle à xy, et par a'', point où elle rencontre gP la ligne de front $a''a_1$ du 2e géométral, parallèle à $x_1 y_1$. – J'abaisse Aa_1 perpendiculaire sur cette ligne de front et j'obtiens en a_1 la nouvelle projection géométrale cherchée.

§ 134. – Problème. – Prendre un nouveau géométral perpendiculaire à un plan donné quelconque.

Nous savons que lorsqu'un plan est perpendiculaire au géométral, sa trace sur le tableau, et plus généralement toutes ses lignes de front, sont perpendiculaires sur la ligne de terre, et nous avons vu qu'il est facile de rendre de front un pareil plan par la méthode de la corde de l'arc, et d'y construire ou d'y mesurer telle figure que l'on veut.

Par conséquent, pour résoudre le problème demandé, il suffira de prendre comme ligne de terre du nouveau géométral, une ligne $x_1 y_1$ perpendiculaire aux lignes de front du plan.

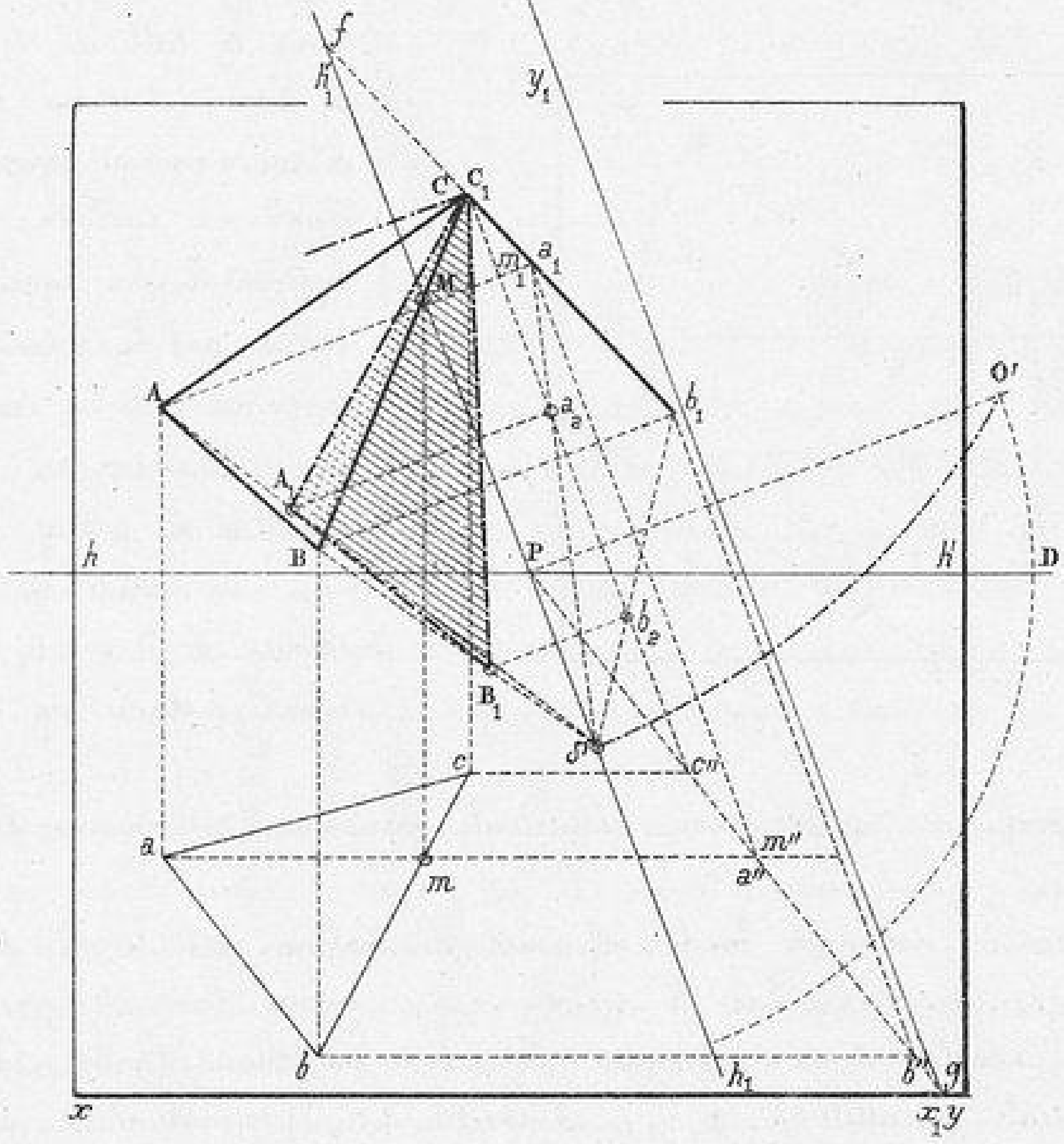
§ 135. – Application. – Trouver la vraie forme d'un triangle défini par 3 points Aa – Bb – Cc. (Nous supposons tous les points de fuite accessibles pour faciliter les constructions).

Je mène la ligne de front am - AM du plan de ce triangle, et je choisis une nouvelle ligne de terre $x_1 y_1$ perpendiculaire sur AM.

Sa ligne d'horizon nouvelle est Ph_1 passant par P et parallèle à $x_1 y_1$. - L'intersection des 2 géométraux est Pg, et les nouvelles projections géométrales de A, B, C sont $a_1 b_1 c_1$ obtenues comme ci-dessus.

Vérification : Je remarque que ces trois points sont en ligne droite, puisque le plan ABC du triangle est maintenant perpendiculaire au nouveau géométral.

Fig. 183.



Alors le plan du triangle occupe par rapport au nouveau géométral la position d'un mur.

Prolongeons $b_1 c_1$ jusqu'en f, sur la nouvelle ligne d'horizon, nous aurons le point de fuite de cette ligne. Cela fait, pour mieux lire l'épure, retournons notre papier et plaçons $x_1 y_1$ horizontale, nous sommes dans le cas du § 131 : « amener un plan vertical à être de front. »

On rabat l'œil en O'. - Avec fO' (qu'il est inutile de tracer) pour rayon, on décrit l'arc de cercle O'δ' qui donne en δ' le point de distance de la direction f.

C'est en ce point que viendront fuir toutes les cordes des arcs de la rotation que nous allons faire subir au triangle autour de cc_1 comme charnière. - Faisons cette mise de front.

Le point Cc_1 ne bouge pas comme étant sur la charnière.

Les points a_1 et b_1 viennent en a_2 et b_2 sur la ligne de front $c_1 b_2$ à la rencontre de cette ligne avec les fuyantes $a_1 δ'$ - $b_1 δ'$ qui sont les cordes des arcs de rotation.

Les points A et B de l'espace viennent, d'une part, sur les normales au nouveau géométral $a_2 A_1$ - $b_2 B_1$ et d'autre part sur les cordes d'arc AA_1 - BB_1 fuyant au point δ'.

On aura donc en $A_1 B_1 C_1$ la <u>vraie forme</u> du triangle donné, mais nous n'avons pas sa vraie grandeur.

Vraie grandeur du triangle. - Pour avoir les vraies dimensions il suffit de connaître l'échelle du plan de front dans lequel est fait le rabattement $A_1 B_1 C_1$

Supposons par exemple que le plan de front du tableau soit à l'échelle de $\frac{1}{10}$; le plan de front $c_1 b_2$ sur lequel on a rabattu, a sa trace sur le nouveau géométral qui se trouve sur notre croquis, à une distance de 10^{mm} de l'horizon $h_1 h_1$ tandis que $x_1 y_1$ est à 38^{mm}. Par conséquent, l'échelle du plan de front $A_1 B_1 C$ n'est pas de $\frac{1}{10}$ mais de $\frac{1}{10} \times \frac{10}{38}$ soit $\frac{10}{380}$.

Par conséquent pour avoir les vraies dimensions des côtés du triangle donné, on les mesurera en $A_1 B_1 C$ et on les multipliera par $\frac{380}{10}$.

Remarque.- Ici le triangle amené de front a tenu dans le cadre du tableau ; cela tient à ce que la charnière Cc_1 a été prise loin du tableau, et le triangle amené de front s'est réduit en dimensions apparentes. Si l'on avait pris la charnière passant par le sommet le plus près B, l'épure n'aurait pas tenu dans le cadre.

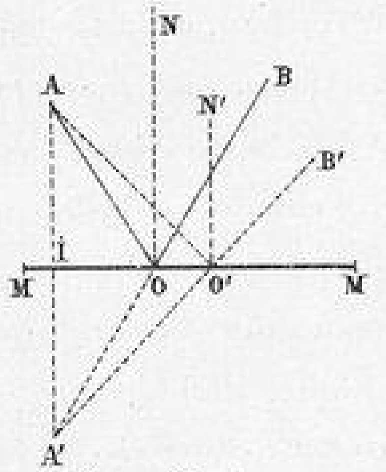
Images par réflexion dans des miroirs plans.

§ 136.- Les lois de la réflexion sont les suivantes : (fig. 184).

1° Le rayon incident AO, et le rayon réfléchi OB sont dans un même plan contenant la normale ON.

2° L'angle d'incidence (AON) est égal à l'angle de réflexion (NOB).

Fig. 184.



D'où il résulte que si l'on considère un miroir plan MN, et un point A, différents rayons lumineux issus de ce point et tels que AO - AO' etc ..... seront réfléchis dans les directions OB, OB' ..... et sembleront diverger d'un point A' symétrique du point A par rapport au miroir.

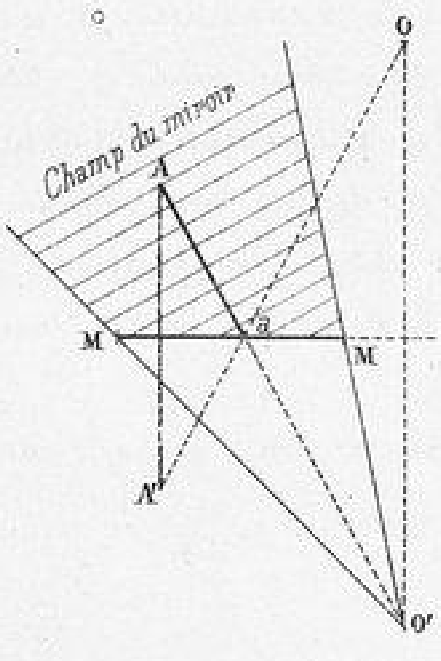
Le spectateur qui recevra les rayons réfléchis croira qu'ils proviennent en réalité du point A', lequel constitue ce que l'on nomme l'image du point A.

Au point de vue géométrique trouver l'image A' d'un point A revient :

1ère *Méthode* (*fig. 184*).- 1° à abaisser du point A une perpendiculaire AI sur le plan du miroir ; 2° à la prolonger au-delà, d'une longueur égale (IA' = IA).

2° *Méthode* (*fig. 185*).- Soit MM le miroir, O la position de l'œil de l'observateur : Prenons en O' le symétrique du point O par rapport au miroir, et soit A un point dont on cherche l'image. Joignons AO' et prenons en a l'intersection de cette droite avec le miroir. Ce point a est sur le trajet du rayon réfléchi A'aO, par conséquent, pour le spectateur placé en O, la perspective du point a se confond avec celle de l'image A' et il revient au même sur un tableau perspectif de figurer le point A' ou le point a ; Ils se superposent en apparence, l'un sur l'autre. Ce qui nous conduit au tracé suivant :

Fig. 185.



1° On cherche en O' le symétrique de l'œil ;

2° Par des lignes droites on joint à ce point O' tous les points dont on veut l'image ;

3° On cherche les intersections de ces droites avec le miroir (Problème

résolu : Intersection d'une droite et d'un plan).

§ 137. – Champ du miroir.

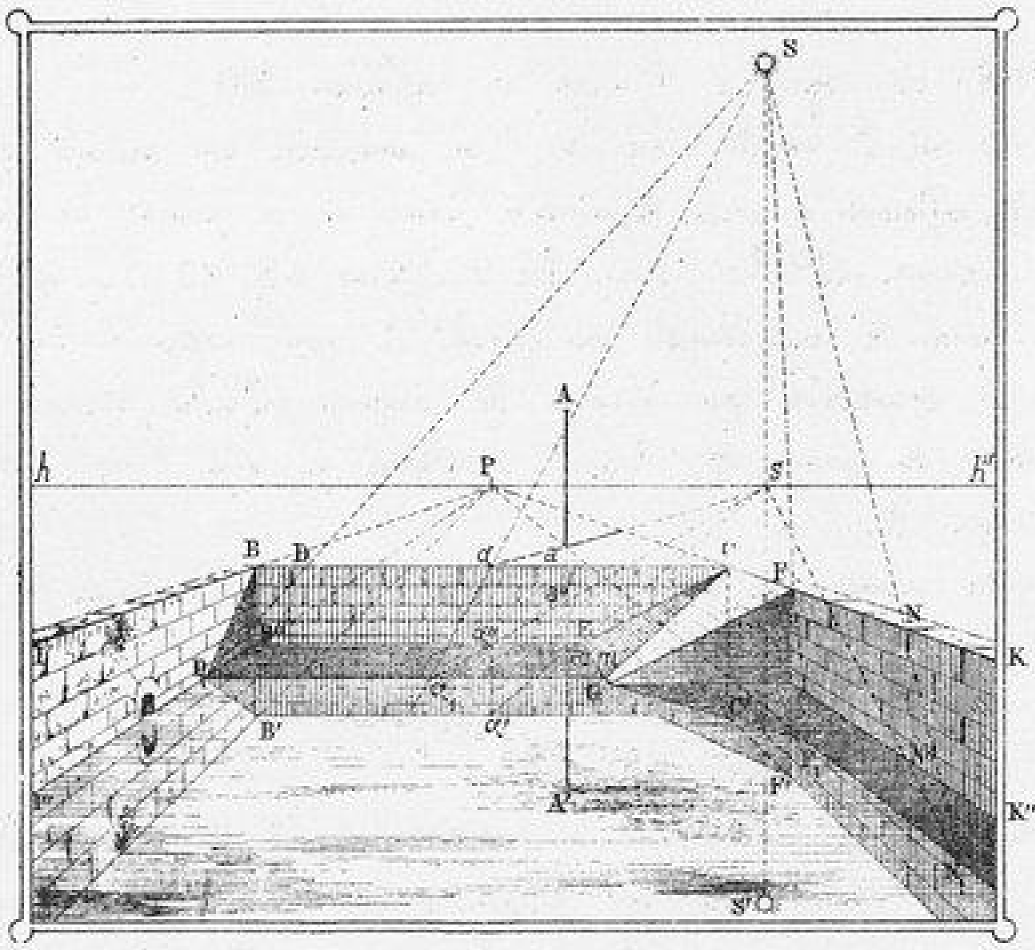
Si le miroir est limité en MM, tous les points ne donneront pas une image visible du point de vue O. – On nomme *champ du miroir*, l'espace qui renfermera tous les points susceptibles de donner une image. – Pour limiter ce champ il suffira donc de joindre le point O', symétrique de l'œil, à tous les points du contour MM..... du miroir : On donnera ainsi naissance à une pyramide et il n'y aura que les points tels que A, situés dans l'intérieur de la pyramide qui donneront une image visible du point de vue O.

§ 138. – Problème. – Abaisser en perspective d'un point A une perpendiculaire sur un plan horizontal et la prolonger au-delà, d'une longueur égale. (Nous nommerons ce plan le miroir).

C'est le problème de la réflexion par une nappe d'eau.

Soit (fig. 186) IBCK le bord d'un mur de quai horizontal. – Soit I"B"...K" la trace sur ce mur d'une nappe d'eau constituant un miroir horizontal. Si l'on veut l'image B' du point de la crête du mur on mènera la verticale BB" et on la prolongera de B" en B', au-delà de la nappe d'eau, d'une longueur égale à elle-même.

Fig. 186.



On remarquera que toutes les lignes horizontales telles que IB – BC – CK se réfléchissant dans un miroir horizontal donneront des images horizontales parallèles aux lignes elles-mêmes et qui, par conséquent, auront les mêmes points de fuite.

Soit à chercher l'image d'un point A qui n'est pas situé à plomb du mur ; prenons par exemple la lanterne A d'un reverbère ; le sommet d'un arbre ou celui d'une tour etc....... 1° On mène la verticale A a ; 2° par son pied a sur le terre-plein du quai, pris comme plan géométral, on mène une horizontale quelconque $a\alpha$, jusqu'en α où elle rencontre la crête ; on cherche en α' l'image de α comme ci-dessus, pour le point B ; 4° On mène $\alpha' a' s$ parallèle $\alpha a s$, c'est-à-dire convergeant au même point de fuite s. – On en déduira en a' l'image (cachée d'ailleurs) du point a et prenant la verticale descendante a'A' égale à la verticale montante a A, on a en A' l'image du point A.

Remarque. – La verticale a A qui est vue toute entière a son image cachée en partie par celle de la crête du mur de quai.

§ 139. –

§ 139. – Image d'un astre, c'est-à-dire d'un point situé à l'infini.

Soit S la perspective du soleil dans l'espace. Sa projection s, sur le géométral, se trouvera sur la ligne d'horizon hk' puisque le soleil est supposé à l'infini.

La nappe d'eau considérée comme un géométral, aurait aussi pour ligne d'horizon la ligne hk'. Le point s est donc aussi la projection du soleil sur la nappe d'eau et en prenant sS' égale à sS nous aurons en S' l'image du soleil.

Ainsi donc on obtient l'image réfléchie d'un astre dans une nappe d'eau en prenant le point symétrique de sa perspective par rapport à la ligne d'horizon.

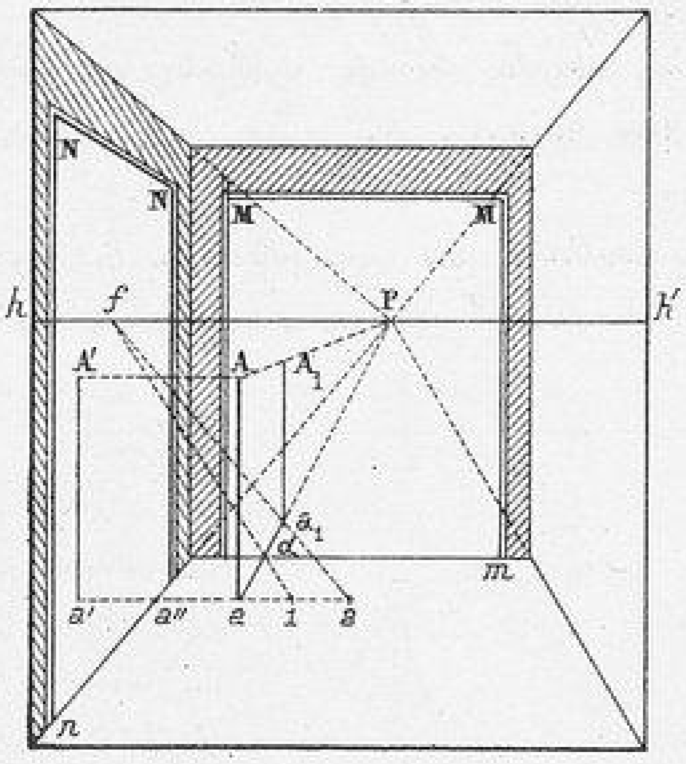
§ 139 bis. – Ombres.

(Seront expliquées plus loin, dans le chapitre relatif aux ombres, voir § 147).

§ 140. – Image dans un miroir vertical, perpendiculaire ou parallèle au plan du tableau. (fig. 187).

1° Miroir perpendiculaire au tableau.

Fig. 187.



Soit N N ce miroir. Sa trace géométrale n P a pour point de fuite le point principal P. – Soit A a une droite verticale dont on cherche l'image dans ce miroir. La perpendiculaire a a' abaissée sur le plan du miroir est une ligne de front. Elle recoupe en a'' la trace n P ; on la prolongera, sans réduction perspective, de a'' en a' d'une longueur égale ce qui donnera en a' l'image du point a et en A' celle du point A.

2° Miroir parallèle au plan du tableau.

Si le miroir M M est de front, les droites telles que $a a_1$ et $A A_1$ qui lui sont perpendiculaires ont pour point de fuite le point principal.

On abaissera donc facilement a α perpendiculaire sur la trace géométrale m du miroir et par la construction connue, en utilisant un point de fuite quelconque f on prolongera cette droite d'une longueur αa_1 égale à elle-même. – L'image A_1 se déduit ensuite facilement de l'image a_1.

§ 141. – Image dans un miroir vertical quelconque. (fig. 188).

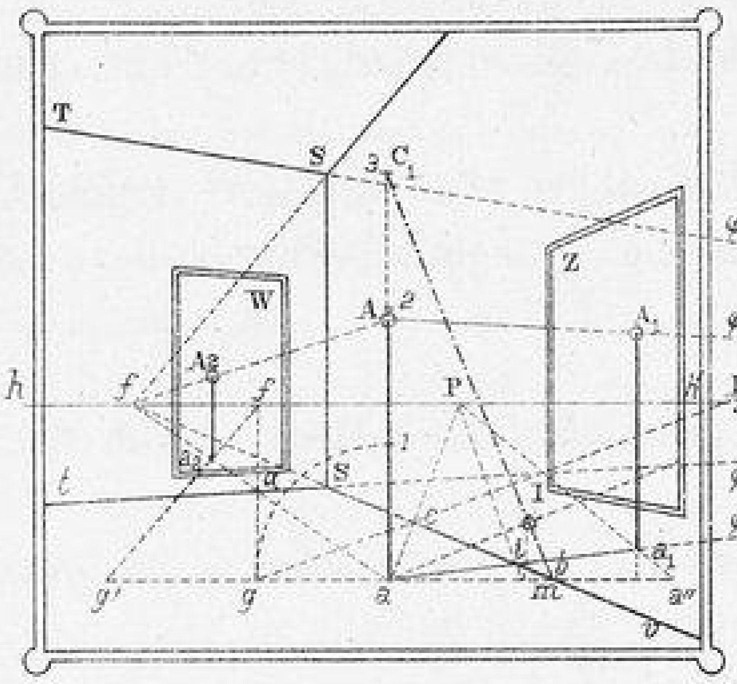
Soit en sv, la paroi verticale d'un mur quelconque sur lequel est fixé un miroir Z. On donne le point principal p et le point tiers de distance $\frac{D}{3}$ de droite. Trouver l'image a_1 du point a placé dans le géométral, revient à abaisser une perpendiculaire $a a_1$ sur la droite sv et à la prolonger jusqu'en a_1 d'une longueur égale.

Pour mener cette perpendiculaire on a fait un relèvement du géométral autour de a b comme charnière. – La droite bc a été relevée en $b C_1$; on a mené a I perpendiculaire sur $b C_1$ et on a remis en place le point I en i. – Le reste de l'épure se comprend facilement.

Remarque 1. – La droite a i aurait un point de fuite inaccessible φ sur la ligne d'horizon.

Si nous avions à dessiner la trace St d'un second mur perpendiculaire au premier, cette trace aurait aussi φ pour point de fuite. Toutes ces lignes aboutissant au point inaccessible φ se traceront avec le Té brisé.

Fig. 188.



Remarque 2. – Si nous avions un second miroir W, fixé au second mur vertical St, les droites telles que aa_2 et AA_2 perpendiculaires à ce miroir auraient le même point de fuite f que la trace sv du premier mur.

Remarque 3. – Si on avait à résoudre le problème : « abaisser d'un point une perpendiculaire sur un plan quelconque », on prendrait un nouveau géométral perpendiculaire au plan donné et l'on serait ramené au cas précédent où le plan est un mur vertical.

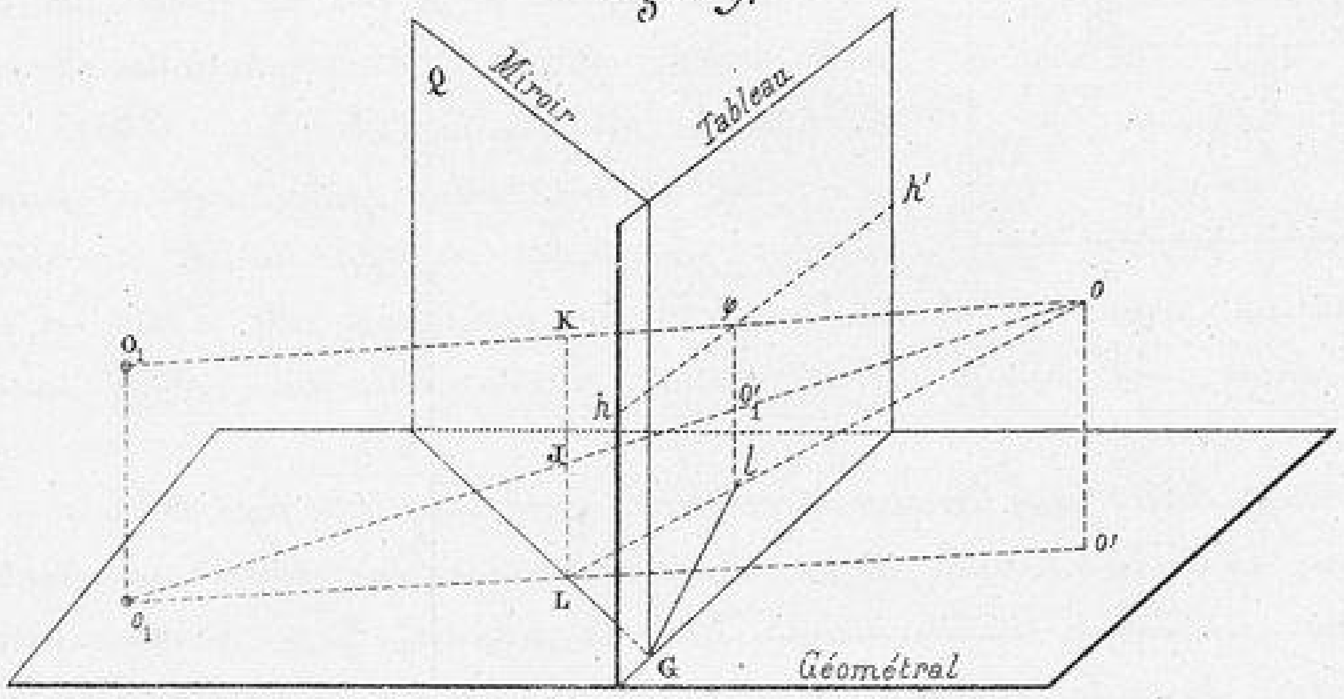
§ 142. – Image dans un miroir plan quelconque.

Nous traiterons cette question comme application de la seconde méthode indiquée au § 136 et dans laquelle on utilise le symétrique de l'œil par rapport au plan du miroir. Nous commencerons par résoudre le problème auxiliaire suivant :

Problème. – Abaisser de l'œil une perpendiculaire sur un plan et la prolonger au-delà d'une longueur égale à elle-même, autrement dit : Trouver l'image de l'œil, par réflexion, dans un plan.

1er cas. – Le plan est vertical.

Fig. 189.



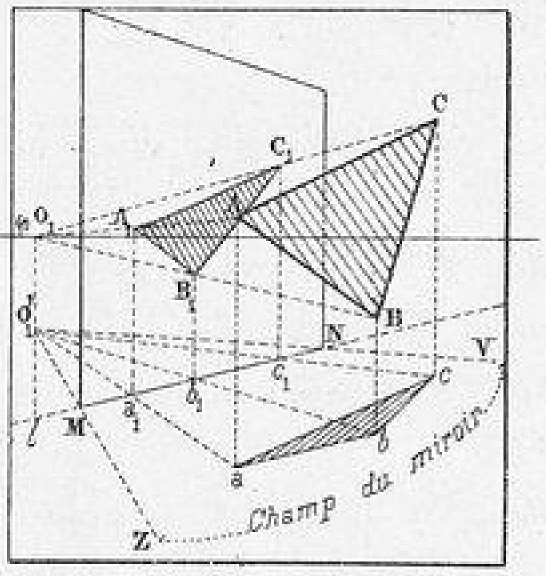
Nous raisonnerons sur le croquis perspectif ci-contre (fig. 189). QL est le plan du miroir. On abaisse de l'œil la perpendiculaire OK et on la prolonge en KO_1 d'une longueur égale. O_1 est le symétrique de l'œil et o_1 en est la projection géométrale. La perspective du point O_1 est le point φ, point de fuite des droites perpendiculaires au plan du miroir ; la projection géométrale o_1 a pour perspective o'_1. Soit GL la trace géométrale du miroir et Gl sa perspective. La verticale KL est coupée en deux parties égales par le point I situé sur le rayon visuel Oo_1, ce qui tient à ce que $OK = O_1K$. On a donc aussi $\varphi o'_1 = o'_1 l$.

Par conséquent nous pouvons dire (fig. 190) :

1° Que l'image O_1 de l'œil dans le miroir a pour perspective le point de fuite φ des droites perpendiculaires au plan du miroir.

2° Que sa projection o'_1 sur un géométral quelconque est située sur la perpendiculaire menée à ce géométral par le point précédent f et à moitié de la distance fl comprise entre ce point et la trace géométrale du miroir.

Fig. 190.



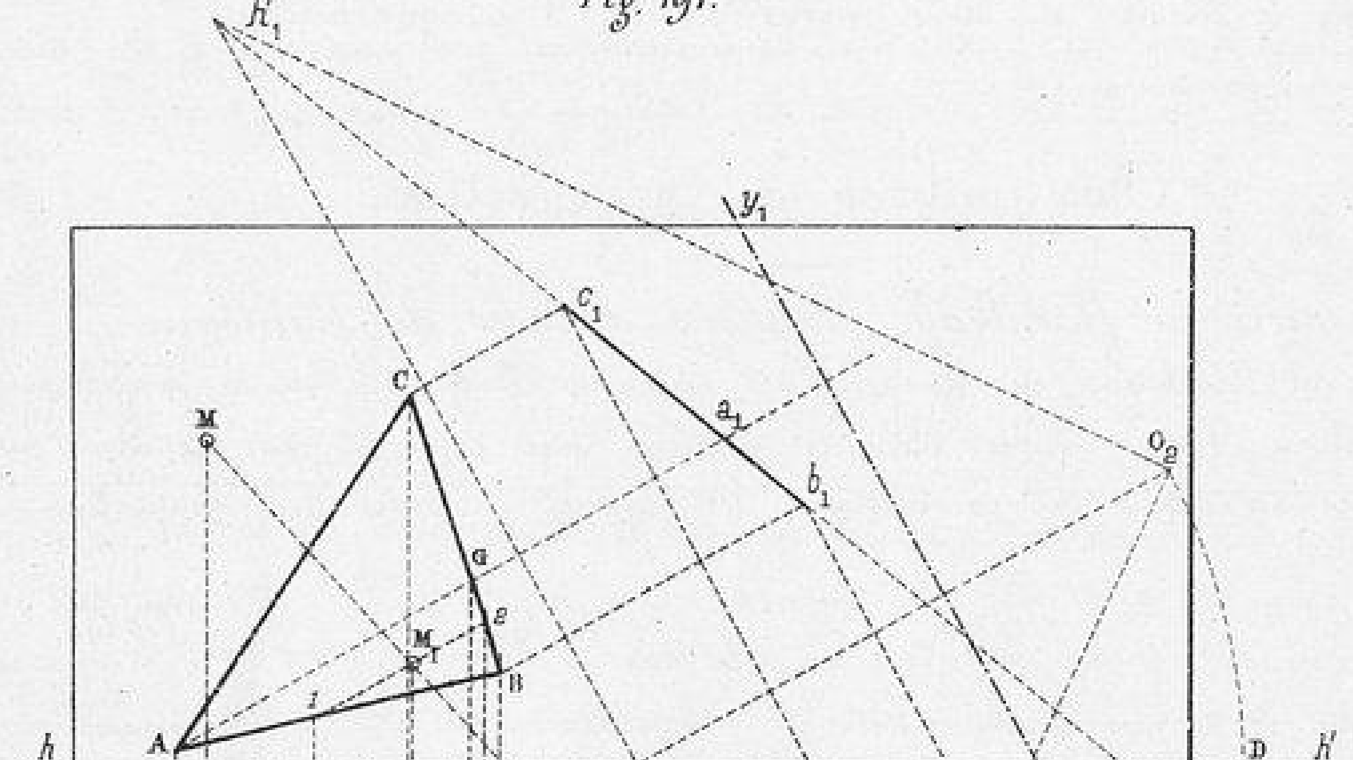
Cela posé soit (fig. 190) un miroir vertical M N. On cherche comme au § 141 le point de fuite f des droites perpendiculaires à son plan. – Le point f ou O_1 est l'image de l'œil ; le point o'_1 est l'image de sa projection géométrale. Le champ du miroir est limité, en géométral, par les droites o'_1NV et o'_1MZ. – Pour avoir l'image d'un triangle abc – ABC situé dans le champ nous menons les droites O_1A – o'_1a, O_1B – o'_1b, etc...... et nous prenons en A_1 B_1 et C_1 les intersections avec le plan M N.

Remarque. – Par cette méthode le problème des images réfléchies est ramené au problème des ombres puisque $A_1B_1C_1$ peut être considérée comme l'ombre portée par ABC sur le miroir en prenant le point $O_1o'_1$ comme flambeau.

§ 143. – *Problème des images par réflexion, le plan du miroir étant quelconque.*

Soit ABC, abc (fig. 191) un miroir triangulaire. – Cherchons d'abord le champ de ce miroir. – Menons une ligne de front AG – ag du triangle. – Prenons un nouveau géométral

Fig. 191.



x_1y_1 perpendiculaire à cette ligne de front. Déterminons en D_1 le point de distance principal de ce géométral, situé sur sa ligne d'horizon $h_1h'_1$ laquelle on le sait, passe par p. L'intersection des deux géométraux est px_1 (x_1 étant le croisement des deux lignes de terre).

Par des lignes de rappel telles que $bb''b_1$ et par des projetantes telles que Bb_1 nous obtenons en $b_1a_1c_1$ (situés en ligne droite), la projection du triangle sur le nouveau géométral. Cette ligne est la trace du plan du miroir sur le nouveau géométral et nous sommes ramenés au cas précédent. – Nous

obtenons en h'_1 le point de fuite de cette trace.

Nous faisons le rabattement de l'œil en O_2 sur une perpendiculaire à la nouvelle ligne d'horizon $h_1 h'_1$. – Nous joignons $h'_1 O_2$; nous menons à cette droite une perpendiculaire $O_2 \varphi$ qui nous donne en φ le point de fuite des normales au miroir.

§. 144. – D'après ce qui précède, φ est aussi la perspective du symétrique de l'œil par rapport au miroir.

Menons φl perpendiculaire sur $h_1 h'_1$; prenons le milieu O'_2 de la portion de cette ligne comprise entre $h_1 h'_1$ et $a_1 b_1$ prolongé, et nous aurons en O'_2 la projection du symétrique de l'œil sur le nouveau géométral. – On aura sa projection O'_1 sur l'ancien géométral à l'aide des lignes de rappel $O'_2 O'' O'_1$.

Nous avons donc au point double $O_1 \varphi$: 1° le point de fuite des perpendiculaires au miroir ; 2° la perspective du symétrique de l'œil, et, en O'_1 la perspective de la projection sur le géométral ancien de ce symétrique. Cela posé, nous aurions le champ du miroir en joignant O_1 aux 3 points de l'espace ABC, et O'_1 aux 3 points du géométral, a b c. Tout point tel que M m situé dans ce champ, aussi bien dans l'espace qu'en projection géométrale, sera image. Cherchons cette image : appliquons ce qui a été dit en commençant. – Joignons le point M m au symétrique de l'œil $O_1 O'_1$, ce qui donne la droite $MO_1 - mO'_1$. Cherchons, par la méthode connue, c'est-à-dire en prenant le plan projetant géométralement cette droite pour plan auxiliaire, son intersection $M_1 m_1$ avec le miroir, et nous aurons en M_1 l'image cherchée.

Des ombres en perspective.

15e Leçon.

§ 145. – Lumière au flambeau. – Positions diverses du flambeau.

Si l'on a un flambeau, on donnera sa perspective F et celle de sa projection f sur le géométral. – Ce flambeau peut occuper plusieurs positions par rapport au spectateur et au tableau. Supposons-le toujours au-dessus du géométral. – Les figures suivantes se rapportent à ces positions diverses.

Fig. 192.

Flambeau derrière le tableau

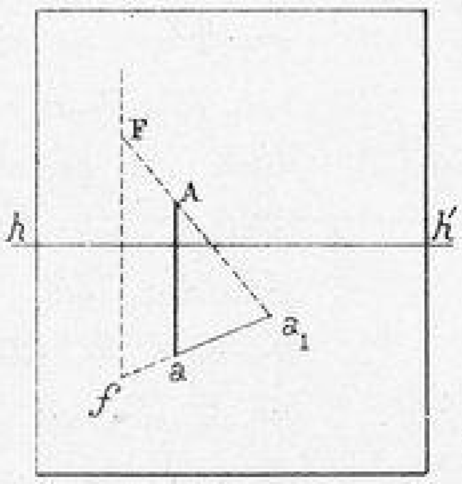


Fig. 193.

Entre le spectateur et le tableau

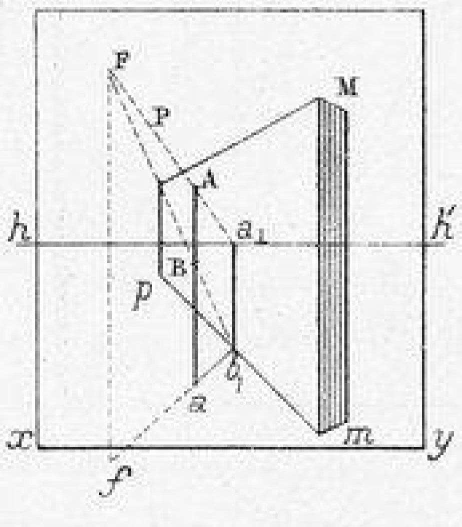


Fig. 194.

Dans le plan neutre

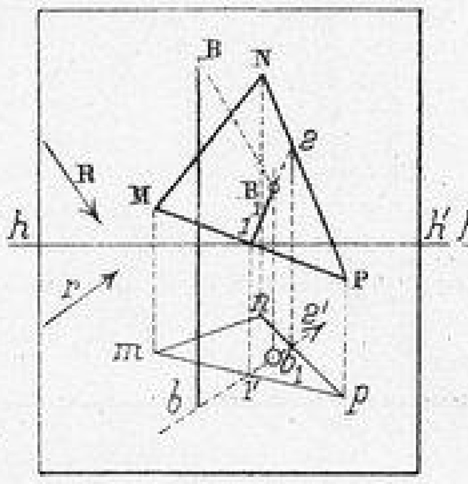


Fig. 195.

Derrière le spectateur

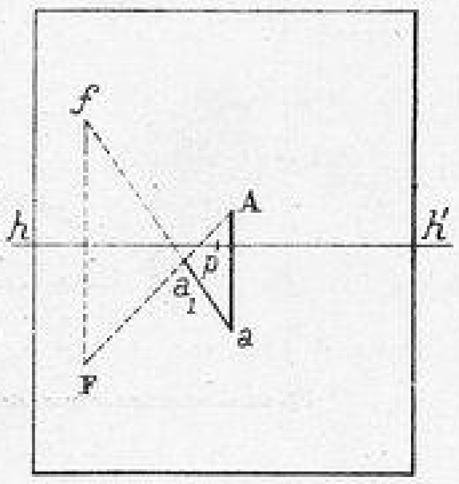


Fig. 192. – Flambeau situé derrière le tableau, c'est-à-dire dans l'espace réel. On a cherché en a a, l'ombre portée sur le géométral par une verticale A a.

Fig. 193. – Entre le tableau et le spectateur, c'est-à-dire dans l'espace intermédiaire. On a cherché l'ombre portée $a_1 b_1 a$ par une verticale A a, sur un mur m p et sur le géometral.

Fig. 194. – Dans le plan neutre. – Dans ce cas les deux perspectives du flambeau sont à l'infini, et l'on doit donner les directions R et r des rayons lumineux en perspective. – Ainsi, dans ce cas les rayons lumineux sont en réalité convergents, mais en perspective ils sont parallèles à R dans l'espace et à r en projection géométrale.

Sur la figure 194 on a cherché en B_1 l'ombre portée par un point B sur le plan d'un triangle M N P – m n p.

Fig. 195. – Le flambeau est derrière le spectateur, c'est-à-dire dans l'espace virtuel. – On a encore cherché dans ce cas l'ombre portée $a\,a_1$ sur le géométral par une verticale A a. On remarquera que le flambeau est situé à droite du spectateur quoique sa perspective F paraîtra à gauche du point p. Il y a l'inversion que nous avons signalée plus haut.

§ 146. – Lumière au soleil. – Positions diverses du soleil.

Le soleil sera donné par sa perspective S, ce sera le point de fuite des rayons lumineux dans l'espace, et par celle de sa projection géométrale, s, situeé sur la ligne d'horizon. – s sera le point de fuite des rayons lumineux en projection géométrale. – On se servira ensuite des points S et s comme on vient de le faire dans le cas du flambeau, pour les points F et f.

Fig. 196.

Soleil derrière le spectateur et à sa droite.

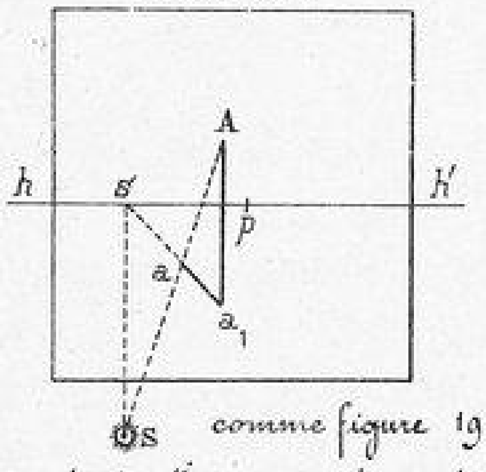


Fig. 197.

Soleil devant le spectateur et à sa gauche

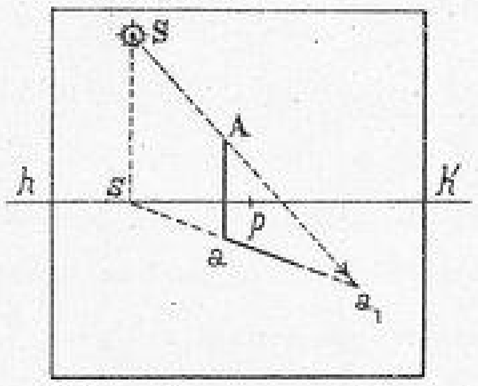
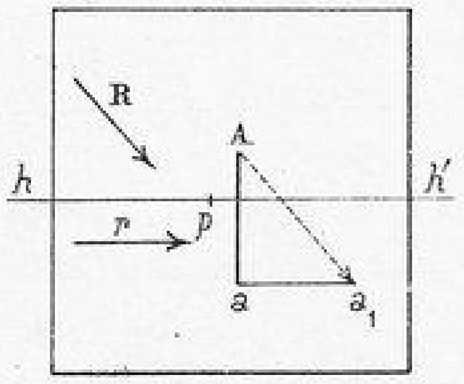


Fig. 198.

Soleil dans le plan neutre et à gauche du spectateur.



Supposons toujours le soleil au-dessus du géometral. Les rayons qu'il envoie peuvent venir d'arrière en avant par rapport au spectateur. C'est le cas de la figure 196 ou d'avant en arrière, comme figure 197. Enfin ils peuvent être de front. Dans ce cas (fig. 198) ils seront parallèles en perspective aux deux droites de front R dans l'espace et r en projection géométrale.

Les problèmes d'ombre se résolvent en perspective comme en descriptive, en employant les 3 methodes générales. – Celle des projections obliques est la plus facile à appliquer comme nous allons le montrer dans les exemples qui vont suivre.

§ 147. – Ombres portées sur des plans horizontaux. (fig. 199).

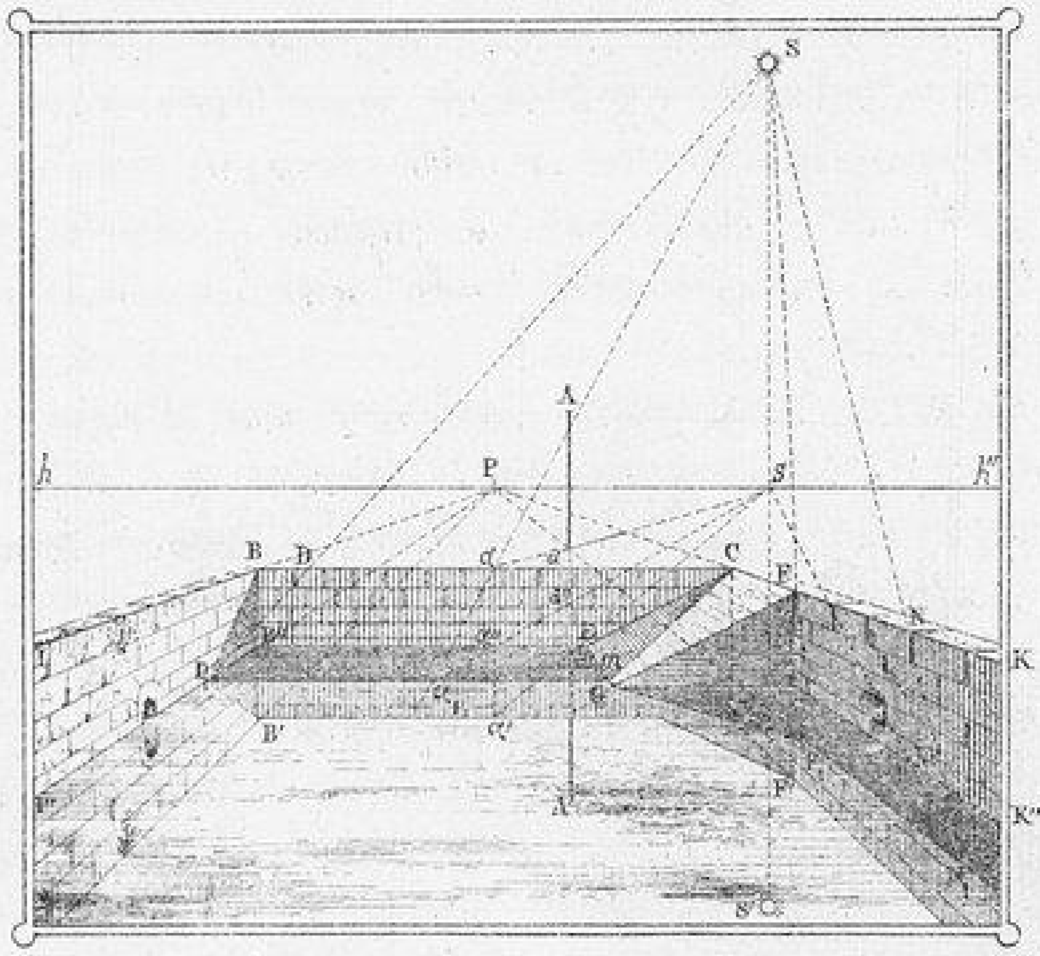
Nous reprenons ici la figure qui a servi pour les images réfléchies dans une nappe d'eau. S est le soleil et s sa projection géométrale.

La verticale A a donne une ombre portée sur le terre-plein du quai qui est $\alpha\,a$, ayant s pour point de fuite.

Le point α du mur de quai donne comme ombre portée sur le plan d'eau le point α_1. – L'ombre portée par la crète BC sur le plan d'eau est parallèle à cette crète et par conséquent c'est une droite de front $D_1\alpha_1$. – Elle rencontre en D_1 le mur de gauche, et par

conséquent D_1B est l'ombre portée par la crête BC sur ce mur. $D\alpha_1$ rencontre en m la droite

Fig. 199.



EG où la rampe plonge dans l'eau ; par conséquent m C est l'ombre portée par la crête BC sur le plan incliné de la rampe.

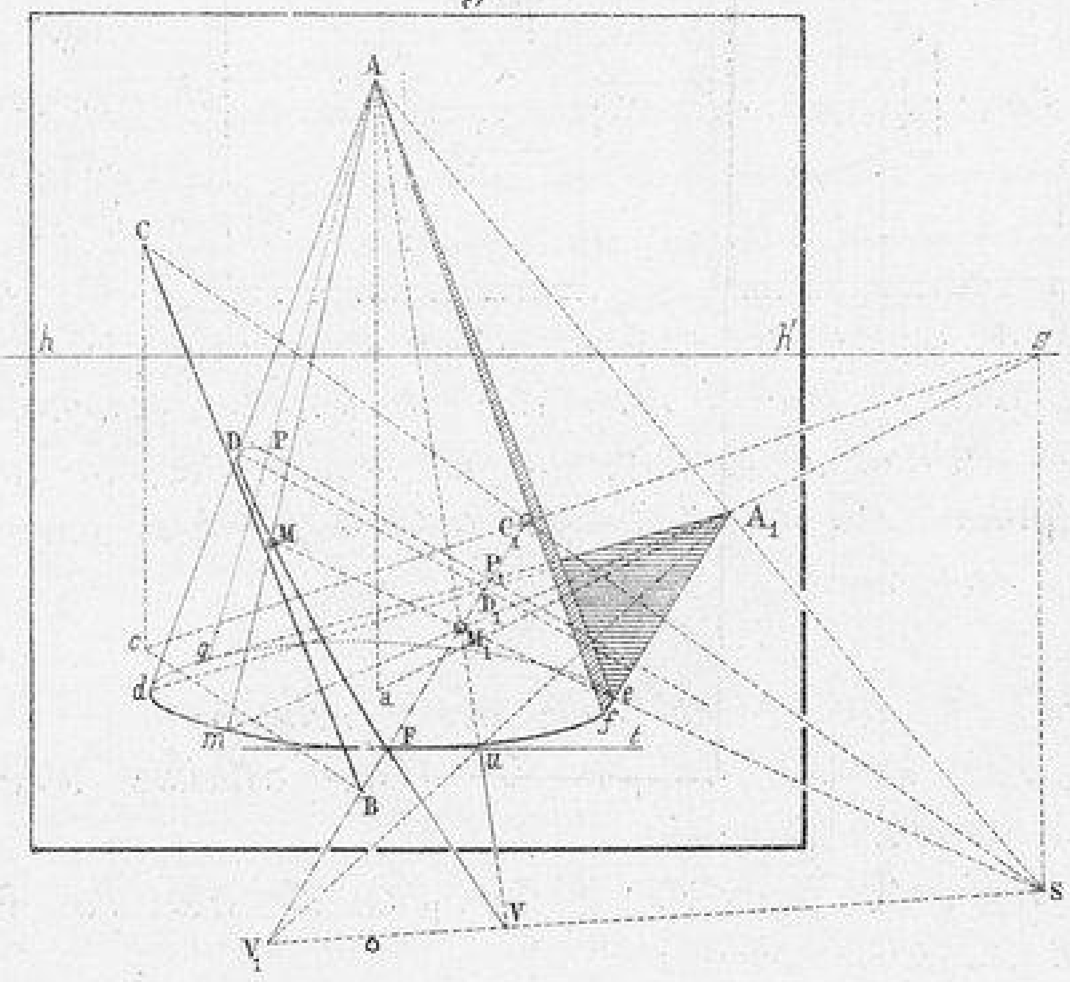
On cherche en N_1 l'ombre portée sur le plan d'eau par un point N de la crête de droite CK, et on en déduit en N_1P parallèle perspectivement à CK l'ombre de cette crête sur le plan d'eau.

Enfin on fait ressauter par un rayon lumineux direct SF le point F en F_1 sur l'ombre qui vient d'être obtenue et l'on en déduit en GF_1 l'ombre portée par la droite inclinée GF.

§ 148. – Ombres portées sur un cône.

Soit (fig. 200) sur le géométral la base d m f e d'un cône ; soit A a son sommet. Le contour apparent perspectif s'obtient en menant de la perspective A du sommet les deux tangentes A d, A e, à l'ellipse perspective de la base du cône. On donne en outre en BC - Bc la perspective d'une droite et en S s la perspective (virtuelle) du soleil. On demande de déterminer toutes les ombres, propres ou portées.

Fig. 200.



1° Ombre portée par le cône sur le géométral. – On cherche en A_1 l'ombre portée par le sommet A sur le géométral ; et les deux tangentes A_1f et A_1g, menées de ce point à la base du cône limitent l'ombre cherchée.

2° Ombre propre du cône. – Ce sont les deux génératrices Af et Ag aboutissant aux points de tangence qui viennent d'être déterminés. L'une d'elles Af est vue, et se trace en trait plein, l'autre Ag est cachée et se trace en pointé.

3° Ombre portée par la droite BC sur le géométral. – On détermine en C_1 l'ombre d'un point C de la droite et l'ombre portée est BC_1 ; elle est à conserver seulement de B en F où elle rencontre la base du cône ; à partir du point F l'ombre va passer sur le cône.

4° *Ombre portée par la droite sur le cône.* – Soit à trouver le point M de l'ombre situé sur une génératrice quelconque Am du cône. (a) On cherche en mA_1 l'ombre portée sur le géométral par cette génératrice; (b) Elle rencontre en M_1 l'ombre BC_1 portée par la droite BC; (c) On remonte par un rayon inverse SM_1 au point M cherché.

5° *Points importants de l'ombre.*

(a) Point de pliure F. – Il est obtenu à priori; pour avoir la tangente à la courbe en ce point nous chercherons l'ombre portée par la droite BC sur le plan tangent au cône au point F et pour cela, nous considérerons le plan tangent comme un cône qui aurait aussi A pour sommet mais dont la base au lieu d'être une ellipse serait la droite Ft tangente à cette ellipse au point F. Nous ne changeons donc pas de méthode; Au est une génératrice de ce cône-plan; A_1u en est l'ombre portée sur le géométral; elle rencontre en V_1 l'ombre portée BC_1 et le rayon inverse V_1S donne en V un point de l'ombre; FV est la tangente demandée.

(b). Point D sur le contour apparent. – A_1d est l'ombre géométrale de la génératrice AD; elle rencontre en D_1 l'ombre BC_1; le rayon inverse SD_1 donne le point cherché D.

Remarque. – En ce point la courbe est tangente au contour apparent.

(c) Point de perte P. – Son ombre sur le géométral est le point P_1 situé sur l'ombre portée du cône. Le rayon inverse SP_1 donne le point de perte P.

Remarque. – En ce point la tangente est le rayon lumineux SP.

§ 149. – Ombre portée dans l'intérieur d'un berceau.

Soit fig. 202 en perspective, un berceau ayant sa courbe de tête dans le mur vertical fuyant Rr – Qq. et limité, pour l'autre tête, au plan vertical parallèle au précédent et passant par la verticale Vv. – Soit ADB la courbe de tête. – On veut trouver l'ombre portée dans l'intérieur du berceau par cette courbe et par l'arête Aa du piédroit. – Soit S le soleil dans l'espace, et s sa projection, située à l'infini, sur le géométral, c'est-à-dire sur la ligne d'horizon. Le problème revient à trouver l'intersection de deux cylindres ayant une même base, qui est la ligne aADBb (Nous considérons les piédroits comme formant un même cylindre avec le berceau). – Le premier cylindre est le berceau; ses génératrices fuient en f'; le second est le cylindre d'ombre de la directrice aADBb, ses génératrices sont des rayons lumineux et fuient en S dans l'espace et en s sur le géométral.

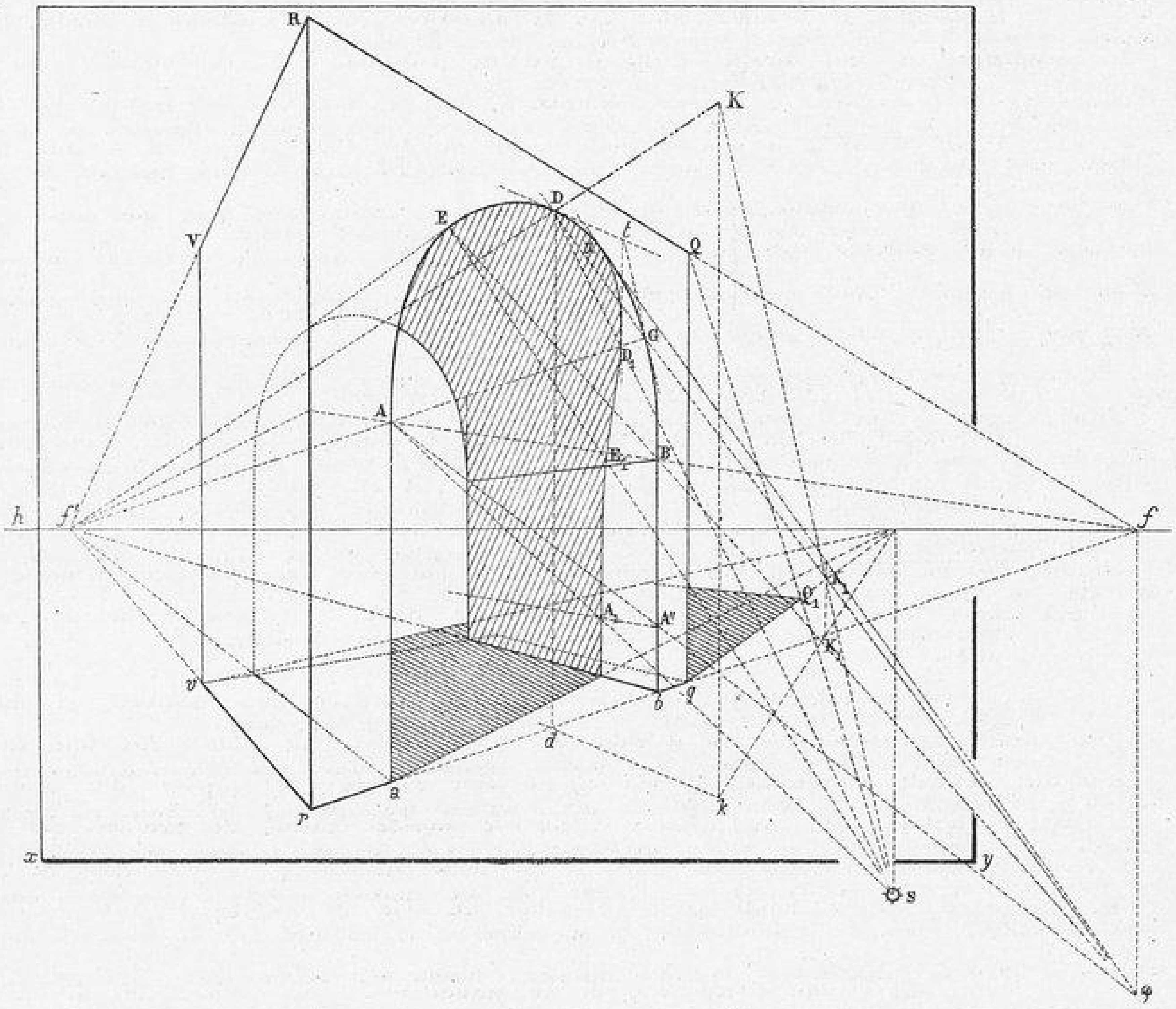
On coupe les deux cylindres par des plans parallèles à la fois à leurs 2 génératrices, c'est-à-dire par les plans d'ombre des génératrices du berceau.

Soit DK – dk une génératrice du berceau. Menons le rayon lumineux du point Kk. – Soit SK – sk ce rayon, il perce le mur de tête en K_1k_1, et par suite DK_1 est la trace sur le plan de tête, du plan d'ombre de DK_1, autrement dit, c'est l'ombre de la génératrice DK sur le plan de tête. – Prolongée elle rencontre en φ la ligne de fuite de ce plan de tête, φ est donc non-seulement le point de fuite de DK_1 mais encore celui de toutes les traces des plans auxiliaires sur le plan de tête, puisque les rayons lumineux sont parallèles; autrement dit toutes les génératrices telles que DK donnent sur le plan de tête des ombres portées qui sont parallèles entre elles, dans l'espace, et qui, par conséquent ont, en perspective, un même point de fuite φ.

Cela posé, cherchons l'ombre du point D. – Le plan auxiliaire dont la trace sur le plan

de tête est Dℓ, recoupe la directrice du berceau en G. – Ce plan auxiliaire détermine donc une nouvelle

Fig. 202.



génératrice Gf' du berceau, et le point D porte ombre en D_1 à l'intersection de cette génératrice et du rayon lumineux de l'espace DS.

Tangente. – Le plan tangent au cylindre d'ombre au point D, a pour trace sur le plan de tête, la tangente Dt à la courbe de tête. – Le plan tangent au berceau en D_1 a pour trace de tête la tangente Gt, au point G. – Ces deux traces se coupent en t, et la tangente est tD_1.

Point d'origine. – Du point ℓ menons la tangente ℓu à la courbe de tête; si nous appliquons au point u la construction précédente, nous reconnaissons que ce point porte ombre sur lui-même. C'est le point d'origine de la courbe d'ombre portée. – Nous savons que cette dernière est plane et que c'est une conique (Ombre du Pont).

La construction donnée pour la tangente ne s'applique pas ici, car, en ce point, les plans tangents aux deux cylindres sont confondus. – On aura la tangente en u en se basant sur ce que la courbe d'ombre portée est plane. – On en prendra 3 points, u D_1 E_1 par exemple, ce qui déterminera

son plan. On cherchera ensuite l'intersection de ce plan avec le plan tangent en u, soit au cylindre d'ombre, soit au berceau.

En tout cas, au point u, l'ombre n'est pas tangente à la courbe de tête.

Le point K_1 de 1^{re} ombre situé sur la génératrice B_1 de naissance à droite, s'obtient en faisant la construction en sens inverse, c'est-à-dire en joignant φ B, prolongeant jusqu'en K_1 sur la courbe de tête, menant le rayon lumineux ES et prenant son intersection avec la génératrice B. Le point A, de naissance à gauche porte ombre en A_1 obtenu comme on a fait pour l'ombre D_1 du point D.

Enfin, l'ombre portée sur le géométral se comprend facilement.

Restitutions perspectives.

16e Leçon.

§ 150. – Utilité des restitutions perspectives.

Nous avons vu que lorsque l'on connaît la ligne d'horizon le point principal de fuite et ses points de distance, réduite ou non réduite, il est possible soit d'effectuer un relèvement du géométral, soit d'appliquer la méthode de la corde de l'arc, soit, plus généralement, de résoudre sur un tableau perspectif comme on le fait sur une épure de géométrie descriptive, tout problème dans lequel la vraie forme des figures doit servir comme donnée ou doit être obtenue comme résultat.

Ce problème intéresse les peintres pour l'exécution de leurs tableaux. Il leur arrive en effet, dans une composition où il entre de l'architecture, de placer sur leur esquisse les lignes principales de cette architecture de manière à bien encadrer les figures qui forment en réalité la partie importante de leur tableau. Dans le rapide travail de création qui caractérise l'esquisse, le peintre cherche avant tout un effet; tout doit concourir à la réalisation de cet effet, aussi bien les figures que les lignes de l'architecture et que les accessoires, tels que les tables, les sièges, etc......

Plus tard, lorsqu'il reportera, en la grandissant, son esquisse sur la toile, l'artiste aura le soin de placer exactement dans leurs positions relatives les lignes principales, celles qui contribuent le plus à produire l'effet; quant aux lignes de détail elles devront être établies en parfaite concordance perspective avec les autres. Il ne faut pas, par exemple, que l'angle d'une table qui est droit en réalité paraisse aigu ou obtus; qu'une arcade qui doit être plein cintre paraisse surbaissée ou surhaussée.

Tous ces détails doivent donc être établis par les méthodes de perspective directe appliquées en prenant comme départ les grandes lignes du tableau; cette application ne peut se faire que si l'on connaît les points principaux de fuite et de distance.

Ces restitutions perspectives intéressent également les ingénieurs et les officiers. Il peut être important pour eux d'utiliser une photographie pour faire le relevé rapide d'un terrain; pour mesurer la distance entre deux points; pour préciser une reconnaissance militaire.

Le Colonel Laussedat et le commandant Javary ont perfectionné la méthode du relevé photographique: En prenant les images d'un terrain, ou d'une place forte sous deux points de vue différents, on peut ensuite sur ces deux images, viser les différents points avec des

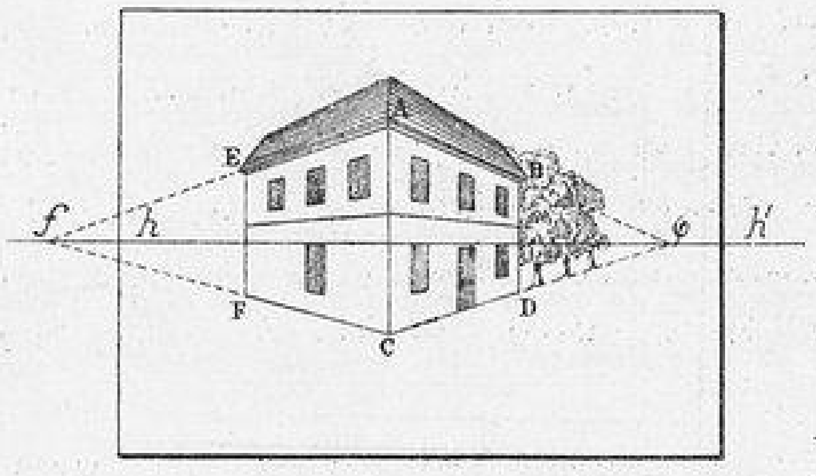
appareils spéciaux comme on les eût visés sur le terrain avec le théodolite et en déduire la planimétrie et le relief du sol. Ces procédés ont été poussés par leurs auteurs à un tel degré de perfection et de rapidité qu'il a été possible, avec une escouade d'agents bien exercés, de relever en une seule journée la place de Belfort et ses environs. Le matin on commençait à prendre les photographies, le soir le plan topographique était complètement reporté sur le papier, avec indication des principales courbes de niveau.

§ 151. – Restitution de la ligne d'horizon.

1° Si le tableau présente une nappe d'eau indéfinie, la mer par exemple, sa limite sera, sans erreur sensible, la ligne d'horizon. Si la nappe d'eau sans être indéfinie est suffisamment grande, si c'est un lac ou un étang d'une certaine étendue la ligne la plus éloignée suivant laquelle elle coupe les berges ou le terrain pourra être prise sans grande erreur pour ligne d'horizon. Mais il faut cependant remarquer que dans ce cas il faut prendre l'horizon un peu au-dessus de cette ligne.

2° Si la vue présente des édifices, les arêtes des murs donneront la direction des verticales, et par conséquent celle de l'horizon qui lui est perpendiculaire. Il suffira d'un seul point pour déterminer la ligne d'horizon : en prolongeant deux horizontales parallèles telles que AB et CD on aura leur point de fuite φ situé sur l'horizon. Deux autres lignes horizontales EA et CF donneront, comme vérification, un autre point de fuite également situé sur l'horizon.

Fig. 203.



§ 152. – Restitution des points principaux de fuite et de distance.

1re Méthode. – En utilisant deux angles droits. –

Dans presque tous les tableaux il est possible de trouver deux droites que l'on sait être dans un plan horizontal, et à angle droit l'une sur l'autre. Par exemple, dans le croquis précédent (fig. 203), l'angle FCD des 2 murs de la maison figurée en perspective, est droit, et dans un plan horizontal.

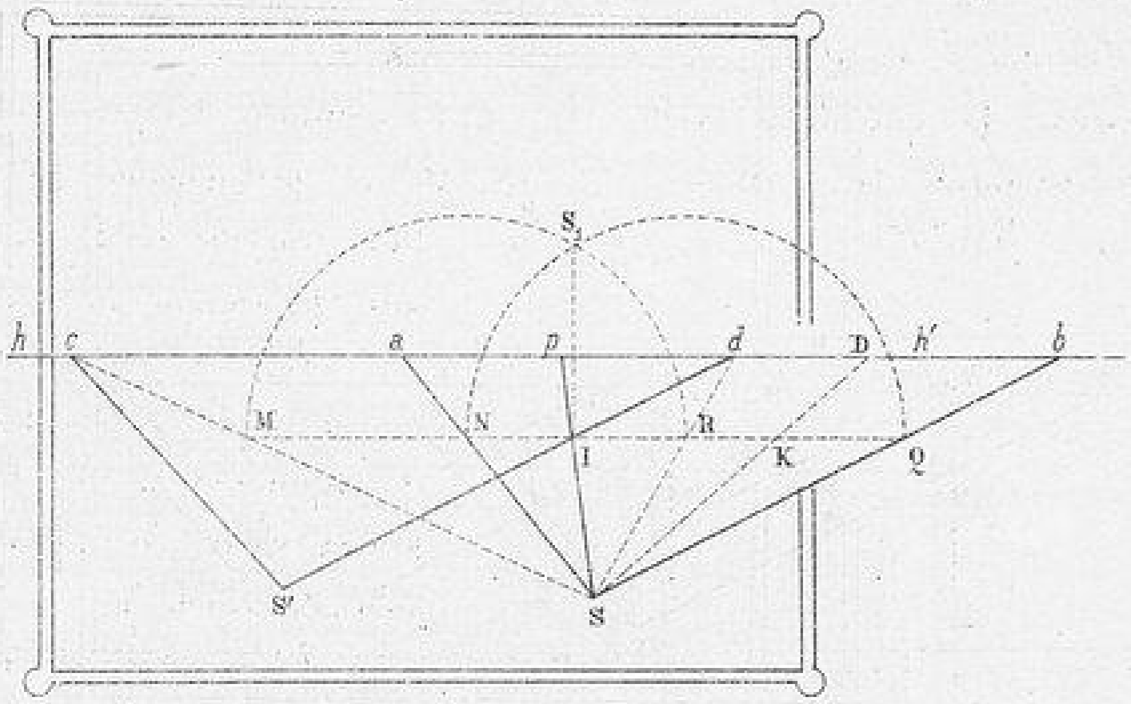
Imaginons que dans le tableau (fig. 204) nous ayons deux angles aSb et cS'd, dans ces conditions.

Par le point S menons deux droites Sc – Sd perspectivement parallèles aux droites cS' et S'd, c'est-à-dire concourant aux mêmes points de fuite c et d. L'angle cSd est également droit dans le géométral. Opérons le relèvement de ce géométral. A cet effet prenons une charnière MQ, coupant les 4 droites en MNRQ. L'angle MSR qui est droit, se relèvera et aura son sommet S relevé en S_1 sur la demi-circonférence décrite sur MR comme diamètre. – De même, le point S, sommet de l'angle droit NSQ se relèvera sur la demi-circonférence dont NQ est le diamètre. – Le point S sera donc relevé en S_1 à l'intersection des deux cercles. – Si maintenant nous remettons le géométral en place, la perpendiculaire IS_1 deviendra IS du géométral. Elle est perpendiculaire au tableau; elle donne donc en p sur hh' le point de fuite principal.

Portons sur la ligne de front IQ une distance $IK = IS_1 = IS$ du géométral et joignons SK ; cette

droite prolongée donne par son intersection D avec la ligne d'horizon, le point de distance.

Fig. 204.



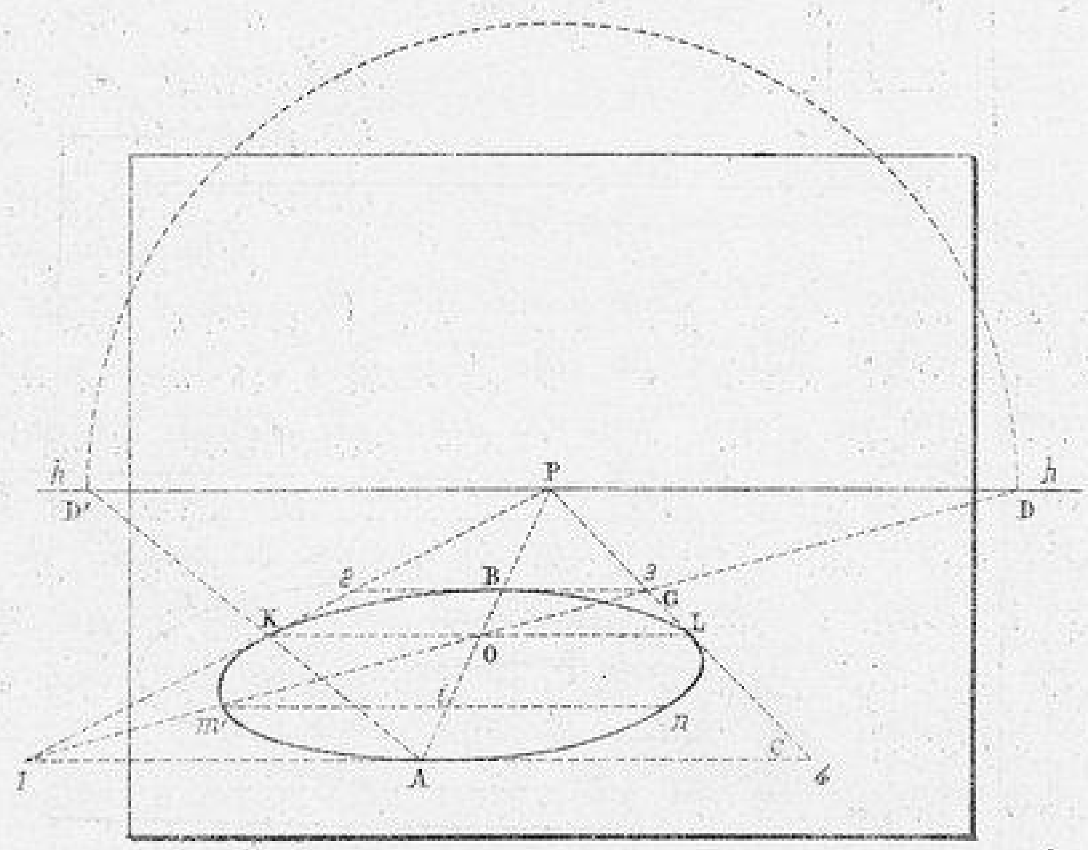
Nota. – Si les angles S' et S de l'espace, au lieu d'être connus comme étant droits l'eussent été comme étant des angles déterminés de 60 degrés, de 45 degrés.... par exemple, la solution eut été analogue ; seulement, sur les droites MR et NQ au lieu de décrire des demi-circonférences on eut décrit des segments capables des angles connus.

2ᵉ *Méthode.* – En utilisant un cercle horizontal. – (fig. 205).

La connaissance d'une figure que l'on sait être la perspective d'un cercle horizontal, permet de déduire le point principal de fuite et son point de distance.

1° Point principal. – Deux tangentes AC, BG, parallèles à la ligne d'horizon donnent une ligne de contact AB, perpendiculaire au tableau, qui fuit au point principal p et qui le détermine. Comme les points de contact B et A sont assez difficiles à déterminer on fera bien, pour plus de précision, de mener deux cordes de front telles que m n, d'en prendre le milieu i, et la droite AP passera par les points tels que i.

Fig. 205.



2° Points de distance. – Deux tangentes PK et PL, menées du point P, déterminent en 1,2,3,4 la perspective du cercle circonscrit, dont la diagonale 1.3 prolongée donne en D le point de distance D.

On pourrait varier indéfiniment les cas dans lesquels un dessin perspectif exact permet de restituer les données d'un tableau.

On remarquera que la solution dérive presque toujours du problème que nous avons traité plus haut sous le titre : Relèvement du géométral. Pour fixer la méthode à suivre nous traiterons encore un autre cas.

§ 153. –

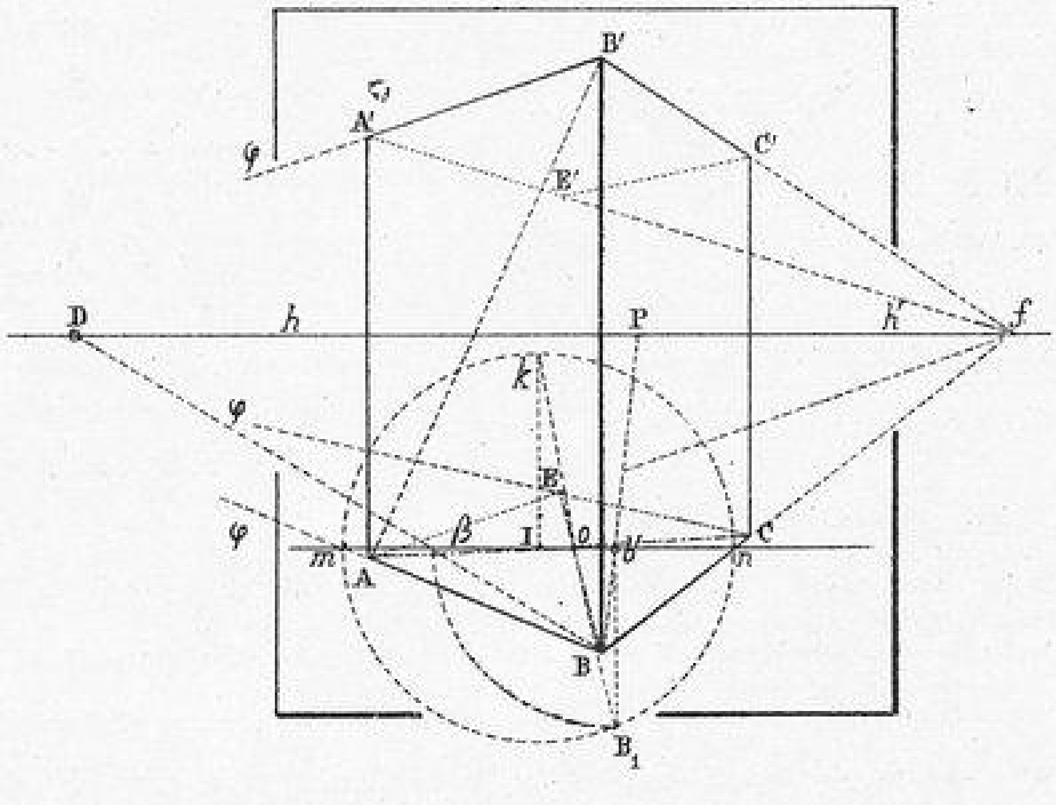
§ 153. – Restitution des données en utilisant un carré perspectif.

Imaginons (fig. 206) que l'on ait en AA' - BB' - CC' le dessin, supposé exact, des trois arêtes vues d'un pilastre que l'on sait être à base carrée.

On veut : 1° trouver la quatrième arête EE' et 2° restituer les données P et D du tableau.

(a) L'horizon. – On commence par restituer l'horizon hh' en prolongeant BC et B'C' jusqu'à leur rencontre en f et menant par f une perpendiculaire aux arêtes verticales.

Fig. 206.



Si le point f est inaccessible le croquis (fig. 206 bis) fait voir comment, en rapprochant la ligne C'C en c''c'', on pourra lever la difficulté et obtenir un point accessible j.

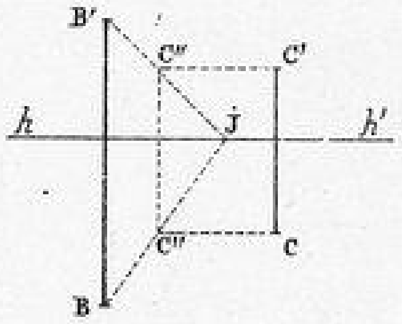


Fig. 206 bis.

(b) Le carré de base. – En menant par les points A et C des parallèles perspectives aux côtés BC et BA on achèvera le carré de base ABCE. Pour cette opération on sera, sans doute, conduit à utiliser les constructions données pour les points de fuite inaccessibles f ou φ (Voir 1ère partie emploi du Té brisé, etc.....).

(c) Le centre du carré et le relèvement du géométral. – On mène les diagonales et on obtient en O, la perspective du centre du carré.

Cela fait, on prend en mn une charnière de front (on fera bien de la faire passer par le point O, mais ce n'est pas indispensable); et on relève le géométral autour de cette charnière. – D'une part le sommet de l'angle droit B se relèvera quelque part sur la demi-circonférence décrite sur mn comme diamètre ; d'autre part, la diagonale BE étant dans un carré, la bissectrice de l'angle ABC, doit, après le relèvement aller passer par le point k milieu de la demi-circonférence mkn. – Donc, puisque le point O, sur la charnière, n'a pas bougé, la diagonale se relèvera suivant KO, qui prolongée donne en B_1 le relèvement du point B.

Maintenant la restitution est facile. En effet :

1° Abaissons B_1b' perpendiculaire sur la charnière ; cette droite se rabat suivant Bb', qui est une droite principale et qui prolongée jusqu'à l'horizon donne en P le point principal.

2° Prenons sur la charnière, $b'\delta = b'B_1$ et joignons $B\delta$; nous obtenons une ligne d'égale resection dont le point de fuite D, accessible ou non, est le point de distance. Le problème est résolu.

§ 154. – Restitution visuelle.

En quoi consiste la restitution visuelle. – Lorsque l'on examine un tableau vertical dont la

perspective est exacte, il faut, pour avoir l'illusion aussi complète que possible, se placer exactement au point de vue, c'est-à-dire mettre l'œil à la hauteur de l'horizon, bien en face du point principal et à une distance du tableau égale à la distance principale. Dans ces conditions, si l'angle optique ne dépasse pas 22 ou 23 degrés dans tous les sens, aussi bien en largeur qu'en hauteur, le regard embrassera le tableau d'un seul coup d'œil et l'effet produit sera aussi satisfaisant que possible. Mais, surtout si le tableau est grand, il est bien difficile de se placer exactement au point de vue, et d'ailleurs on est entraîné, pour mieux observer les détails, à se déplacer, et par conséquent à changer le point de vue.

L'aspect va donc changer et le tableau donnera l'illusion de figures différentes de celles que le peintre a voulu représenter.

Le spectateur se déplaçant devant le tableau comment variera l'appréciation des objets représentés ? Telle est la question à se poser.

Disons de suite que les verticales seront toujours restituées en verticales et que toute figure de front sera restituée dans sa vraie forme et dans ses vrais rapports de grandeur avec une autre figure de front située avec elle dans un même plan.

§ 155. – Déplacement horizontal.

Dans ce cas le spectateur se déplace dans le plan d'horizon.

Remarquons d'abord que tous les problèmes de restitution perspective qui exigeaient la connaissance de la ligne d'horizon, mais non pas celle des points principaux de fuite et de distance conduiront aux mêmes restitutions. Tels sont les problèmes relatifs aux appréciations des rapports de division d'une ligne droite horizontale ou d'une droite quelconque. Cette remarque faite étudions deux cas:

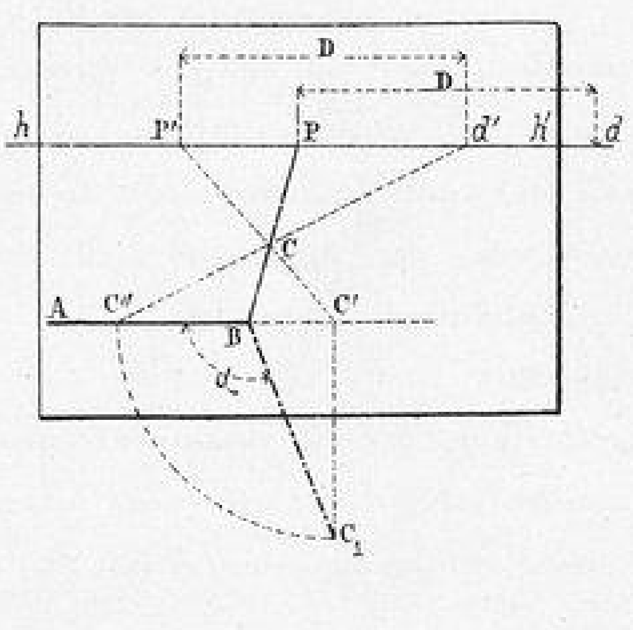
1er cas. – Le spectateur ne change pas de distance. – Il se promène en large devant le tableau, mais sans s'en éloigner ni s'en rapprocher. – Tout ce qui ne dépend que de la distance (cela se réduit en somme aux échelles des différents plans de front) ne variera pas.

Par exemple deux personnages d'égale taille et qui paraissaient tels quand on était au point de vue vrai paraîtront encore de même quand on se déplacera, sans changer de distance.

Mais l'apparence des angles va changer.

Ainsi tel angle qui paraissait droit, regardé du point de vue vrai ne le paraîtra plus quand on se déplacera soit à gauche soit à droite. Il suffit pour s'en rendre compte de faire (fig. 207) la restitution de l'angle ABC, dont le côté AB est de front et dont le côté BC fuit en P au point principal vrai. Cet angle est évidemment droit dans l'espace. Déplaçons-nous latéralement à gauche, et plaçons-nous en face du point P'. Relevons le géométral et avec lui le point C en C_1 obtenu en utilisant la distance P'd'. L'angle ABC est restitué en ABC_1 qui est obtus et non plus droit. Il n'y aura donc plus en se plaçant en face de P', l'illusion d'un angle droit qui se produisait quand on se plaçait en face de P.

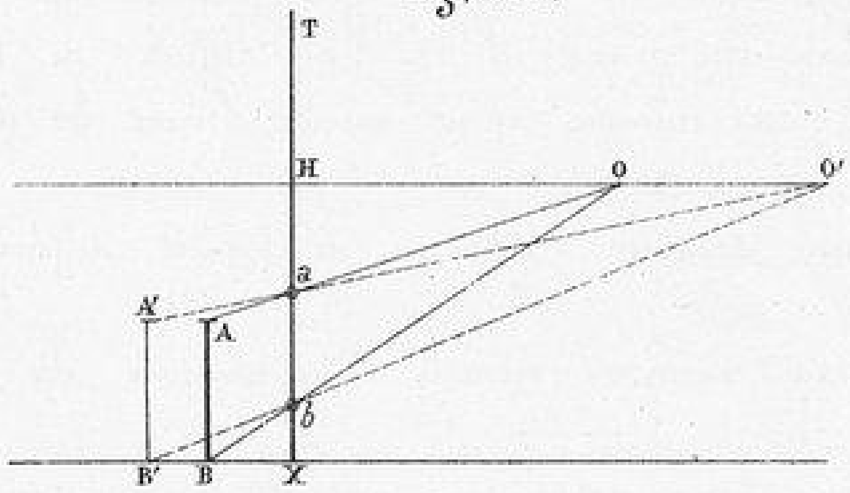
Fig. 207.



2e cas. – Le spectateur tout en restant dans le plan d'horizon, et bien en face du point principal, avance ou recule, autrement dit, change de distance.

Soit (fig. 208) une droite verticale AB, regardée du point O et donnant sur un tableau T une image ab. La figure 208 représente une coupe faite par un plan vertical perpendiculaire au tableau. Reculons en O' l'œil du spectateur et cherchons les positions de la verticale qui, reposant par son pied sur le géométral, donneront comme apparence perspective la même image ab. On obtient la droite A'B' et l'on voit que A'B' est plus grande que AB et, surtout, plus éloignée qu'elle du tableau.

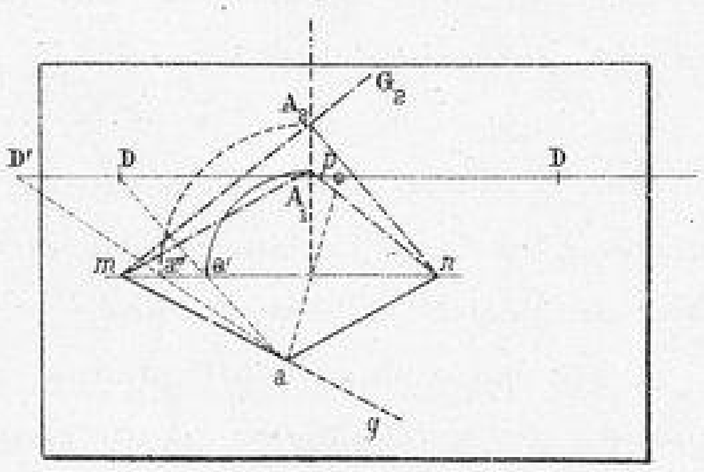
Fig. 208.



L'éloignement du spectateur a donc pour effet de reculer les différents plans de front du tableau et d'augmenter l'illusion de grandeur des figures qui y sont contenues. Les peintres connaissent bien cet effet; ils le traduisent en disant que le reculement donne de la profondeur aux tableaux.

Il est évident que le changement de distance modifiera aussi l'appréciation des angles horizontaux. Prenons un angle perspectif m a n dont les 2 côtés a m et a n vont en s'éloignant et essayons (fig. 209) de restituer cet angle. Une première fois avec la distance P.D nous obtenons l'angle m A_1 n et une seconde fois avec la distance plus grande PD', nous obtenons l'angle m A_2 n qui est plus petit que dans le premier cas.

Fig. 209.



Donc l'éloignement a pour effet de faire apprécier plus petits qu'ils ne paraissaient du vrai point de vue, les angles horizontaux dont les côtés vont en s'éloignant ou en se rapprochant tous les deux du tableau.

Nota. – L'angle supplémentaire n a g dont un côté a n s'éloigne et dont l'autre a g se rapproche du spectateur, paraîtra, au contraire grandir quand le spectateur augmentera sa distance.

§ 156. – Le spectateur change de hauteur.

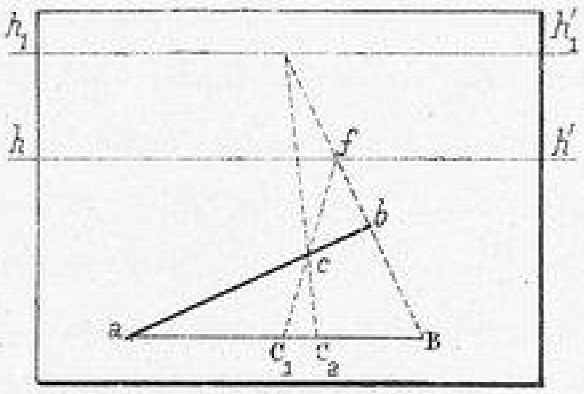
1er effet. Destruction de l'illusion d'horizontalité. – Supposons qu'il s'élève. La ligne d'horizon qui convient à sa nouvelle position va se trouver au-dessus de celle du tableau et, par conséquent, toutes les lignes horizontales du tableau dont le point de fuite se trouve sur la vraie ligne d'horizon vont sembler au spectateur posséder, maintenant, des points de fuite terrestres. Autrement dit, les lignes qui paraissaient horizontales paraîtront maintenant descendre.

L'effet inverse se produira si le spectateur s'abaisse.

2e effet: Destruction de l'illusion des rapports (fig. 210). – Imaginons que nous voulions restituer le rapport dans lequel une ligne horizontale perspective ab, est divisée par un point c. Une première fois faisons cette restitution en prenant hh' pour horizon et un point de fuite quelconque f sur hh'. Nous obtenons comme restitution le rapport $\frac{AC_1}{C_1B}$.

En faisant une seconde fois la même restitution, mais en prenant le point de fuite en f' sur une seconde ligne d'horizon h_1k_1, placée plus haut nous obtenons le rapport $\frac{AC_2}{C_2B}$, qui est plus grand que le précédent.

Fig. 210.



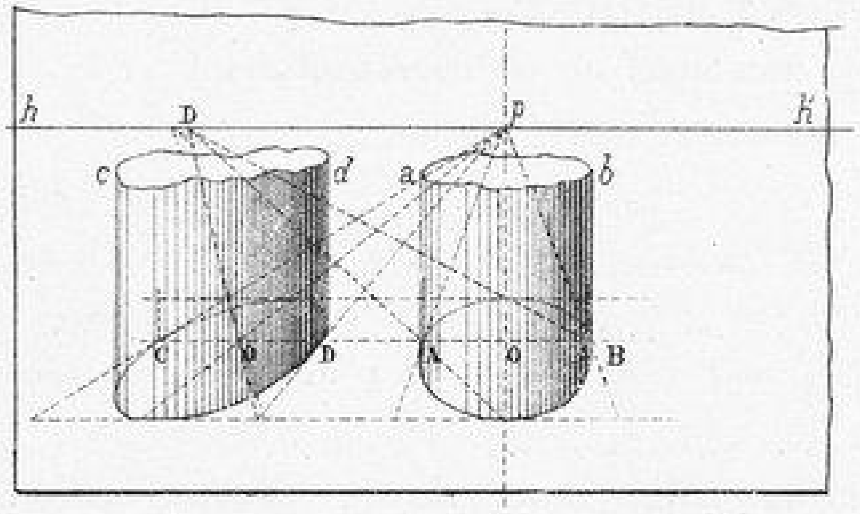
Ainsi, quand nous regardons un tableau en nous plaçant plus haut que son horizon nous faussons l'illusion des rapports nous avantageons, pour ainsi dire, les segments tels que ac, placés près du tableau, au détriment de ceux tels que cb, placés plus loin. En d'autres termes nous augmentons l'étendue apparente des zones, dites de premier plan.

Résumé. - Des trois erreurs de position que le spectateur peut commettre quand il regarde un tableau, la plus grave est l'erreur de hauteur. Il faut, avant tout, placer l'œil à la hauteur de l'horizon, sinon on détruit l'illusion de l'horizontalité, celle des rapports et celle des angles. - Les autres défauts de position sont moins graves; ils entraînent surtout des erreurs dans l'appréciation des angles.

§ 157. - Dérogations aux règles de la perspective.

Ces dérogations portent surtout sur la représentation perspective des surfaces de révolution. - Imaginons fig. 211 que nous ayons une série de colonnes, égales entre elles et placées de front. L'œil est en face du point P et il est facile de se rendre compte que la largeur perspective apparente cd, d'une colonne placée de côté en CD, devrait être plus grande que celle, ab, d'une colonne AB, placée au milieu.

Fig. 211.



Sur le croquis de la figure 211, on a, pour exagérer l'effet pris une distance PD, beaucoup trop petite: Néanmoins, si l'on pouvait placer l'œil exactement en face de P, à une distance égale à PD et regarder le tableau par un œilleton suffisamment petit, l'effet produit serait exact et l'on aurait l'illusion de colonnes cylindriques égales entre elles. Mais, surtout si le tableau est de grandes dimensions, le spectateur est entraîné à se déplacer, soit à droite soit à gauche pour mieux juger des détails. Alors, s'il se place en face de la colonne de gauche CD, l'effet produit par la colonne AB est très choquant. Elle paraît beaucoup trop étroite.

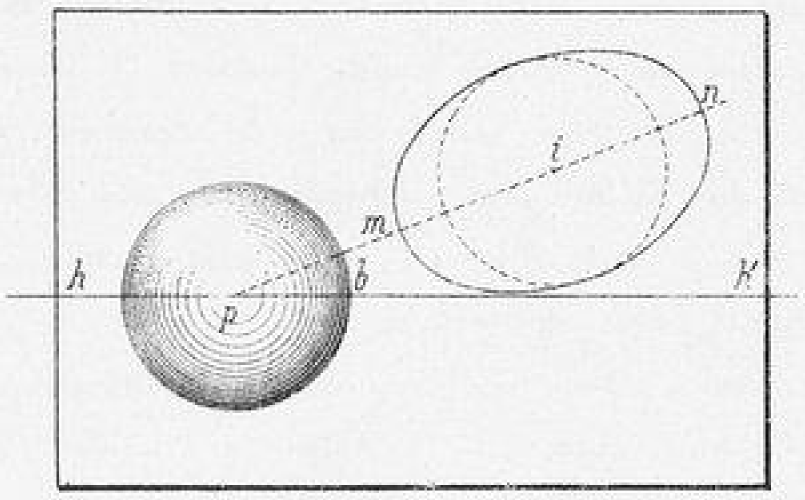
C'est pourquoi les grands peintres ayant à représenter un portique de front, ont toujours soin de donner aux colonnes des diamètres apparents perspectifs égaux entre eux. Ils dérogent ainsi, avec juste raison, aux règles de la perspective.

Une sphère placée bien au milieu du tableau, et à hauteur de l'œil, c'est-à-dire ayant la perspective de son centre confondue avec le point principal P, doit être figurée par un cercle (fig. 212); mais si son centre apparaît en un autre point, tel que i, sa perspective exacte doit être une ellipse dont le grand axe mn, est dirigé vers le point principal P.

Regardé bien exactement du vrai point de vue le tableau pourra donner en mn aussi

bien qu'en ab l'illusion d'une sphère; mais regardé en se plaçant à droite l'effet sera très mauvais, et l'on croira voir en m n un ellipsoïde déformé. C'est pourquoi Raphaël dans son tableau de l'École d'Athènes a figuré par un cercle la sphère que tient un personnage placé tout à fait sur le côté. Enfin, les surfaces de révolution qui sont sur les côtés d'un grand tableau doivent, par une dérogation aux règles de la perspective, être figurées comme si leur axe était confondu avec la verticale principale du tableau: c'est-à-dire que les ellipses qui représentent les différents parallèles doivent toutes avoir leur petit axe dirigé suivant l'axe même de la surface et leur grand axe dirigé horizontalement. En un mot elles doivent être représentées comme si elles étaient dessinées d'après nature par un observateur dont le rayon visuel principal serait dirigé sur l'axe de la surface. De cette façon lorsque l'on regardera l'ensemble du tableau en se plaçant au vrai point de vue, les surfaces de révolution telles que des vases, des balustres, placées sur les côtés ne paraîtront pas très justes, mais, par contre, lorsque l'on se déplacera, leur apparence sera parfaitement acceptable et n'aura rien de choquant.

Fig. 212.



Dessin d'après nature.
Relevé géométral et perspective d'observation.

Leçon supplémentaire.

§ 158. – Relevé géométral.

Le relevé géométral d'un objet consiste en un croquis, fait en général à main levée, dans lequel l'objet est représenté par un plan, par une élévation et par une coupe; c'est-à-dire en un croquis sur lequel l'objet est projeté trois fois, savoir: sur le plan horizontal, sur le plan vertical et sur un plan de profil.

Un croquis à main levée ne peut être exécuté avec assez de précision pour être fait à une échelle donnée. En tout cas, si l'on indique l'échelle d'un croquis (1/4. 1/5. 1/10 ......) cela ne peut être que pour permettre de juger approximativement des dimensions absolues ou relatives de ses différentes parties et nullement pour les mesurer rigoureusement, comme on pourrait le faire sur un dessin au net exécuté avec les instruments de précision.

Un relevé géométral doit être coté.

L'exécution d'un relevé géométral comprend les quatre opérations suivantes:

1°. La mise en feuille et l'esquisse du croquis;

2°. Le croquis définitif;

3°. La préparation des cotes;

4°. La mesure et l'écriture des cotes.

§ 159. – La mise en feuille du croquis.

Après avoir pris connaissance de l'objet à relever, on décide quelles sont les projections qu'il est nécessaire de donner et on s'inquiète de la bonne mise en feuille du dessin. Il faut pour cela

apprécier les grandes dimensions de l'objet, c'est-à-dire sa plus grande largeur, sa plus grande hauteur et sa plus grande profondeur. On peut, pour y arriver, mesurer approximativement ces dimensions avec un mètre. Il vaut mieux encore évaluer au coup d'œil, les rapports de ces trois grandes dimensions ou se servir, pour cette évaluation, d'une petite baguette prise pour commune mesure.

Supposons que nous ayons à représenter un coffre rectangulaire dont les dimensions soient approximativement : hauteur $H = 0^m,30$. Longueur $L = 0^m,50$. Profondeur $P = 0^m,40$.

On a la proportion : $\frac{H}{0,30} = \frac{L}{0,50} = \frac{P}{0,40}$ ou $\frac{H}{3} = \frac{L}{5} = \frac{P}{4}$.

Les trois grandes dimensions sont donc entre elles comme les nombres 3, 5 et 4.

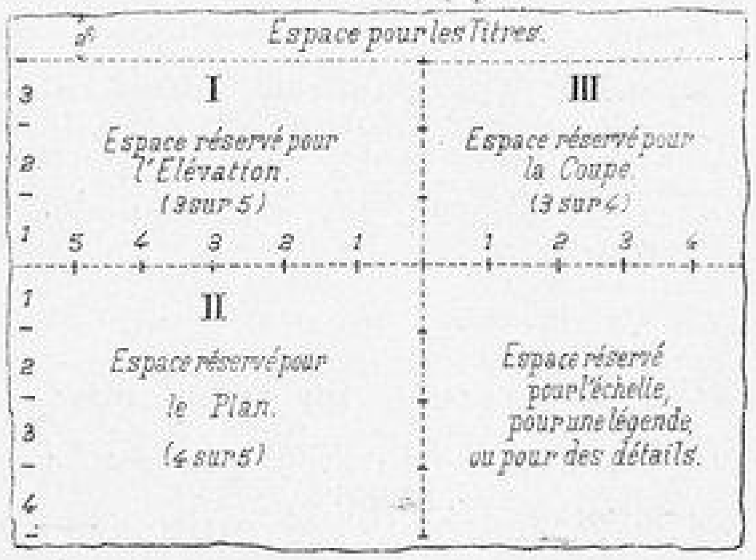
Faut-il disposer le dessin dans le sens de la longueur de la feuille ou plutôt dans celui de la hauteur ?

On est dans l'habitude (fig. 213, fig. 219) de placer l'élévation principale en haut et à gauche, le plan en dessous de l'élévation en concordance de largeur avec elle et la coupe, à droite de l'élévation et en concordance de hauteur avec elle. Or l'élévation donne les hauteurs et les largeurs, le plan fournit les largeurs et les profondeurs, la coupe redonne les hauteurs déjà connues par l'élévation et les profondeurs déjà indiquées sur le plan.

Par conséquent il faut répartir sur la feuille les espaces de telle sorte que dans un sens nous ayons la largeur ($L = 5$), la profondeur ($P = 4$), ensemble 9, tandis que dans l'autre sens nous aurons hauteur ($H = 3$), profondeur ($P = 4$) ensemble 7. Autrement dit : nous devons (fig. 213) prendre la feuille dans le sens de sa longueur.

Fig. 213.

Feuille de papier.



Par suite, après avoir réservé en haut pour les titres, une bande de 2 centimètres environ de hauteur nous diviserons ce qui reste de la feuille en trois compartiments I, II et III dont les proportions soient à peu près celles indiquées ci-dessus (5, 3 et 4). A ce moment la répartition des places dans la feuille est faite, il ne reste plus qu'à tracer les axes de chaque compartiment et à dessiner chaque projection autour de ses axes en remplissant, autant que possible, tout l'espace disponible. On doit éviter de faire des croquis trop petits.

§ 160. – L'esquisse du croquis.

On se conformera aux principes suivants :

1°. Les ensembles doivent toujours être faits avant les détails et les lignes enveloppantes avant les lignes enveloppées.

2°. Les contours trop mouvementés, doivent être simplifiés dans cette esquisse. C'est ainsi que, dans ce premier travail, les moulures, les profils, les congés de peu d'importance sont remplacés par leurs épannelages ou par leurs lignes d'étagement ; ils seront repris ensuite, plus en détail.

3°. Les trois projections doivent s'esquisser simultanément avec leurs points bien en concordance

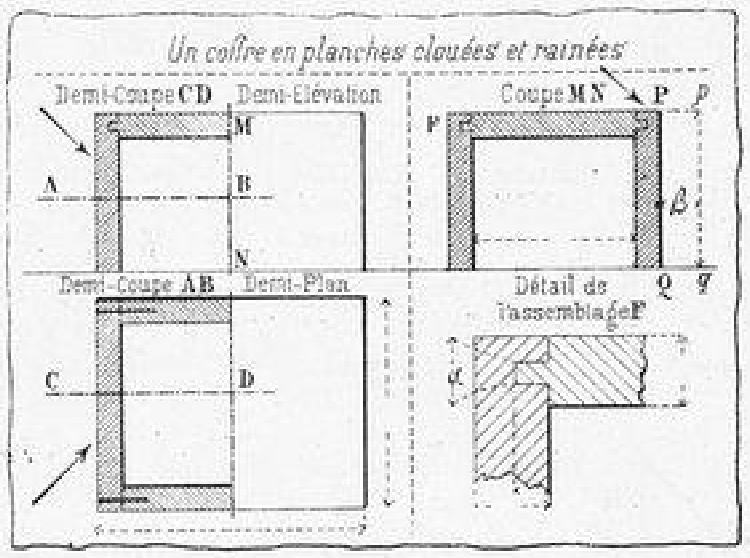
soit de hauteur (élévation et coupe) soit de largeur (élévation et plan) soit de profondeur (plan et coupe). Il ne faut jamais terminer complètement une projection avant d'avoir seulement esquissé les autres.

4° On ne doit prendre aucune mesure sérieuse en dessinant : on doit, autant que possible, évaluer au coup d'œil les proportions sans se servir du mètre.

Les cotes ne se préparent, ne se mesurent et ne s'écrivent qu'une fois le dessin du croquis complètement achevé.

Comme exemple très simple d'une mise en place d'un croquis, nous donnons (fig 214) le relevé géométral non coté d'un coffre rectangulaire creux.

Fig. 214.



On voit comment on a profité de la symétrie pour donner au lieu d'une élévation longitudinale complète, une demi-coupe et une demi-élévation, placées de chaque côté d'un même axe.

On a opéré d'une manière analogue pour le plan.

§ 161 – Le croquis définitif ou trait.

L'esquisse précédente a dû être exécutée très rapidement. Pour un croquis qui demanderait deux heures on doit consacrer quinze minutes environ à cette esquisse rapide. Une fois qu'elle est terminée on atténue les lignes en se servant de la gomme mais sans les effacer complètement ; après quoi on repasse les traits au crayon bien taillé en corrigeant ceux qui paraissent mauvais sur l'esquisse, en rectifiant les proportions qui semblent fausses et en rétablissant les concordances de hauteur, de largeur et de profondeur mal observées. C'est alors que l'on s'occupe des détails négligés de parti pris dans l'esquisse, tels que moulures, congés, etc.....

§ 162. – Traits de force. – Hachures.

Pour mieux faire sentir le relief on place des traits de force dans les croquis et dans les dessins de machines. En général, on n'en met pas dans les dessins d'architecture.

Règle à suivre : Un trait de force se place sur toutes les arêtes, droites ou courbes, qui formeraient séparation entre une surface dans la lumière et une surface dans l'ombre. – On ne doit jamais en mettre sur une ligne de contour apparent(1). Nous donnerons plus loin la justification des traits de force.

§ 163. – Hachures et teintes conventionnelles.

Les surfaces coupées reçoivent des hachures équidistantes et ordinairement inclinées à 45° suivant une direction perpendiculaire au rayon lumineux.

---

(1) Dans les Écoles d'Arts et Métiers, on place des traits de force sur les lignes de contour apparent situées dans l'ombre. – Rien ne justifie cette convention.

On peut remplacer les hachures par des teintes conventionnelles indiquant la nature de la matière coupée. (pierre, fer, bois.... etc...).

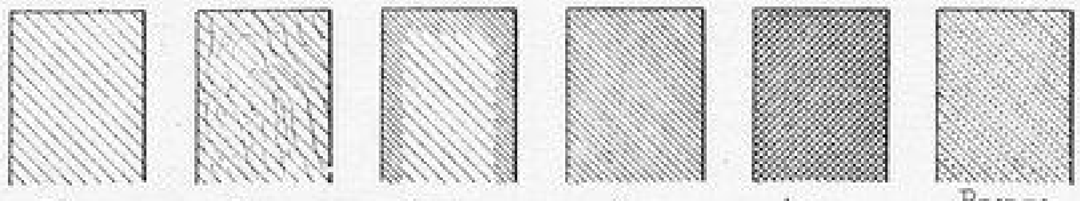
Les principales conventions sont les suivantes: (fig. 215).

Pierre: hachures largement espacées, ou teinte rose légère.

Bois: hachures largement espacées avec indication des veines du bois, ou bien teinte légère de sépia additionnée de terre de sienne brûlée.

Fonte: hachures largement espacées, doublées sur les bords d'un liseré de hachures plus serrées ou bien teinte légère de bleu de prusse additionnée d'un peu d'encre de chine et de carmin.

Fig. 215.



Fer: hachures serrées ou teinte de bleu de prusse légère.

Acier: hachures serrées, croisées dans les deux sens, ou teinte de bleu de prusse assez intense.

Cuivre et bronze: hachures serrées, alternativement pleines et pointillées, ou teinte de gomme gutte additionnée d'un peu de carmin.

§ 164. – Préparation des cotes.

Avant de mesurer les cotes avec les instruments de mesure (mètre, compas d'épaisseur, etc....) il faut les préparer en attente sur le croquis. Cette opération doit être faite à tête reposée, presque sans consulter le modèle en relief.

Autant que possible on doit écrire les cotes en dehors du contour de l'objet représenté. On trace alors des lignes pointillées telles que Pp, Qq (fig. 214) qui se nomment des attaches et la ligne pq, interrompue au milieu pour y inscrire la cote, est terminée à ses deux extrémités par une petite flèche qui touche les attaches. Cette ligne interrompue ab, se nomme une attente. – Dans certains cas (voir α, fig. 214) lorsque l'écartement des attaches serait trop petit pour y inscrire un nombre on écarte les attaches. Les cotes sont dites alors inscrites en soufflet. Quelquefois aussi, surtout pour coter des épaisseurs telles que B (fig 214) on place l'attente dans l'épaisseur et on inscrit la mesure sur le côté.

La meilleure méthode à suivre pour ne pas oublier de cotes consiste à préparer d'abord les hauteurs et à les mettre en attente soit sur l'élévation, soit sur la coupe, puis ensuite les largeurs, mises en attente sur le plan ou sur l'élévation, et de terminer par les profondeurs, préparées sur le plan ou sur la coupe.

Pour les relevés d'architecture, surtout lorsqu'il s'agit d'un profil, nous indiquons plus loin la meilleure marche à suivre.

Dans tous les cas on se conformera aux principes suivants;

1°. Préparer d'abord toutes les grandes cotes et reporter leurs attentes aussi loin que possible en dehors des contours de l'objet. – Les préparer d'un trait un peu fort et, plus tard, quand on les aura mesurées, inscrire les nombres trouvés en chiffres assez gros.

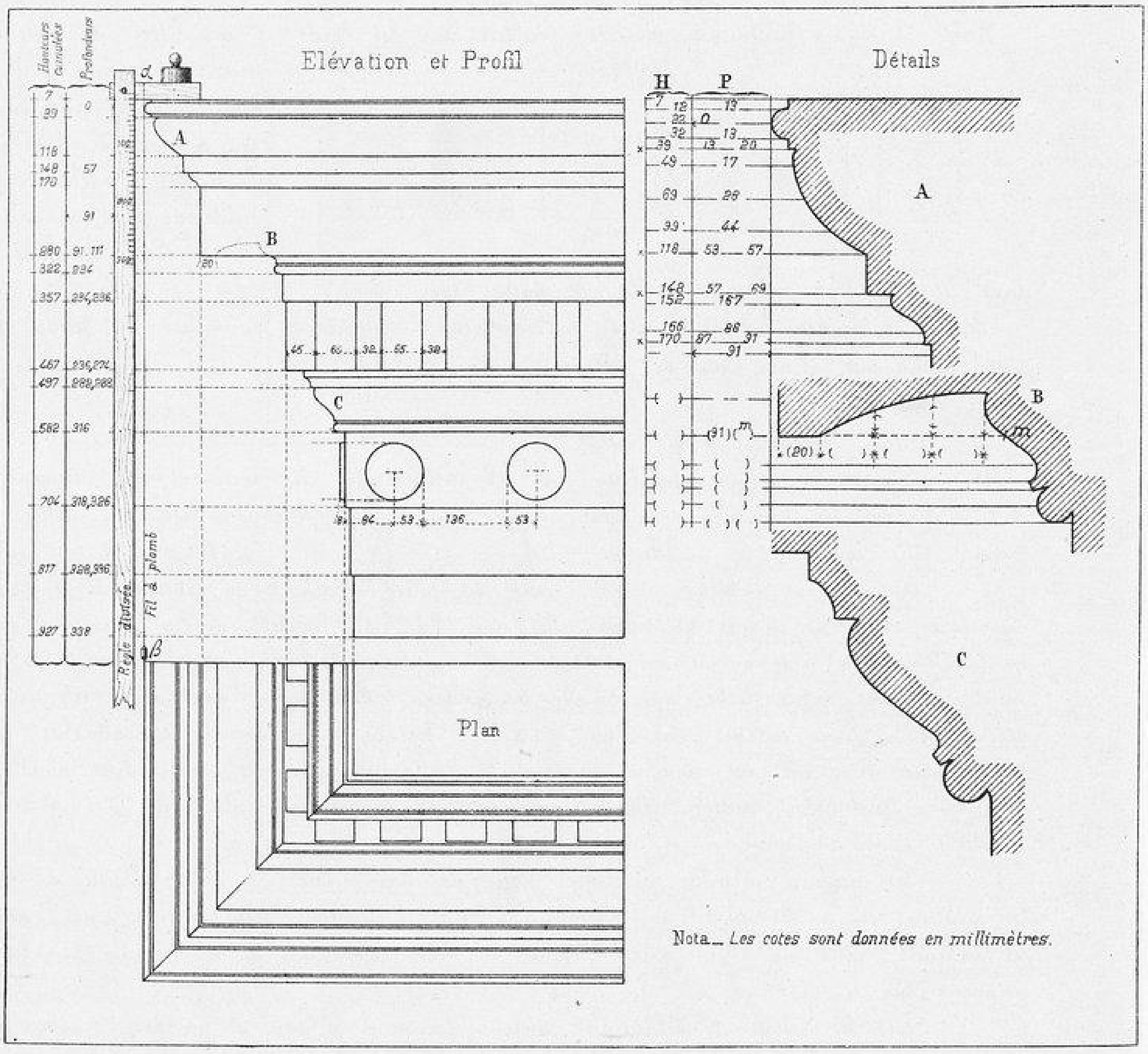
2°. Préparer ensuite les cotes de second et de troisième ordre et plus elles mesurent des dimensions petites plus il convient d'en placer les attentes près du contour du dessin.

§165.- Mesure des cotes dans un relevé d'architecture.

Nous ne nous occuperons pas du relevé d'un édifice tout entier (cette opération se ferait par les méthodes générales du levé de plans), mais seulement d'un fragment d'architecture, un entablement par exemple.

Soit, fig 216, en croquis, l'élévation et le plan de l'angle d'un entablement.

Fig. 216.



On remarquera qu'il est inutile de donner une coupe, puisque le profil est indiqué sur l'élévation. Le plan lui-même ne serait pas indispensable.

Sur une partie libre de la feuille on a donné à plus grande échelle en A, B et C le détail des principales moulures.

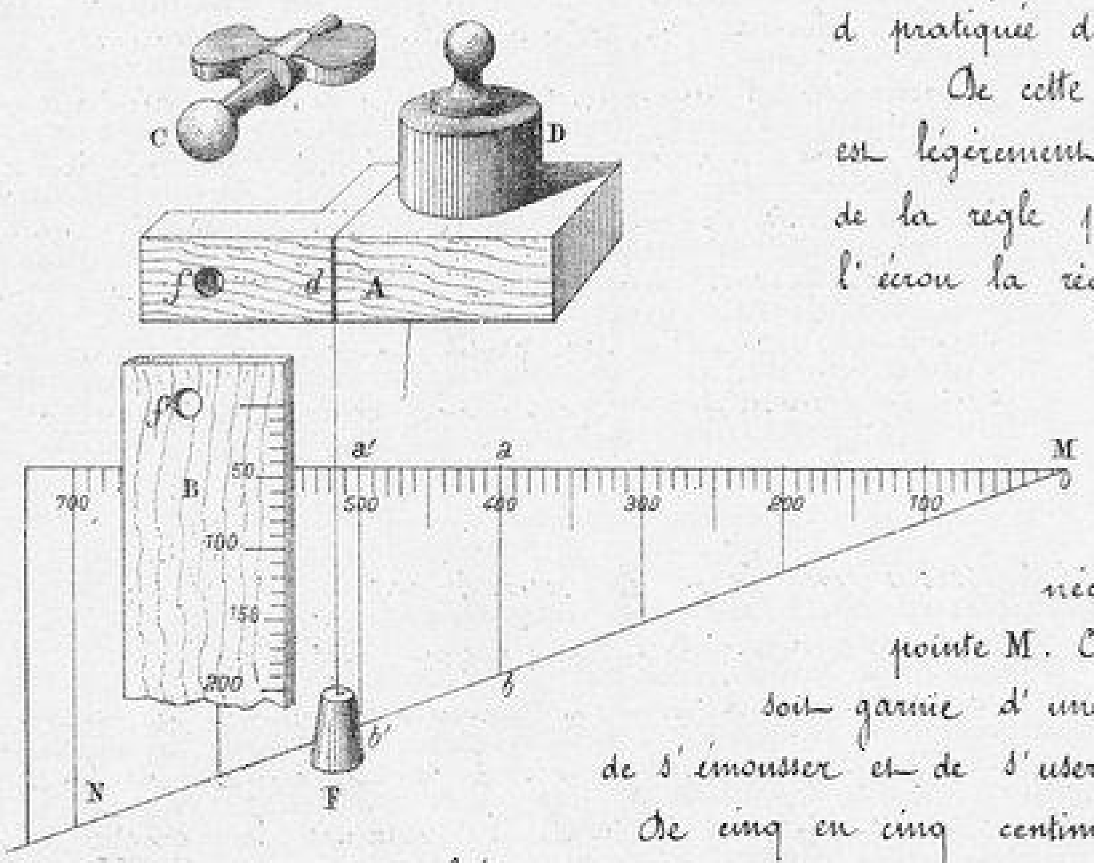
Le croquis une fois fait, la prise des cotes revient, en définitive, à mesurer les hauteurs

appelées aussi ordonnées, et les profondeurs (ou abcisses) des différents points du profil.

A cet effet sur le point le plus saillant de la corniche on placera un fil à plomb qui donnera la verticale; derrière le fil à plomb on fixera une règle plate divisée en millimètres et dont l'arête sera parallèle au fil à plomb. Le zéro de cette règle peut occuper une position quelconque, pourvu qu'il soit au-dessus du point le plus élevé de la corniche. Pour maintenir cette règle suspendue dans l'espace on peut adopter la disposition suivante (fig. 217):

A est une planchette de bois qui repose sur le dessus de la corniche par sa partie la plus large et y est maintenue par un contrepoids (une pierre ou une masse assez lourde). La partie f, élégie, de la planchette est en dehors. Elle est percée d'un trou f. La règle présente un trou correspondant f'. Un écrou à oreille C, peut pénétrer dans les deux ouvertures f et f' et soutenir la règle B.

Fig. 217.



Enfin le fil à plomb est maintenu par une encoche d pratiquée dans la planchette.

De cette façon, même si le dessus de la corniche est légèrement incliné, il sera facile de placer l'arête de la règle parallèle au fil à plomb; en serrant alors l'écrou la règle gardera la position prise.

Pour mesurer les profondeurs on pourra se servir d'une équerre MN, dont le grand côté de l'angle droit sera gradué en millimètres. Il est nécessaire que le zéro soit exactement à la pointe M. C'est pourquoi il sera bon que cette pointe soit garnie d'une petite armature en cuivre qui l'empêchera de s'émousser et de s'user.

De cinq en cinq centimètres, et même à des intervalles plus rapprochés, on aura mené des droites telles que ab - a'b'..... perpendiculaires sur le côté divisé.

Cela posé, on opère de la manière suivante:

1° On place la règle et le fil à plomb comme nous venons de l'indiquer et comme le montre la figure 216;

2° Avec la pointe M, de l'équerre divisée on vient toucher les points à relever. On a soin de placer l'équerre de telle sorte que les lignes ab - a'b'..... soient parallèles au fil à plomb. On est sûr, dès lors, que le dessus de l'équerre est bien horizontal.

3° On lit alors: 1° la division de l'équerre qui se trouve en regard du fil à plomb: cela donne l'abcisse ou profondeur du point en arrière du fil; 2° la division de la règle qui est au niveau du dessus de l'équerre: cela donne l'ordonnée du point au-dessous du zéro de la règle; La première cote s'écrit (fig. 216) dans la colonne intitulée <u>profondeurs</u>, et la seconde dans la colonne intitulée <u>hauteurs cumulées</u>. Il est évident, maintenant, que pour avoir la hauteur absolue d'un fragment de la corniche, du larmier, par exemple, il suffira de chercher la différence (280 - 170 = 110^{m}) des deux hauteurs cumulées répondant à son point le

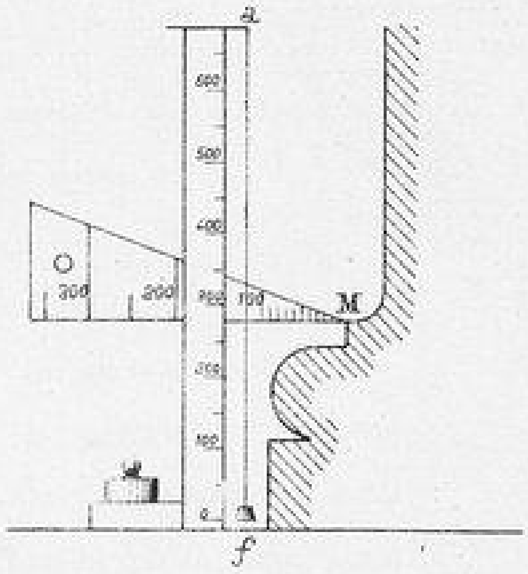
plus haut et à son point le plus bas.

Les détails seront relevés à part en A, B, C (fig. 216).

Pour relever un profil courbe, par exemple le quart de rond du détail A, il suffit de chercher les coordonnées d'un nombre suffisant de points, convenablement choisis.

Nota: 1° On recommande de prendre toujours pour unité de mesure le millimètre. Cela évitera, dans presque tous les cas, d'écrire des fractions décimales avec des virgules et diminuera les chances d'erreurs dans les écritures. Dans ce cas 20 centimètres, au lieu de s'écrire $0^{M},20$ s'écrira 200. - $3^{\text{mètres}}$ 535 millimètres, s'écrira 3535. 2° Sur le croquis (fig. 216) le détail B a ses cotes préparées en attente. Sur le croquis C tout est à préparer, à mesurer et à écrire. Si l'on a un soubassement à relever, ou un détail dont la partie supérieure ne soit pas en surplomb on peut placer la règle et le fil à plomb comme l'indique le croquis ci-joint (fig. 218) La planchette repose alors sur le sol.

Fig. 218.



S'il s'agit d'une surface de révolution, par exemple d'une colonne ou d'un balustre, on mesurera avec un fil le périmètre d'une partie cylindrique et divisant le nombre ainsi trouvé par le nombre $\pi = 3,1415$ on en déduira le diamètre et par suite le rayon de cette partie. Après quoi, se plaçant bien exactement dans le plan d'un méridien on relèvera, comme ci-dessus, un profil et on en déduira les rayons de tous les parallèles autres que celui que l'on a mesuré avec un fil.

§166. - Mesure des cotes dans un levé de machines.

La figure 219 donne le relevé d'une crapaudine à fixation verticale.

Les crapaudines sont des organes de machines qui servent à guider le mouvement d'arbres verticaux. La crapaudine de la figure 219 se compose d'une boîte cylindrique en fonte P, nommée la poêlette, fondue d'une seule pièce avec une plaque verticale S, nommée la semelle. Cette semelle s'applique sur un mur, par l'intermédiaire d'une plaque en fonte munie de deux ergots taillés en plan incliné, ce qui permet le réglage de l'appareil dans le sens horizontal.

Un cylindre en bronze G, nommé le gobelet, parfaitement ajusté au tour est logé dans l'intérieur de la poêlette. On remarquera que, pour la facilité de l'ajustage, le gobelet n'est en contact avec la poêlette qu'à la partie supérieure et inférieure, et par l'intermédiaire de ce que l'on nomme des portées.

Le fond du gobelet est occupé par un disque d'acier nommé grain. Le pivot, extrémité de l'arbre vertical et qui n'est pas figuré sur le croquis, est guidé par le gobelet et repose sur le grain d'acier.

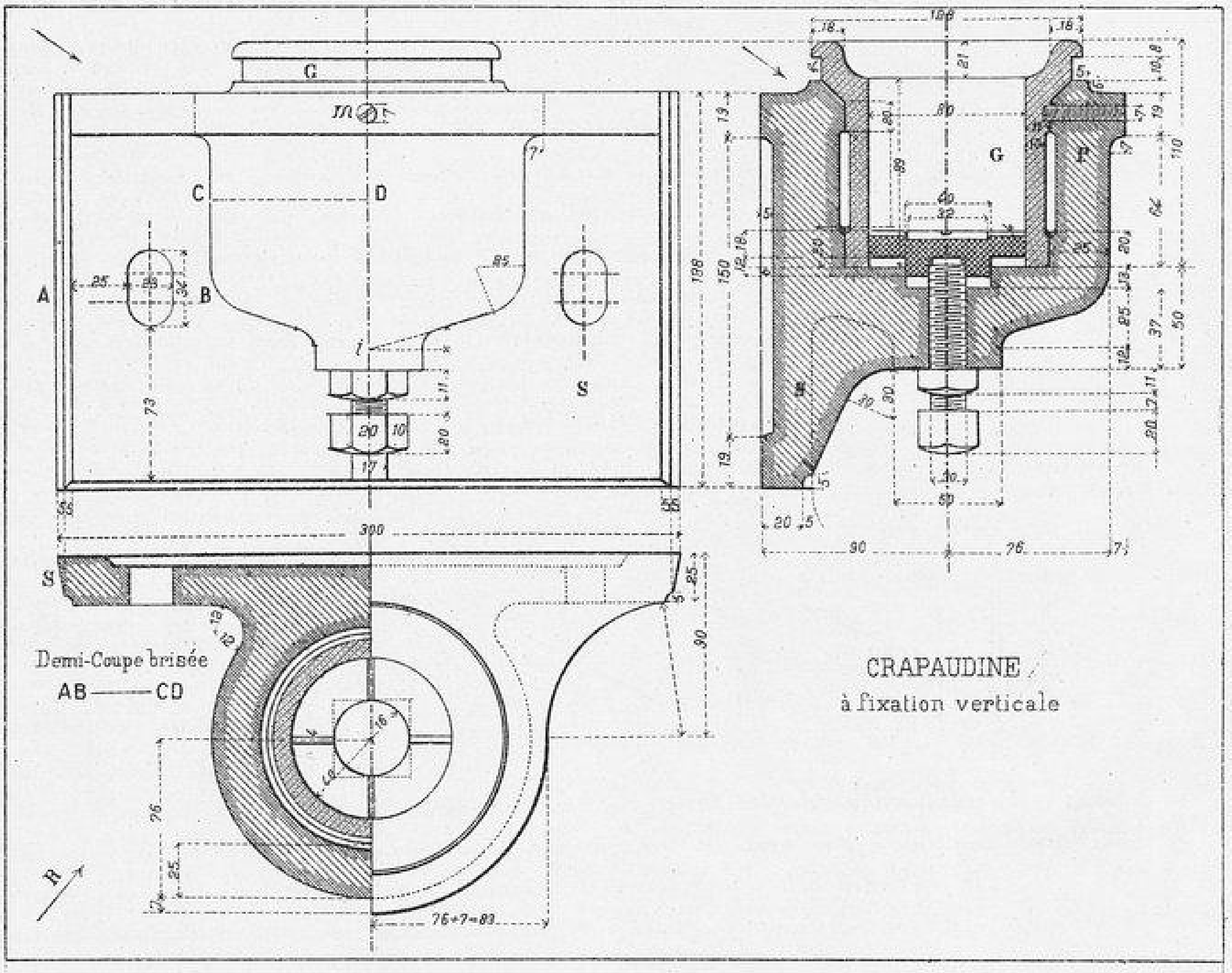
Ce dernier porte une cavité centrale pour loger l'huile avec quatre rainures rayonnantes pour la répartir sur les surfaces en contact. A sa partie inférieure le grain repose sur la tête d'une vis, destinée à assurer le réglage vertical et à détruire l'effet de l'usure du pivot.

Enfin une petite vis m, empêche le gobelet de tourner avec le pivot.

Les trois figures qui composent le relevé se comprennent facilement sur le croquis.

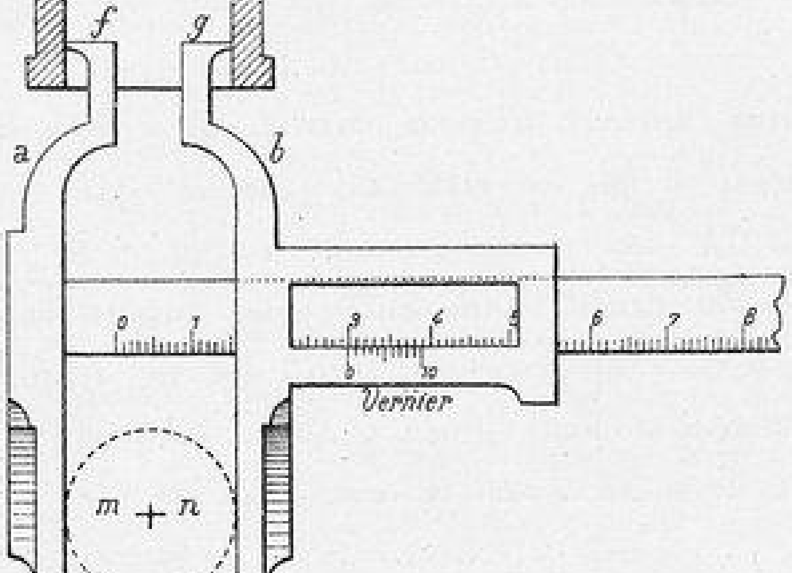
On remarquera que sur le plan on a profité de la symétrie pour donner, à gauche, une demi-coupe horizontale.

Fig. 219.



Le dessin une fois terminé les cotes ont été préparées à tête reposée et mesurées ensuite. Pour cette mesure on se sert d'un mètre ordinaire pliant, dit <u>mètre de charpentier</u>. Le premier décimètre de chaque extrémité doit être gradué en millimètres et le zéro de la graduation doit se trouver exactement à l'extrémité garnie de cuivre du mètre.

Fig. 220.



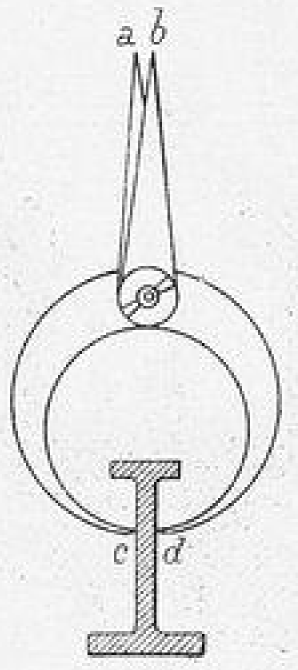
Pour mesurer avec précision les épaisseurs ou les diamètres des corps ronds on se sert du pied à coulisse muni d'un vernier (fig. 220).

Pour mesurer un diamètre intérieur tel que fg, le pied à coulisse est muni de deux parties saillantes a et b, dont les saillies f et g ont le même écartement que les deux machoires m et n. – Le même vernier en donne donc

l'écartement.

Pour mesurer l'épaisseur cd, d'une paroi rentrante on se sert du compas d'épaisseur fig. 221. L'écartement des deux pointes a et b est exactement le même que celui des deux machoires c et d.

Fig. 221.

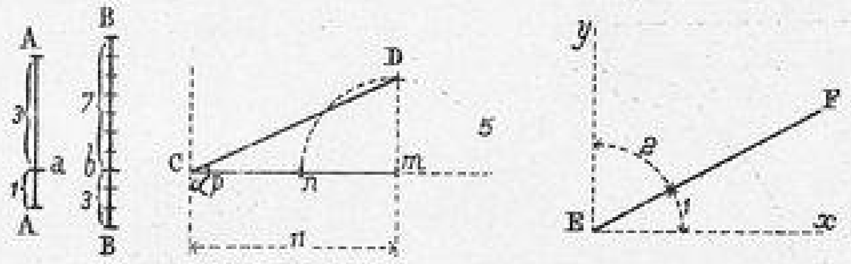


Dessin perspectif d'après nature.

§ 167. - Exercices préalables. - Appréciation des rapports et des pentes.

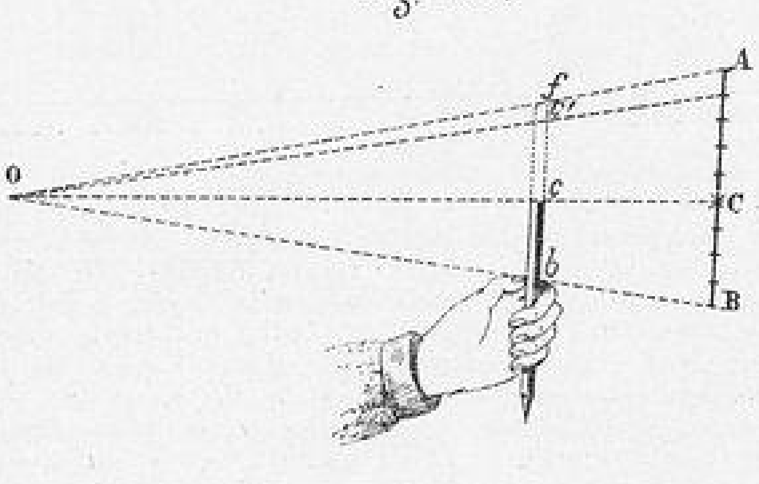
On se propose dans ce chapitre d'indiquer sommairement la marche générale à suivre quand on dessine d'après nature et la manière dont il faut ordonner les observations à faire sur les objets que l'on copie. Le dessinateur doit d'abord s'être exercé à l'appréciation à vue des rapports de lignes droites entre elles et à l'évaluation des pentes apparentes des lignes. Il doit être assez exercé pour reconnaître d'un simple coup d'œil que (fig. 222) 1° le point a partage la verticale AA en deux parties qui sont entre elles comme 3 et 1, ce que l'on traduit en disant que b, tombe aux 3/4 de AA; 2° le point b partage BB en deux parties qui sont entre elles comme 7 et 3. (on dit encore que b tombe aux 7/10 de BB.

Fig. 222.



Chacun sait comment (fig. 223) lorsque le coup d'œil n'est pas encore très exercé, il est possible de se servir du crayon pour apprécier les rapports réels ou apparents de deux longueurs. On tient le crayon bien exactement de front et à bout de bras; puis, prenant pour limite variable l'ongle du pouce, on fait coïncider, en apparence, une longueur bc de ce crayon avec la plus petite BC des deux lignes à comparer. On reporte ensuite, toujours en apparence, le segment bc du crayon autant de fois que possible sur la plus grande des deux lignes; on apprécie ce qui reste cf, et on en déduit facilement le rapport exact ou approché.

Fig. 223.



Dans le cas de la figure 223, le segment bc porté de c en c' a laissé un reste c'f qui paraît être le quart de cc', ou de son égal bc on en conclut que le segment bc contient 4 fois le reste c'f tandis que cf le contient 5 fois. Le rapport apparent des lignes BC et CA est donc le rapport de 4 à 5.

On doit aussi savoir apprécier les pentes apparentes des lignes droites.

A cet effet (fig. 222) si l'on veut apprécier la pente de la ligne CD, on la considère comme l'hypothénuse d'un triangle rectangle fictif DmC, dont un côté Dm serait vertical, et l'autre mC horizontal. On cherche, soit au coup d'œil, soit en se servant du crayon,

tenu à bout de bras, le rapport $\frac{Dm}{mC}$ de la hauteur à la base. Ici le rapport est de $\frac{5}{11}$. On dit alors que la ligne CD est, ou paraît, inclinée à 5 de hauteur pour 11 de base.[1]

On pourrait aussi pour apprécier l'inclinaison apparente d'une ligne EF chercher dans quel rapport elle divise un angle droit x E y dont un côté serait vertical.

Sur la figure 222 la ligne EF fait avec la verticale un angle qui est les $\frac{2}{3}$ d'un angle droit. Ces deux moyens d'appréciation des pentes doivent se vérifier l'un par l'autre. Le premier est cependant le plus usité.

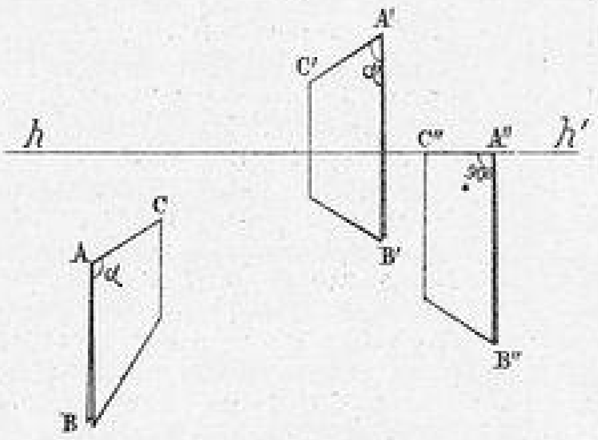
§ 168. – Appréciation de la hauteur d'horizon.

La position de l'horizon est toujours assez difficile à fixer : Un premier moyen consiste lorsque l'on a deux horizontales parallèles (fig. 225, A'B' et AB) à les prolonger, au coup d'œil, jusqu'à leur rencontre f, (voir plus haut, restitutions perspectives) et à mener par ce point f, mais toujours au coup d'œil, une horizontale.

Un autre procédé est le suivant :

On prend une feuille de papier que l'on plie en deux, puis en quatre, en ajustant très bien les plis de manière à former exactement un angle droit. On tient ce carré de papier à bout de bras dans une position fuyante, mais en ayant soin (fig. 224) que l'une de ses arêtes AB, soit bien verticale.

Fig. 224.



Alors si, (position ABC) la ligne AC est au-dessous de l'horizon, l'angle ACB paraîtra obtus ; si la ligne A'C' (2e position) est au-dessus de l'horizon il paraîtra aigu, et les angles en C'' et A'' ne paraîtront droits que lorsque la ligne A''C'' sera bien exactement à la hauteur de l'horizon. – Dès que cette position est reconnue on cherche, sur les objets qui environnent, les points qui sont à la hauteur de l'horizon et on a soin de garder la mémoire de ces points.

§ 169. – Dessin d'un cube (à vue).

Les principes pour copier exactement, d'après nature, un cube, sont les mêmes que pour un objet plus compliqué, pour un édifice et pour un paysage.

Deux cas peuvent se présenter suivant que la ligne d'horizon est ou n'est pas contenue dans la feuille de papier.

1er Cas. – La ligne d'horizon est contenue dans la feuille, et elle coupe les arêtes verticales du cube.

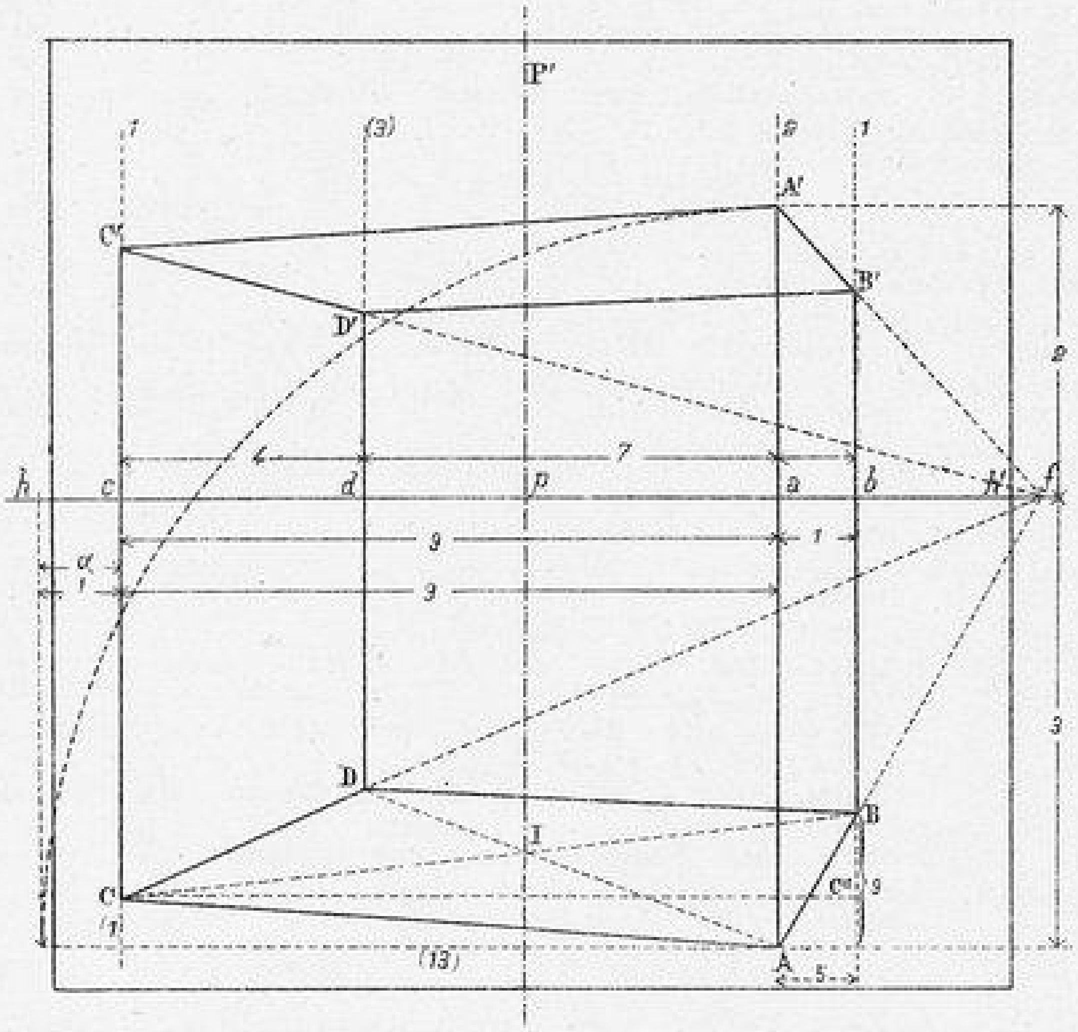
On fera les observations dans l'ordre suivant (fig. 225).

---

(1) En général quand on dessine d'après nature on ne cherche pas une approximation aussi grande. Dans le cas de la ligne CD, on reconnaîtrait à priori qu'elle est inclinée <u>à peu près</u>, à $\frac{1}{2}$; en la dessinant on la fera s'écarter <u>un peu plus</u> de la verticale que ne l'exigerait la pente exacte $1/2$.

1° après avoir reconnu que l'ensemble du dessin doit être plus large que haut et avoir pris la feuille dans le sens voulu, on met en place les deux verticales extrêmes CC' et BB', on les trace indéfinies sans les limiter encore à leurs extrémités. La distance de ces verticales est arbitraire et dépend uniquement de la place que le dessinateur veut faire occuper au dessin sur la feuille.

Fig. 225.



Mais une fois ces deux verticales extrêmes mises en position il n'y a plus rien d'arbitraire comme on va le voir.

2° Entre les verticales extrêmes on place, mais toujours sans les limiter, les verticales intermédiaires; On commencera par celle qui est la plus rapprochée AA', ce sera la plus grande en apparence. Nous savons d'ailleurs qu'une fois celle-ci mise en place, la quatrième DD' pourrait se déduire théoriquement des trois autres sans avoir recours à l'observation directe et par la simple considération des points de fuite; néanmoins en dessin à vue il sera bon de la placer par observation directe, quitte à la vérifier théoriquement plus tard.

Sur le croquis (fig. 225) AA' partage la distance entre BB' et CC' dans le rapport de 1 à 9, et DD' partage l'intervalle entre CC' et AA' dans le rapport de 4 à 7.

Les quatre arêtes sont donc mises en position, mais ne sont pas encore limitées en hauteur.

3° On limite la hauteur d'une verticale, en choisissant de préférence celle qui est la plus grande AA'. En nous servant du crayon tenu à bout de bras nous constatons que l'arête AA' est plus grande que l'intervalle horizontal ac compris entre AA' et CC'. En précisant, on reconnaît que l'excès α, de AA' sur l'intervalle ac est de $\frac{1}{9}$ environ de ac. – On augmentera donc $\overline{ac}$ de $\frac{1}{9}$ et cela donnera la hauteur de la verticale AA'. Cette première arête est donc limitée.

4° C'est à ce moment seulement que l'on peut et que l'on doit placer l'horizon. On observe, comme nous l'avons indiqué § 168, la position de l'horizon et, appréciant encore un rapport, on reconnaît que l'horizon hh' partage l'arête verticale AA' sensiblement dans le rapport de 2 à 3. – L'horizon peut donc se placer. D'ailleurs toutes les autres arêtes verticales seront partagées par la ligne d'horizon dans le même rapport $\frac{2}{3}$.

5° On observe et on place les lignes fuyantes de la base, telles que AB et AC. On a soin de commencer par celle qui fuit le plus, c'est-à-dire dont la pente apparente est la plus forte, parce que les grandes pentes sont plus faciles à apprécier que les petites. On

commencera donc par AB. La pente apparente est de 9 de hauteur pour 5 de base ($\frac{9}{5}$), et comme le point A est déterminé, la ligne AB peut se tracer, ce qui détermine le pied B de l'arête BB'.

On apprécie ensuite la pente de AC (ici de $\frac{1}{13}$ environ). On peut donc tracer AC, et le pied C de l'arête CC' est déterminé.

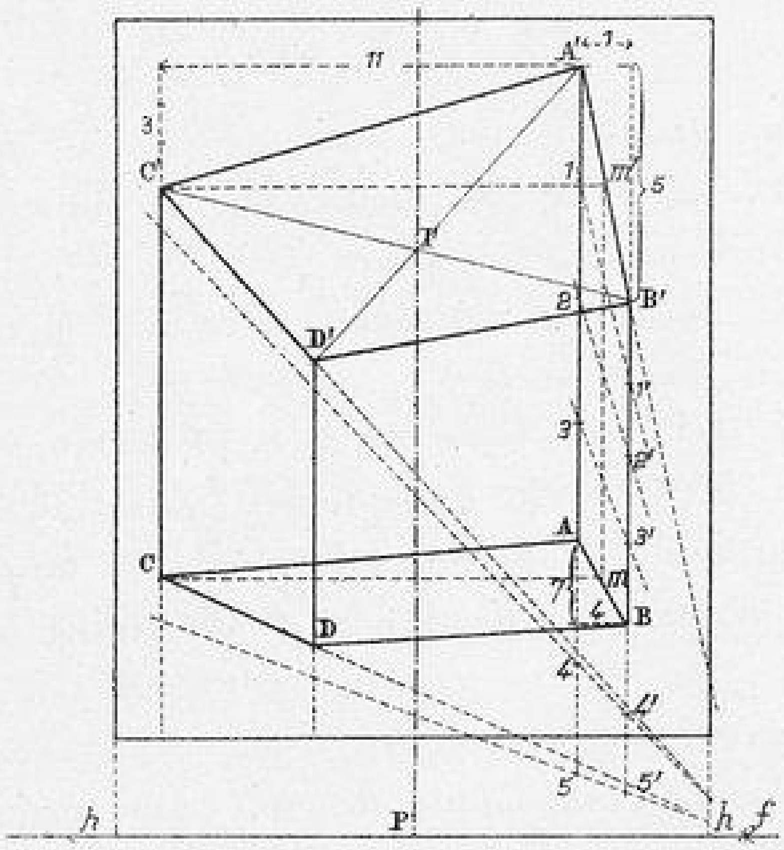
6°. A partir de ce moment l'observation directe devient inutile.

En effet, le côté de base CD étant parallèle à AB, doit fuir au même point de fuite f (accessible ou non); par suite la ligne CD est déterminée et avec elle le point D, entraînant la connaissance de la ligne BD. Les quatre côtés A'B' – B'D' etc..... de la base supérieure sont parallèles perspectivement à ceux de la base inférieure, et ont les mêmes points de fuite, accessibles ou non. La méthode du réseau auxiliaire, indiquée plus haut, permettra donc de les tracer avec une approximation suffisante. On peut encore s'appuyer pour déterminer A' B' C' et D' sur ce que la ligne d'horizon partage toutes les arêtes verticales dans le rapport constant $\frac{2}{3}$.

§ 170. – 2° Cas. – La ligne d'horizon est en dehors de la feuille. (fig. 226).

1°. On met en place les arêtes verticales mais sans les limiter tout d'abord, en se donnant arbitrairement la place des deux extrêmes et plaçant les intermédiaires par des appréciations de rapports; (on opère comme ci-dessus).

Fig. 226.



2°. On limite la plus grande arête en A et A' en comparant sa hauteur AA' à l'écartement en largeur des lignes verticales déjà placées.

L'horizon étant en dehors de la feuille ne peut pas être indiqué comme dans le cas précédent.

3°. On évalue la pente de deux arêtes fuyantes (celles qui ont le plus de pente A'B' (pente $\frac{5}{1}$) et AB (pente $\frac{1}{4}$).

A ce moment l'arête BB' est limitée,

4°. On évalue enfin la pente de l'arête supérieure A'C' ($\frac{3}{11}$), et le point C' se trouve ainsi mis en place.

5°. A partir de cet instant l'observation directe est inutile et on peut achever théoriquement la perspective,

D'abord la hauteur de l'arête C'C peut se déduire de celles des arêtes A'A et B'B de la manière suivante: On déplacera de front l'arête C'C jusqu'à amener son extrémité supérieure C' en m' sur l'arête fuyante A'B' ce qui donnera en m'n' la hauteur à donner à l'arête C'C. Ensuite on remarquera que les lignes C'D' et CD doivent fuir au point de rencontre des fuyantes A'B' et AB.

On mènera donc ces fuyantes et les sommets D' et D seront déterminés.

Remarque: Le point de fuite de ces fuyantes est inaccessible mais on peut employer

un réseau auxiliaire. Pour tracer ce réseau quoique l'horizon soit en dehors du cadre, on divisera comme cela est indiqué (fig. 226) AA' et BB' en parties égales, en 4 par exemple, et on prolongera les divisions au-delà des lignes en 4, 4', 5, 5', etc..., en joignant les points correspondants 11'-22'-33'-44'-55' on aura les réseau auxiliaire entre les mailles duquel on interposera les fuyantes utiles.

§ 171. – Application au dessin d'un paysage avec monument

Nous donnons (fig. 226 bis) un croquis exécuté d'après nature dans le port de St Valéry en Caux:

(a) Choix du paysage et champ du tableau.

La première opération à faire consiste d'abord à bien choisir et à encadrer le paysage que l'on veut représenter. Les artistes se servent à cet effet de ce que l'on nomme le miroir noir. Il consiste en une glace noire rectangulaire, légèrement convexe, dans laquelle le paysage se réfléchit en plus petit: on présente le miroir devant le paysage et on l'oriente jusqu'à ce que l'effet produit par l'image soit satisfaisant.

Il est plus simple de découper, dans une feuille de papier, un rectangle ayant les proportions que l'on veut donner au tableau et de regarder au travers de cette espèce de fenêtre, le motif que l'on veut dessiner. En reculant ou en avançant ce cadre, on diminue ou on augmente le champ du tableau et l'on arrive rapidement à être fixé sur les limites du paysage à dessiner.

(b). Limites du dessin.

Trois limites sont surtout importantes, ce sont: 1° La ligne de terre XY qui limite l'étendue de terrain à figurer; 2° le côté gauche XX' et 3° le côté droit YY'. La ligne de ciel X'Y' ne se détermine, en général, qu'une fois le tableau mis en place.

Une fois ces limites arrêtées dans l'esprit du dessinateur, ce dernier ne doit plus les perdre de vue, tant que son esquisse n'est pas achevée.

C'est ainsi que sur le croquis (fig. 226 bis) la ligne de terre XY passe un peu en avant du crochet d d'une échelle de descente à la mer. Le côté gauche XX' est à gauche de l'arête A d'une maison et à une distance de cette arête à peu près égale à la largeur apparente de cette maison. Le côté droit YY' touche presque le chambranle d'une fenêtre de la maison de droite B.

(c) Mise en place des principales verticales.

Les verticales les plus caractéristiques sont évidemment celles qui sont désignées par les lettres A, C et B. – On s'est servi du crayon tenu à bout de bras et l'on a reconnu que la verticale C, tombe à peu près au milieu de la largeur que l'on s'est imposée pour le tableau (un peu plus à droite qu'à gauche). La verticale B partage à peu près au tiers, l'intervalle de C et de Y' (le rapport exact a été trouvé) et l'intervalle AC est les $7/5$ de l'intervalle CB.

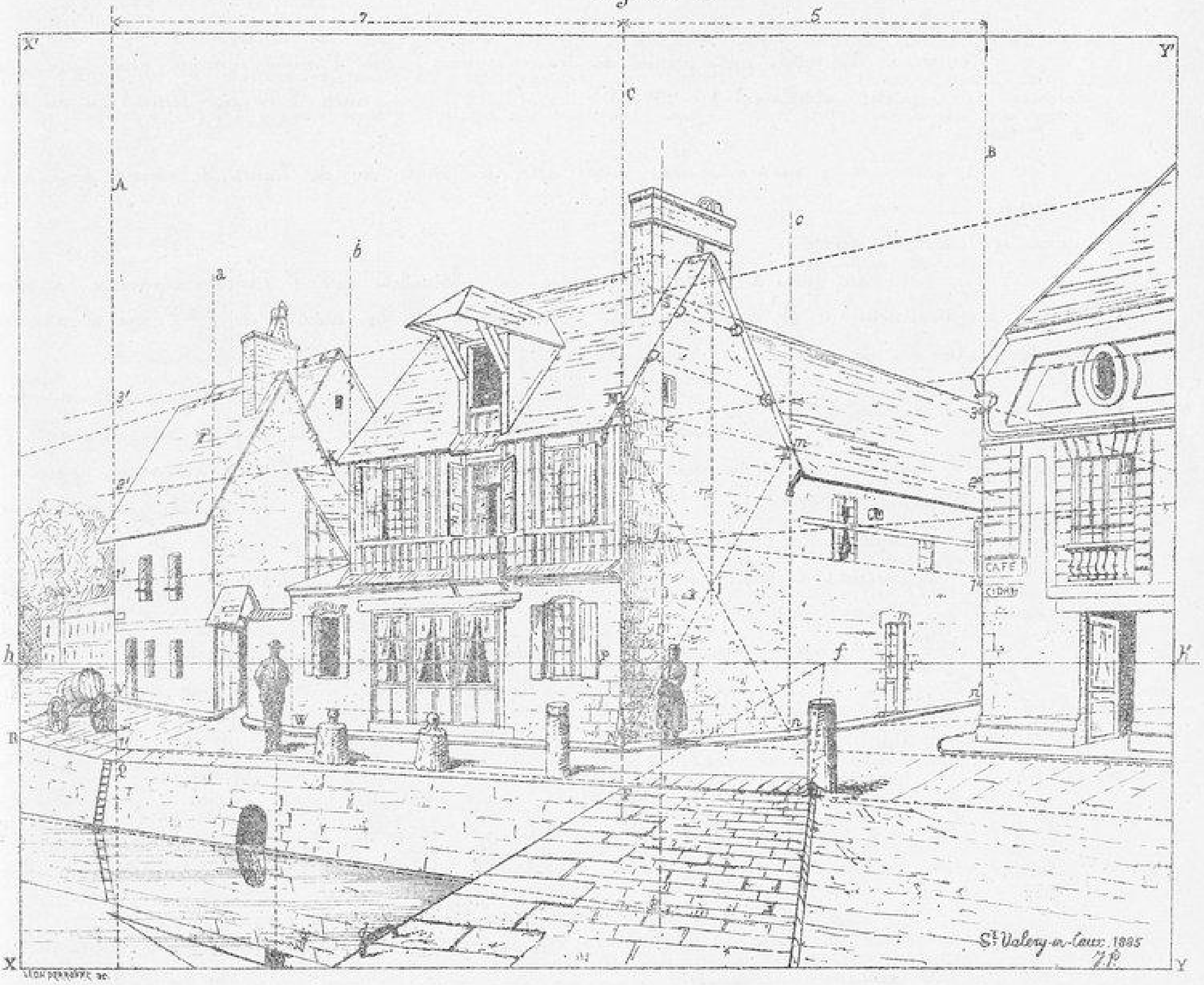
Les verticales intermédiaires a, b, c, etc.... n'ont été déterminées que plus tard, au fur et à mesure de l'avancement du dessin, mais toujours en évaluant des rapports de largeurs.

(d) Mise en place de l'horizon.

C'est alors seulement que l'on a cherché l'horizon (§ 168) et l'on a reconnu que la

ligne d'horizon passe par le point supérieur de la cinquième pierre de l'arête C. Pour placer l'horizon sur le dessin on s'est souvenu de la place assignée à la ligne de terre XX' et, prenant, au

Fig. 226 bis.



crayon, la hauteur Xh, on l'a portée sur la largeur CB et on a reconnu qu'elle était un peu moindre que les 5/6 de cette largeur. La ligne d'horizon a donc pu être placée en hh'.

(e) Limitation en hauteur, des verticales.

Par exemple l'arête C, a été limitée en M à sa partie supérieure après avoir reconnu que la hauteur MP au-dessus de l'horizon [1] est à peu près égale à la largeur Cb, et le pied N a été placé en remarquant que PN est le tiers de PM qui vient d'être déterminé. — Les autres hauteurs principales ont été obtenues d'une manière analogue.

(f) Détermination des fuyantes.

---

[1] L'horizon une fois déterminé doit toujours être pris, comme ligne de repère, soit pour les hauteurs situées au-dessus, soit pour celles situées au-dessous.

On a commencé par l'arête inférieure gK, du toit de la maison placée au centre. On a reconnu qu'elle fuyait à gauche, avec une pente de 1/9 environ, ce qui a déterminé une fuyante de gauche. Comme fuyante de droite on a observé la ligne Mm, qui a été reconnue inclinée à la pente de 1/6 environ.

(g) *Réseaux auxiliaires.*

Ces deux fuyantes ont permis de tracer, comme nous l'avons indiqué plus haut, deux réseaux de fuyantes auxiliaires 11'-22'-33'........ 11''-22''......... aussi bien au-dessus qu'au-dessous de l'horizon.

A partir de ce moment nous avons assez de points ou de lignes de repère pour achever le dessin.

(h) *Détails divers.*

La ligne du quai dF a été déterminée en observant que F est, en apparence, à plomb de MN et au-dessous de N à une distance qui paraît être la moitié de NP. - On a apprécié ensuite facilement la position du point de fuite f.

La ligne de quai FQ n'est pas horizontale; on la fait plonger légèrement au-dessous de la ligne 11' du réseau. De même la ligne nn' dans la rue du milieu est montante, c'est pourquoi on la fait passer au-dessus de la ligne Nn prolongée. Même remarque pour la ligne WV de gauche. Cette dernière s'écarte de la ligne du réseau de gauche pour deux raisons; la première parce qu'elle monte, la seconde parce que à partir de l'arête W, le quai dévie légèrement à droite ce qui rapproche du centre du tableau le point de fuite des horizontales qui y sont contenues.

(k) *Réflexion dans l'eau.* (Voir le chapitre spécial aux images réfléchies).

En Résumé. - La marche à suivre est toujours à peu près la même et peut se décrire comme il suit:

1° Choix du tableau, délimitation de son champ, c'est-à-dire de la ligne de terre et des côtés.

2° Mise en place des verticales caractéristiques, mais sans les limiter encore ni en haut ni en bas.

3° Mise en place de l'horizon en le repérant par rapport à la ligne de terre.

4° Limitation en hauteur des verticales importantes en en repérant les extrémités par rapport à l'horizon.

5° Mise en place des principales fuyantes et construction, s'il y a des points inaccessibles, d'un ou de plusieurs réseaux auxiliaires.

6° Mise en place des détails en se rapportant sur ce qui est déjà fait.

§172. - Remarque relative aux lignes fuyantes dans le dessin d'un objet isolé.

Lorsque l'on copie un cube, un parallélépipède rectangle, un vase, une maison, et plus généralement un objet <u>isolé</u> l'œil se porte instinctivement dans la direction de l'axe réel ou fictif de l'objet à copier. On a toujours une tendance à équilibrer les masses de part et d'autre de l'axe de la feuille de dessin. - Cela veut dire, perspectivement parlant, que la verticale principale [1], coïncide avec l'axe de la feuille et aussi, autant que cela peut se

---

[1] On nomme <u>verticale principale</u> d'un tableau, la verticale qui passe par le point principal de fuite.

faire avec l'axe de l'objet. Ainsi dans le dessin à vue des cubes des figures 225 et 226 la verticale principale PP' coïncidait avec l'axe de la feuille de papier et passait aussi par le point de croisement I des diagonales du cube.

Par conséquent si, dans le dessin à vue d'un cube isolé, une des faces AA'BB' paraît fuir à droite de la verticale principale PP', ne serait-ce que très peu, il faut que l'autre face AA'CC' fuie à gauche (fig. 227). La première fuit d'autant plus que l'autre fuit moins et vice-versa.

Fig. 227

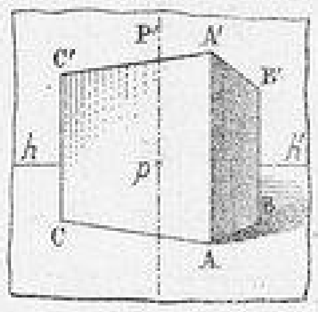


Fig. 228.

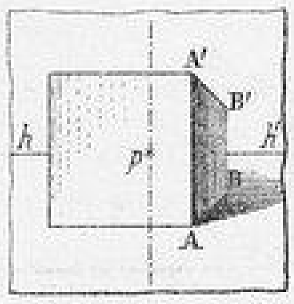


Fig. 229.

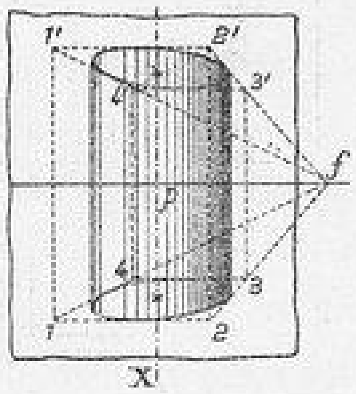
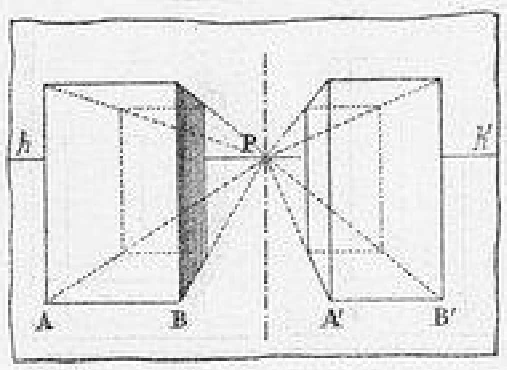


Fig. 230.



Un cube isolé ne devra jamais être représenté comme l'indique la figure 228, pas plus qu'un cylindre isolé ne serait figuré comme l'indique la figure 229. Les ellipses de base de ce cylindre ne doivent pas présenter de dissymétrie par rapport à la verticale principale, ce qui devrait avoir lieu cependant si le prisme à base carrée circonscrit au cylindre était dessiné comme l'indique 1234 - 1'2'3'4' de la figure 229.

Mais si l'on avait à représenter dans un même tableau plusieurs prismes à faces de front, alors on les figurerait comme l'indique la figure 230. Dans ce cas c'est l'ensemble des deux prismes qui constitue le tableau et non plus un seul des deux.

Cependant nous avons vu, au chapitre des dérogations aux lois de la perspective, que presque toujours, si l'on avait à inscrire des colonnes dans ces prismes, on les tracerait symétriques et comme on le ferait si leur axe coïncidait avec la verticale principale.

§ 173. – Dessin à vue de cercles horizontaux superposés.

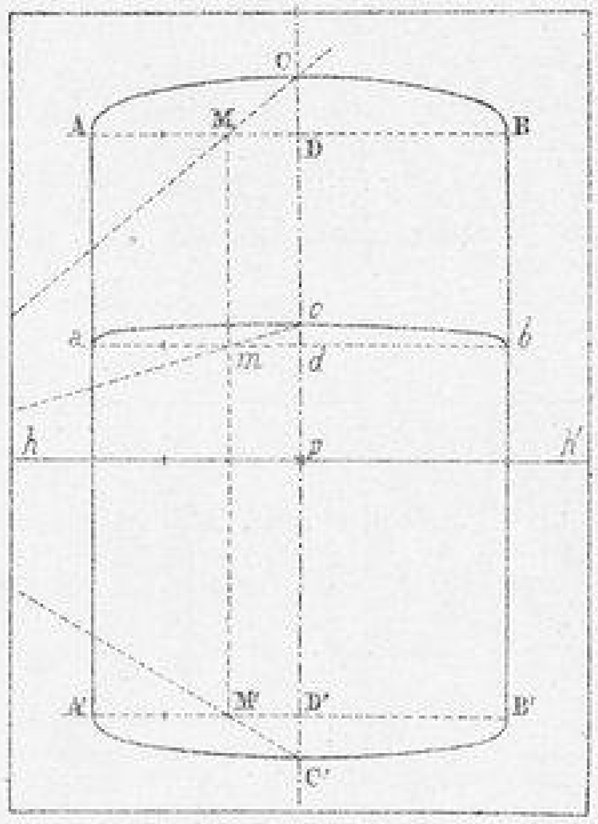
Lorsque l'on dessine soit une colonne avec les joints des pierres indiqués, soit un vase, soit un balustre, etc.... il peut être commode, sans avoir recours à l'observation directe, de déduire les courbures des cercles intermédiaires de celle de la base supérieure et de la base inférieure.

Prenons un cylindre (fig. 231). On a dessiné à vue les contours apparents AA' et BB' et l'on a observé, toujours à vue, pour l'ellipse supérieure le rapport $\frac{CD}{AB}$ du petit axe au grand axe, ce qui a permis de la dessiner exactement. De plus, la ligne d'horizon a été observée et placée comme nous l'avons indiqué plus haut (§ 168). Cela fait il est possible de dessiner théoriquement, dans ses proportions, une ellipse quelconque ab, ou A'B' autre que la base observée.

A cet effet on prend, en M, un point qui partage le demi-grand axe AD dans un rapport simple, au tiers par exemple, et l'on joint CM. C'est une ligne qui fuit au point-tiers de distance. Il est évident que si l'on prend en m, et M' le tiers des autres axes ad et

A'D' et si l'on mène par ces points des parallèles perspectives à la ligne MC, on obtiendra par recoupements en C et C' les extrémités des petits axes des autres ellipses.

Fig. 231.



On peut (fig. 232) appliquer ce même tracé à toute surface de révolution.

En général, lorsque l'on copie un vase ou toute autre surface de révolution d'après nature, l'observation directe donne :

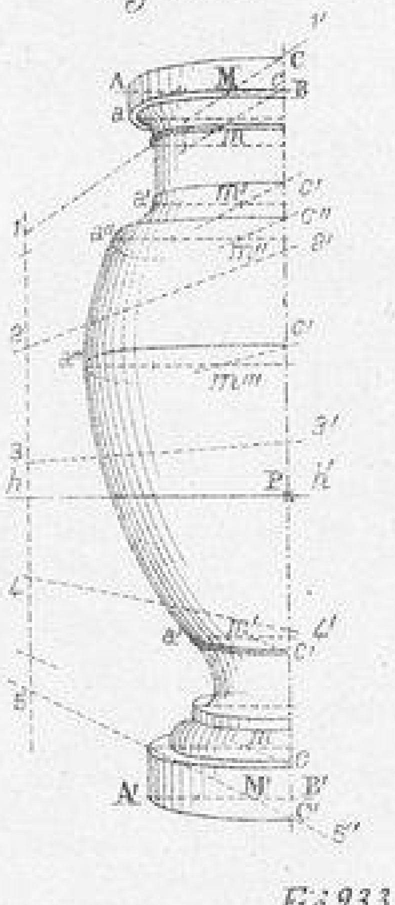
1° Le contour apparent perspectif A a a' a'' ...... a A' du vase ; (ce que l'on nomme quelquefois le galbe.)

2° L'ellipse supérieure AC et l'ellipse inférieure A'C'. Si l'on a l'horizon hh' dans la feuille, une de ces deux ellipses devient inutile.

Une fois ces données acquises on peut, en employant la même méthode que pour le cylindre tracer un parallèle quelconque sans avoir à l'observer.

Il est inutile d'expliquer le tracé ; la figure 232 l'indique suffisamment.

Fig. 232.

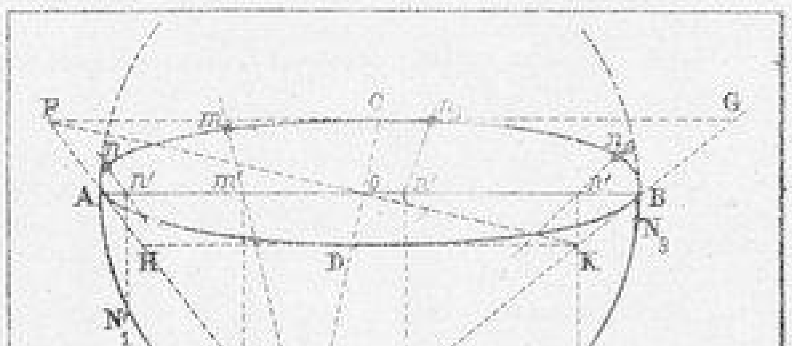


Nota. – Dans le cas d'un cylindre vertical le tracé est rigoureux ; dans le cas d'une surface de révolution il est rigoureux pour tous les points tels que a, a' et a''' où les tangentes au contour apparent sont verticales et il n'est qu'approximatif pour les autres ; mais l'approximation qu'il fournit est très suffisante dans le dessin d'après nature.

§ 174. – Diviser en parties égales un cercle perspectif. (fig. 233).

Nous supposons que l'observation directe du modèle a fourni l'ellipse ACBD, perspective d'un cercle horizontal. – On veut diviser ce cercle en parties égales (en 10 par exemple), à partir d'un point m mis en place, lui aussi, par l'observation. Ce problème se présentera lorsque l'on dessinera une colonne cannelée ou un vase sur lequel des ornements seraient répartis à des distances égales entre elles.

Fig. 233.



Nous supposons, comme toujours, que l'horizon hh' a été observé et indiqué sur le dessin. En réalité c'est un relèvement du géométral, que l'on opérera de la manière suivante :

1° On circonscrit le carré perspectif FGHK

et l'on en déduit le diamètre de front AB ;

2° Sur AB comme diamètre on décrit une circonférence que l'on considère comme le relèvement du cercle perspectif déjà dessiné, et l'on relève en M_1 le point de départ m.

3° Sur le cercle relevé, à partir de M_1 on fait la subdivision demandée en N_1 - N_2 - N_3.... etc.

4° On fait l'opération inverse du relèvement, on fait donc un rabattement et l'on obtient en n_1 - n_2 - etc ...... les rabattements des points demandés.

Remarque. - Avec un peu d'habitude ces tracés peuvent se faire à main levée.

§ 175. - Dans un dessin exécuté d'après nature retrouver, expérimentalement la distance (entière ou réduite).

La recherche du point de distance peut être utile soit pour des restitutions perspectives, soit pour achever théoriquement des détails sur un dessin commencé par l'observation.

Il serait presque absurde, étant placé en face d'un objet que l'on veut copier sur une feuille de papier de grandeur déterminée, de se donner à priori, la distance principale. Ce serait du même coup s'imposer les dimensions principales du dessin et cela entraînerait le plus souvent, une mauvaise mise en feuille.

On procède autrement, et ce que l'on s'impose généralement à priori c'est la plus grande dimension du dessin.

Par exemple, lorsque l'on copie le cube représenté fig. 225, il y a un instant où les largeurs cb, ou cd, ou ab, sont déterminées. - A ce moment, seulement, nous pouvons dire qu'elle est la distance qui répond au tableau que nous exécutons.

Pour la trouver expérimentalement, on prendra très exactement avec son crayon la largeur cd, ou da, où ab, peu importe ; portant ensuite le crayon à bout de bras et le tenant de front on le superposera, en apparence, avec la longueur correspondante de l'espace. Pour y arriver il faudra reculer ou avancer la main ; mais lorsque la superposition sera obtenue, la distance de l'œil au crayon, longueur que l'on pourra mesurer avec un mètre, donnera la distance principale. On en déduira une distance réduite quelconque.

Sur le croquis du port de St Valéry (fig. 226bis) l'expérience faite a donné une distance égale à 32 centimètres. Le tableau a une largeur de 19 centimètres ; il est donc un peu trop large pour la distance.

Perspectives de convention.

Perspective cavalière ou projections obliques.

18e Leçon.

§ 176. – Généralités. – fuyantes, rapport de réduction.

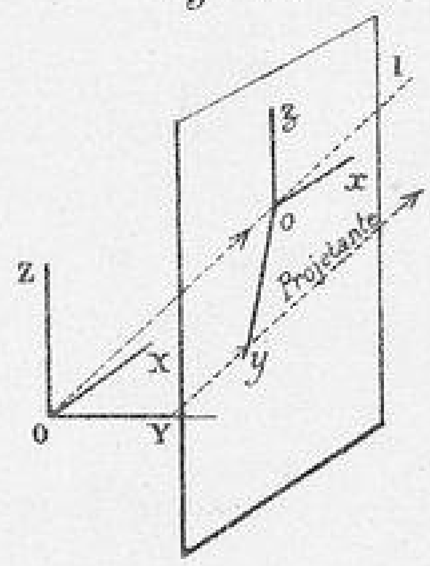
Imaginons que le spectateur placé devant un tableau perspectif ordinaire s'éloigne indéfiniment de ce tableau. A la limite, lorsqu'il sera infiniment loin, les rayons visuels qui, de son œil, aboutissaient aux différents points des objets à représenter seront devenus parallèles et la perspective se sera transformée en une projection; au lieu de rayons visuels nous aurons des projetantes.

Si ce déplacement du spectateur s'est fait suivant une trajectoire perpendiculaire au tableau nous aurons une projection droite, c'est-à-dire une projection ordinaire; s'il s'est fait suivant une direction oblique au tableau nous aurons une projection oblique ou Perspective cavalière.

On voit donc, à priori, que le problème de la perspective cavalière est le même que celui des ombres au soleil.

Soit fig. 234, 0X - 0Y - 0Z, trois axes de coordonnées, les trois arêtes d'un cube par exemple, dont la première 0X (largeurs) est horizontale et parallèle au tableau, dont la seconde 0Z (hauteurs) est verticale et de front également, tandis que la troisième 0Y (profondeurs) est perpendiculaire au tableau.

Fig. 234.



Supposons que le spectateur se soit éloigné indéfiniment du tableau en suivant la direction 0I; on aura en ox, oz et oy la perspective cavalière des trois arêtes du cube. Il est évident que les arêtes de front 0X et 0Z se perspectivent égales et parallèles à elles-mêmes, tandis que la troisième, 0Y, donnera pour perspective une droite quelconque oy.

Nous nommerons fuyantes, une ligne telle que oy qui sera la perspective d'une droite de l'espace telle que 0Y, perpendiculaire au tableau.

Il est facile de voir que oy sera dans un rapport constant avec 0Y. Ce rapport constant que nous désignerons par la lettre K se nommera le rapport de réduction.

Ainsi donc une perspective cavalière sera déterminée quand on se donnera la direction des fuyantes et le rapport de réduction K.

La manière la plus simple de préciser les conditions d'une perspective cavalière consiste (fig. 235) à se donner en 0X, 0Y, 0Z, la perspective cavalière des trois axes de coordonnées, c'est-à-dire des trois échelles, 0X échelle des largeurs, 0Z échelle des hauteurs, 0Y échelle des profondeurs, et de graduer ces échelles (fig. 235).

L'échelle des profondeurs 0Y donne la direction des fuyantes et le rapport $\frac{0B}{0A}$ d'une division de l'échelle 0Y, à une division de l'échelle 0X ou 0Z, donne le rapport de réduction K. Sur la figure 235, on a $K = 2/3$.

De même que pour les projections droites et pour les ombres au soleil, on voit que dans toute perspective cavalière :

1° Toute figure de front se perspective égale et parallèle à elle-même ; son éloignement ne modifie pas la grandeur de sa projection oblique.

En perspective conique une figure de front se perspectivait semblable mais non pas égale à elle-même. - Elle paraissait d'autant plus petite qu'elle était plus éloignée.

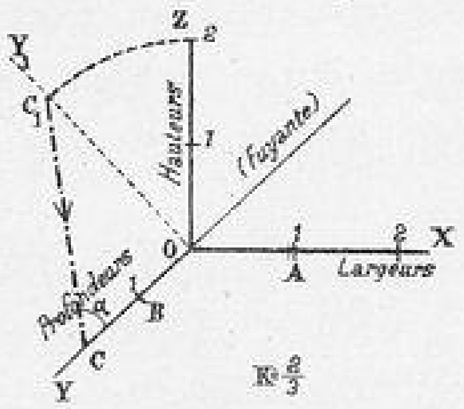
2° Deux droites parallèles, ont leurs perspectives cavalières parallèles. En perspective conique, deux droites parallèles convergent à un même point de fuite.

3° Le rapport de deux segments pris sur deux droites parallèles, se conserve en perspective cavalière. Il n'en est pas de même en perspective conique.

§177. - Rabattement d'une projetante sur un plan de front.

Rabattons sur le plan de front XOZ, le plan qui contient la droite OY' de l'espace et sa perspective cavalière OY (fig. 235).

Fig. 235.



La charnière du rabattement est la perspective OY. Le point O ne bouge pas. La ligne OY' qui dans l'espace est perpendiculaire au tableau et par suite aussi perpendiculaire au plan de front XOZ, se rabat suivant OY_1 perpendiculaire sur la charnière OY. Le point C' situé dans l'espace à 2 mètres en avant du plan XOZ se rabat en C_1 à une distance de 2 mètres mesurés non plus sur OY qui donne les profondeurs réduites, mais sur OX ou sur OZ, qui les donne non réduites. Par conséquent, si le rapport de réduction $K = 2/3$ on aura $OC = \frac{2}{3} OC_1$ ou inversement $OC_1 = \frac{3}{2}$ de OC. Autrement dit, pour avoir OC_1 on multipliera OC par le rapport inverse du rapport de réduction.

La projetante qui dans l'espace allait du point C' de l'espace à sa perspective C, va maintenant du point rabattu C_1 au même point perspectif C ; donc C_1C est le rabattement de la projetante et l'angle $C_1CO = \alpha$ est l'angle que font les projetantes obliques soit avec le plan du tableau, soit avec tout autre plan de front quelconque XOZ.

§178. - Perspective cavalière d'une circonférence horizontale.

Soient OX, OY, OZ, les trois échelles graduées. Le rapport de réduction des fuyantes parallèles à OY est $K = \frac{1}{2}$.

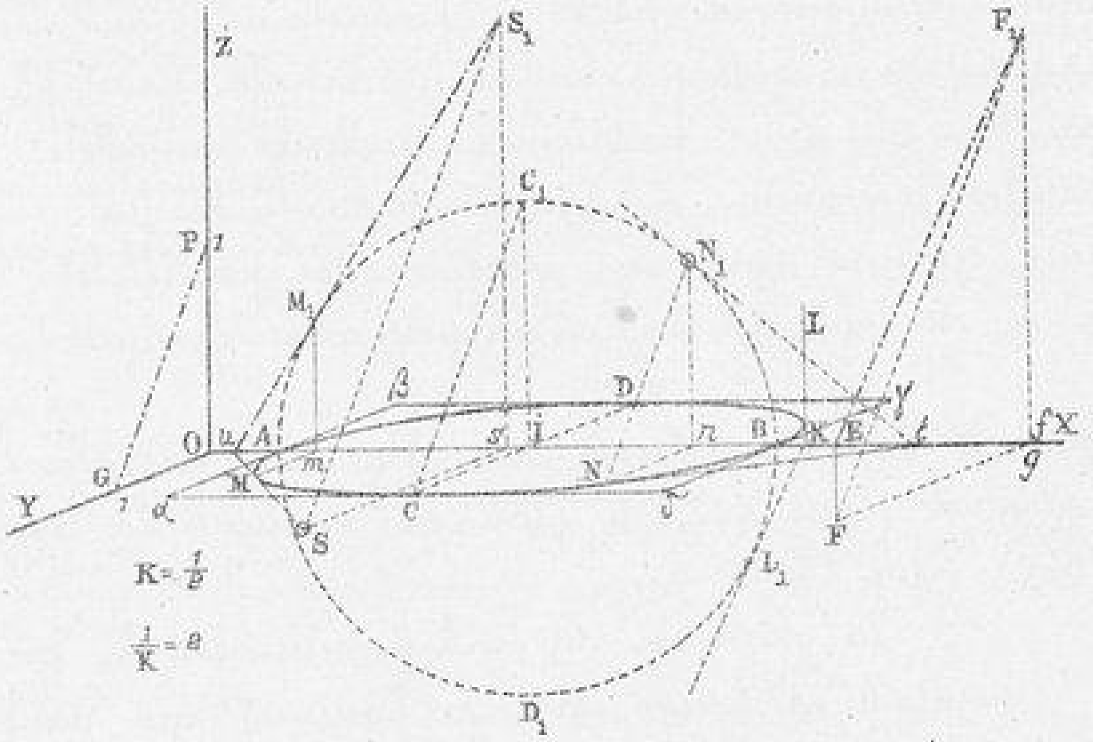
Soit AB le diamètre horizontal d'un cercle à mettre en perspective cavalière dans le plan XY.

Nous opérons comme dans la perspective conique et nous faisons un relèvement du géométral autour de AB comme charnière. Ici le géométral est remplacé par le plan XOY. Le cercle se relève en AC_1BD_1 et apparaît en vraie forme. Pour avoir la perspective cavalière demandée il ne reste plus qu'à faire l'opération inverse du relèvement c'est-à-dire un rabattement.

(a) Rabattement d'un point et tangente.

Soit N_1 un point quelconque du cercle relevé et N_1t sa tangente. – Abaissons N_1n perpendiculaire sur la charnière. – Après le rabattement cette droite prend la position fuyante nN et le rapport de réduction étant égal à $\frac{1}{2}$ on prend $nN = \frac{1}{2}\, nN_1$.

Fig. 236.



Pour rabattre la tangente N_1t on observera que le point t situé sur la charnière ne bouge pas dans le mouvement; la tangente rabattue est donc tN.

Remarque. – Les points tels que N_1, M_1, C_1 .... décrivent dans l'espace en se rabattant, des arcs de cercle dont les cordes N_1N – M_1M etc..... sont toutes parallèles entre elles. Or on connaît facilement une d'entre elles, par exemple la corde PG, qui joint le point P situé à 1 mètre sur l'axe OZ, au point G situé à 1 mètre sur l'axe fuyant OY. – On mènera donc les autres cordes parallèles à PG, ce qui dispensera de faire usage du rapport de réduction.

(b) *Parallélogramme circonscrit à l'ellipse.*

On rabat en IC le rayon IC_1 perpendiculaire à AB; on prend le point symétrique D et l'on obtient en $\alpha\beta\gamma\delta$ un parallélogramme circonscrit. En A et B les tangentes sont parallèles aux fuyantes.

(c) *Point pour lequel la tangente à l'ellipse passe par un point donné S.*

On relève le point S en S_1 comme à l'ordinaire; on mène la tangente S_1M_1 au cercle en vraie forme et l'on rabat M_1 en M.

Nota. – Ce problème serait à résoudre dans le cas où S serait la perspective cavalière du sommet d'un cône dont l'ellipse serait la base. Dans ce cas la tangente serait le contour apparent du cône.

(d) *Point pour lequel la tangente à l'ellipse est parallèle à une direction donnée EF.*

On relève EF en EF_1 – On mène au cercle, en vraie forme, une tangente L_1K parallèle à EF_1 et l'on rabat L_1K en LK.

§ 180. – *Perspective cavalière d'un assemblage de charpente.*

La figure 237 représente en plan et élévation un assemblage dit à tenon sur l'arête. Deux pièces de bois à sections droites carrées sont l'une M verticale, l'autre N horizontale. Elles ont le même équarrissage, et leurs carrés de section droite se présentent en diagonale.

Cet assemblage est surtout usité pour réunir ensemble les poteaux et les traverses d'une forte barrière. Les pièces de bois placées ainsi sur l'arête se présentent

sur leur plus grande largeur et ont, par suite plus de resistance aux efforts qui tendraient à les briser.

Pour donner la perspective cavalière nous prendrons (fig. 238) en OX - OZ et OY les directions des trois échelles.

Fig. 237.

Epure

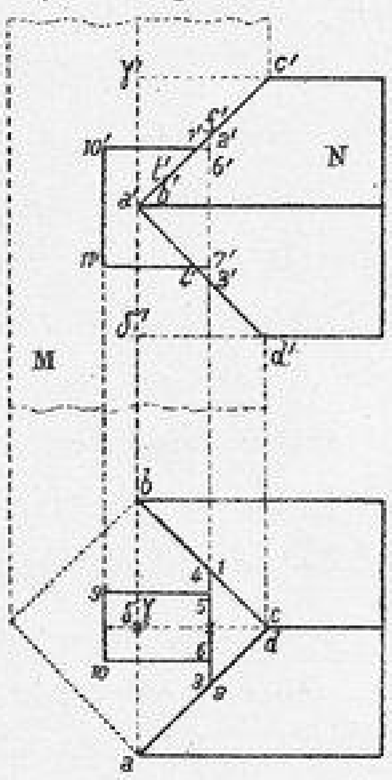
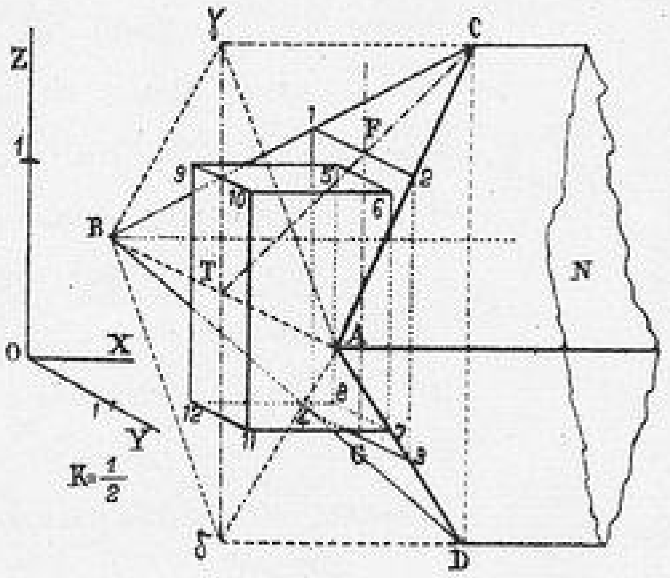


Fig. 238.

Tableau



Nous conviendrons de doubler par rapport à l'épure les largeurs et les hauteurs comptées parallèlement à OX et OZ et de ne pas doubler les profondeurs ; autrement dit, les fuyantes parallèles à OY seront réduites dans le rapport $K = \frac{1}{2}$.

(a) Nous construisons d'abord la perspective d'une section droite AB$\gamma\delta$. On a pris pour cela $\gamma\delta$ (tableau) = 2 fois $\gamma'\delta'$ (épure) et la fuyante BA (tableau) = b'a (épure). Par A B γ et δ nous menons parallèlement à OX les arêtes indéfinies de la pièce.

(b) Nous plaçons ensuite les points rentrants C et D. A cet effet nous portons γC (tableau) = 2 fois $\gamma'c'$ (épure) et δD = 2 fois $\delta'd'$.

Nous avons ainsi en ACBD ce que l'on nomme le quadrilatère (gauche) d'occupation, parce que si l'on entaillait la pièce N suivant deux plans ACD et BCD formant un dièdre rentrant, la pièce N pourrait s'appliquer sur la pièce M et y occuperait sur ses faces une place limitée par ce quadrilatère. Dans ces conditions il y aurait contact mais pas assemblage, et pour maintenir en place il faut à la pièce N une saillie, dite tenon T, qui puisse pénétrer dans une entaille correspondante, dite mortaise pratiquée dans la pièce M.

(c) Le dièdre rentrant, dont CD serait l'arête, est tronqué par un plan 1.2.3.4. qui se nomme la portée du tenon. Pour en obtenir la perspective on a pris sur la ligne CT qui est de front et par suite n'est pas réduite une longueur CF (tableau) = 2 fois c'f (épure) ce qui détermine le rectangle de portée 1.2.3.4.

On vérifiera que les fuyantes 1-2 et 3-4 du tableau sont égales aux longueurs 1-2 et 3-4 de l'épure.

(d) L'embase du tenon, 5-6-7-8 (tableau) se place en se reperant sur la ligne moyenne FG du rectangle de portée. On a: $\overline{6\text{-}7}$ (tableau) = 2 fois $\overline{6'\text{-}7'}$ (épure) et $\overline{5\text{-}6}$ (tableau) = $\overline{5\text{-}6}$ (épure).

(e) Le tenon s'achève en menant ses arêtes 5-9, 6-10 etc..... parallèles à OX et égales à deux fois les longueurs correspondantes mesurées sur l'épure.

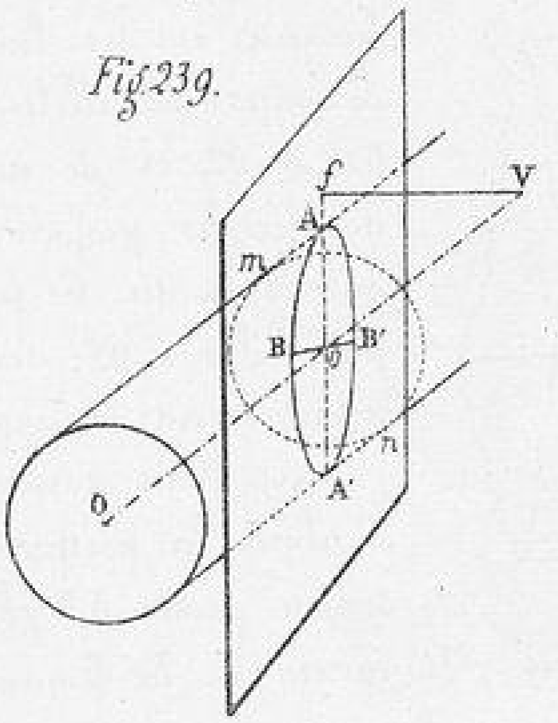
§ 181. – *Perspective cavalière d'une sphère.*

Soient OX, OY, OZ les trois échelles ou axes de coordonnées. Le rapport de réduction

K est égal à $\frac{2}{3}$. Le point C est la perspective du centre de la sphère ; c, c' et y sont les perspectives des projections de ce centre sur les trois plans de coordonnées XOY - XOZ et YOZ.

(a) *Contour apparent perspectif.* - C'est le même problème que celui de l'ombre portée par une sphère sur un plan ; seulement ici, les rayons lumineux sont remplacés par les rayons visuels. La solution consiste, en dernière analyse, à circonscrire à la sphère O (fig. 239) un cylindre qui, par conséquent, est de révolution, et à couper ce cylindre par un plan qui est le plan du tableau. Les génératrices du cylindre sont parallèles aux rayons visuels.

Fig. 239.



On sait que la section plane d'un cylindre de révolution est une ellipse dont le grand axe AA' est sur le plan méridien qui est perpendiculaire au plan sécant, c'est-à-dire qui contient à la fois l'axe OV du cylindre et une perpendiculaire Vf au plan sécant.

D'ailleurs si du point O, où l'axe perce le plan sécant, on avait comme centre, tracé une sphère inscrite dans ce cylindre et si l'on avait coupé cette sphère par le plan méridien que nous venons d'indiquer on aurait obtenu une circonférence omn et les deux génératrices du cylindre mA et nA', tangentes à cette circonférence, auraient donné les extrémités du grand axe AA'.

Le petit axe BB' est perpendiculaire au précédent et égal au diamètre de la sphère.

Revenons à la perspective cavalière. L'axe OV du cylindre donne la direction des rayons visuels, c'est-à-dire des projetantes. Le plan sécant T est maintenant le tableau. La perpendiculaire fV au tableau a pour perspective cavalière la droite A'OAf, qui est par conséquent une fuyante ; donc le grand axe de l'ellipse de contour apparent perspectif de la sphère a pour direction, AA', la fuyante qui passe par la perspective C du centre (fig. 240).

Pour en avoir les limites A et A' rabattons sur le plan de front Ccy'y du centre et autour de AA' comme charnière la section faite dans la sphère par le plan contenant à la fois les projetantes et les fuyantes. Nous obtenons en mn le grand cercle de front de la sphère ; nous lui menons les tangentes mA et nA' parallèles à la direction αα, des projetantes rabattues (voir § 177) et nous obtenons en A et A' les extrémités du grand axe.

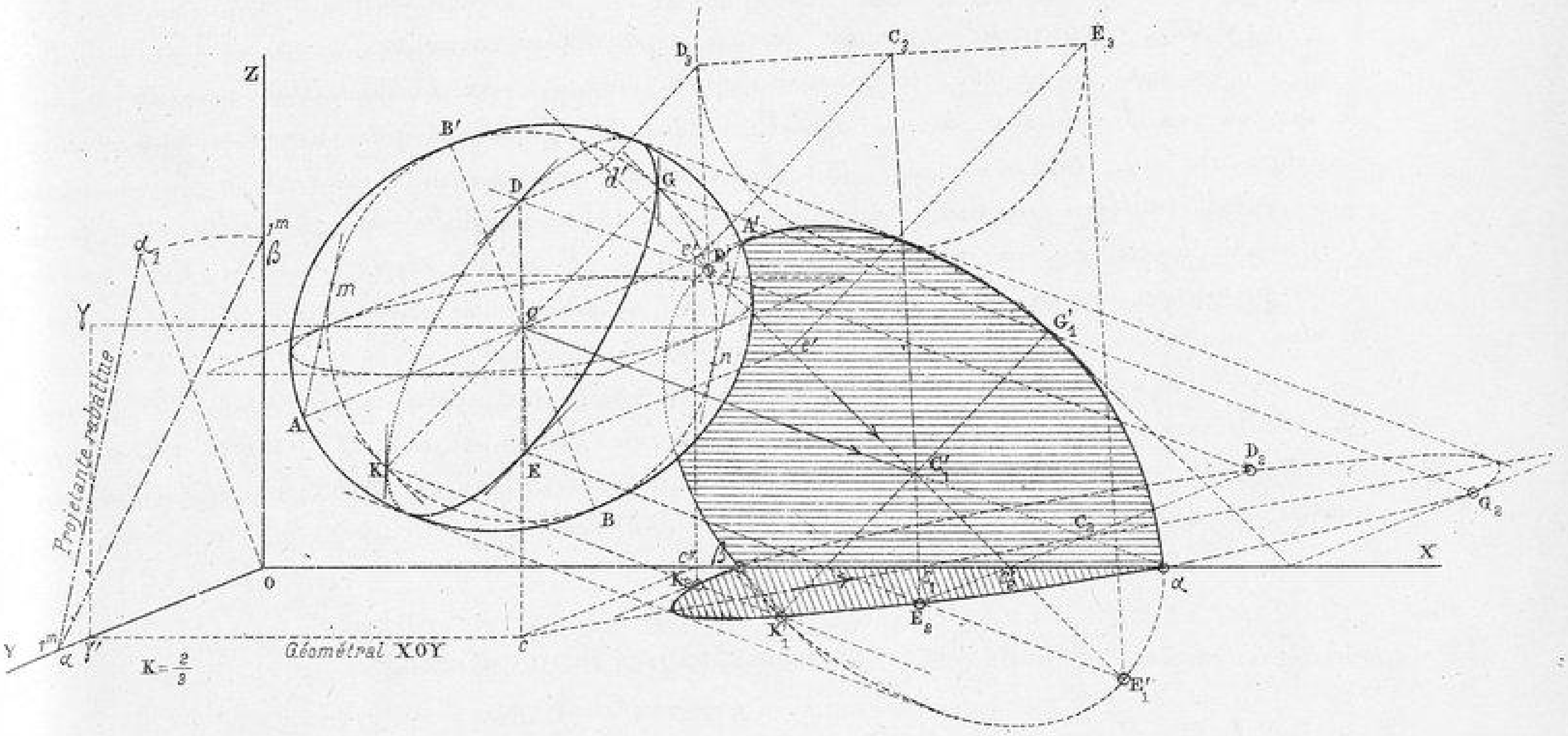
Le petit axe est BB' perpendiculaire à AA' et égal au diamètre de la sphère.

(b) *Ombres portées du centre.* - On se donne en cc_1 sur le géométral XOY, la projection en perspective du rayon lumineux qui passerait par le centre ; et en $c'C'_1$ sa projection sur le plan XOZ, ou plan vertical.

Nous en déduisons facilement la perspective CC'_1 du rayon lumineux de l'espace, ainsi que les traces C_2 et C'_1 de ce rayon sur le plan horizontal XOY et sur le plan

vertical XOZ. Le point C_2 est l'ombre portée par le centre sur le plan horizontal et C'_1 son ombre portée sur le plan vertical.

Fig. 240.



(c) *Ombre portée sur le plan vertical XOZ.* – Cette ombre se perspective en vraie grandeur car elle est portée sur un plan de front. Pour l'obtenir considérons le plan méridien qui projette le rayon lumineux central CC'_1 sur le plan vertical. Sa trace sur le plan vertical est $c'C'_1$. Rabattons-le autour de cette ligne comme charnière, le centre vient en C_3 sur une perpendiculaire $c'C_3$ à la charnière et l'on prend $c'C_3$ égal à Cc' multiplié par l'inverse du rapport de réduction K. Ici $K = \frac{2}{3}$ donc $c'C_3 = \frac{3}{2}\,Cc'$. La section méridienne de la sphère se rabat suivant le cercle D_3E_3, et le rayon lumineux est rabattu suivant $C_3C'_1$. On mène au cercle rabattu les tangentes lumineuses $E_3E'_1$ et $D_3D'_1$, ce qui donne en D'_1 et E'_1 sur le plan vertical les extrémités du grand axe de l'ombre portée. Le petit axe est $K'_1G'_1$ perpendiculaire au précédent et égal au diamètre de la sphère. L'ombre portée sur le plan vertical est donc déterminée.

(d) *Ombre propre.* – On remonte par des rayons lumineux inverses D'_1D – E'_1E etc..... des points d'ombre portée aux points d'ombre propre sur la sphère.

Pour les points E et D répondant aux extrémités du grand axe, on remarquera que $e'E$ est une fuyante tandis que E'_1E est un rayon lumineux parallèle à CC'_1.

Les points G et K sont d'une part sur les rayons lumineux des points G'_1 et K'_1 et d'autre part sur la ligne de front KCG menée par le centre et parallèle à $K'_1G'_1$

L'ellipse d'ombre propre est donc déterminée par deux diamètres conjugués KG et DE ce qui suffit.

(e) *Ombre portée sur le plan horizontal.*

On cherche en $D_2 E_2$ et $G_2 K_2$ les traces horizontales sur le plan XOY des rayons lumineux dont on vient de se servir et l'ellipse d'ombre portée est déterminée horizontalement par deux diamètres conjugués $K_2 G_2$ et $D_2 E_2$ ce qui suffit.

§ 182. – Remarque générale sur la perspective cavalière.

On voit, figure 240, le mauvais aspect produit par la perspective cavalière dans le cas où on l'applique à un ensemble. Pour le spectateur qui regarde une perspective cavalière et qui, instinctivement, fait la restitution des lignes comme il le ferait devant un véritable tableau perspectif, les fuyantes qui sont parallèles sur le tableau lui font l'effet de lignes qui ne sont pas parallèles dans l'espace. Nous avons vu que sur une vraie perspective conique deux lignes dans ces conditions se rencontrent en réalité dans le plan neutre ou plan de front de spectateur.

Nous recommandons de n'employer la perspective cavalière que pour les dessins de details, analogues à l'assemblage de charpente de la figure 238. Alors elle a pour avantage de permettre de prendre directement des mesures sur les trois dimensions principales du dessin, ce qui suffit dans presque tous les cas.

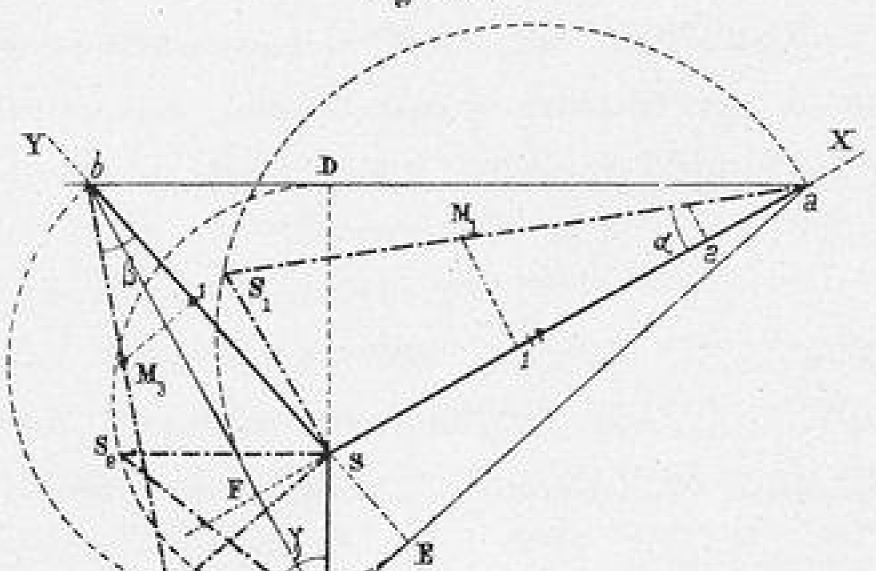
Perspective axonométrique et isométrique.

§ 183. – Principe de la perspective axonométrique.

Dans les édifices et les machines on distingue en général trois directions principales parallèles aux arêtes d'un trièdre trirectangle OX, OY, OZ. Dans la perspective axonométrique, on place ce trièdre des axes coordonnées dans une position quelconque, puis on le projette orthogonalement et non pas obliquement, sur le plan de projection.

Tel est le principe de la perspective axonométrique; on voit de suite que tandis que dans la perspective cavalière on gardait les deux axes OX et OZ parallèles au tableau et on projetait obliquement le troisième axe OY, ici aucun des axes ne sera parallèle au tableau: Ils seront tous les trois réduits par le fait de la projection orthogonale.

Fig 241.



Voyons d'abord si trois droites quelconques SX, SY SZ, issues d'un même point peuvent être prises pour projections orthogonales des trois arêtes d'un trièdre trirectangle, par exemple des trois arêtes d'un cube, et, cela étant possible, dans quel rapport chacune d'elles sera réduite par le fait de sa projection.

Coupons le trièdre par le plan de projection; soient a. b. c, (fig 241), les traces de ces trois arêtes. – Nous remarquerons d'abord que les droites ab - bc - ca, traces

des faces, doivent être perpendiculaires aux projections des arêtes opposées : Sc, Sa et Sb, d'après le théorème connu : Lorsqu'une droite est perpendiculaire sur un plan, sa projection orthogonale est perpendiculaire sur la trace du plan.

Cette première condition est déjà réalisée car si ab et bc sont respectivement perpendiculaires sur SZ et SX, d'après le théorème que les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point S, la troisième base ac, du triangle abc sera perpendiculaire sur SY.

Cherchons maintenant la hauteur du point S de l'espace au-dessus du plan de projection ; à cet effet rabattons le plan projetant l'arête Sc. L'angle DSc de l'espace étant droit, puisque Sc est perpendiculaire au plan XOY, son sommet S se rabattra sur la circonférence décrite sur cD comme diamètre, ce qui le déterminera en S_2. On aura donc en S_2c l'une des arêtes en vraie grandeur.

On fera de même pour les deux autres droites Sb et Sa. On aura leurs rabattements en S_1a et S_3b.

Il faut démontrer que les trois hauteurs SS_1 - SS_2 et SS_3 obtenues ainsi pour le point S sont égales. Or dans chaque demi-circonférence, telle que aS_1F, on a : $\overline{SS_1}^2 = \overline{SF} \times Sa$.

Il suffit donc de prouver que les trois produits $SF \times Sa$, $SD \times Sc$, et $SE \times Sb$ sont égaux ce qui résulte de ce théorème de géométrie que, dans un triangle quelconque les produits des segments des hauteurs sont égaux entre eux.

Il est donc démontré que les trois droites quelconques Sa - Sb et Sc peuvent être les projections d'un trièdre trirectangle.

Échelles des trois arêtes :

Pour avoir les trois échelles nous portons en M_1 - M_2 et M_3 sur les trois arêtes rabattues une longueur égale à 1 mètre et nous projetons ces trois points sur les trois droites Sa - Sb - Sc, ce qui nous donne en 1, 1 et 1 une longueur de 1 mètre réduite par le fait de la projection et ce qui nous détermine les échelles des 3 axes.

Remarque : Ces échelles sont différentes pour chacun des axes. C'est un inconvénient qui disparaîtrait si les trois droites Sa - Sb - Sc étaient également inclinées l'une sur l'autre, autrement dit si elles faisaient entre elles des angles de 120 degrés. Dans ce cas il est évident que les trois rabattements que nous avons fait tout à l'heure conduiraient aux mêmes figures et, par suite, aux mêmes échelles. - La perspective <u>axonométrique</u> devient dans ce cas, une perspective <u>isométrique</u>.

§ 184. – Perspective isométrique.

C'est une perspective axonométrique, dans le cas particulier où les 3 arêtes du trièdre sont également inclinées sur le tableau. - Le triangle abc formé par les traces des faces est équilatéral.

Faisons la même figure que ci-dessus.

On aura : en faisant en $c'S_1d'$ le même rabattement, en α l'angle d'une arête

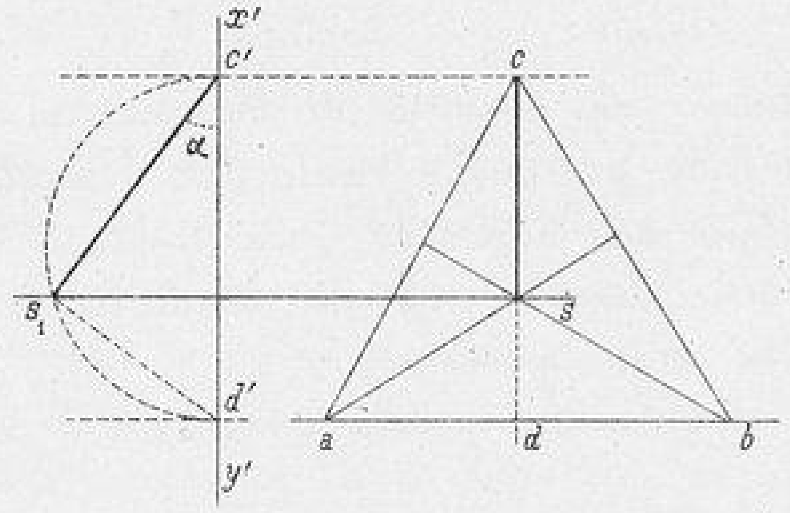
avec le plan de projection,

et $\cos\alpha = \frac{Sc}{S_1C'}$, mais

$\overline{S_1C'}^2 = Sc \times dc$, donc élevons $\cos.\alpha$ au carré:

$\cos^2\alpha = \frac{\overline{Sc}^2}{\overline{S_1C'}^2} = \frac{Sc}{dc} = \frac{2}{3}$ et $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Fig. 242.



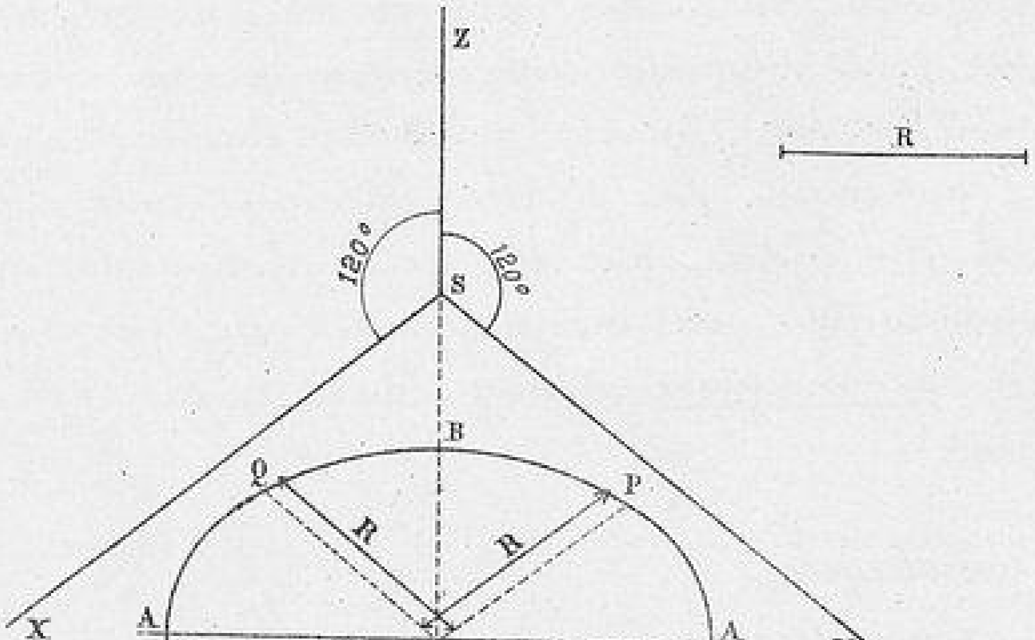
Par conséquent Sc (en projection) serait égal à S_1C' multiplié par $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (environ 0,806).

En supposant que l'on projetât isométriquement l'objet lui-même, ses dimensions parallèles aux trois axes seraient les 0,806 de la grandeur naturelle. Cela conduirait à des échelles assez compliquées et d'un emploi peu commode. Aussi, en général, et afin de faciliter les mesures on adopte des échelles simples pour les trois axes; par exemple on prendra l'échelle de $0^M,01$, ou $0^M,02$ pour 1 mètre. Cela reviendrait à dire que dans l'espace le cube dont Sa, Sb et Sc, seraient les projections des arêtes, serait lui-même réduit non pas à l'échelle de $0^M,01$ ou $0^M,02$ pour 1 mètre, mais à ces mêmes échelles multipliées par le rapport inverse $\frac{1}{0,806}$ ou $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

§ 185. – Perspective d'une circonférence isométrique.

Toutes les circonférences situées dans des plans isométriques (on nomme ainsi les plans parallèles aux faces du trièdre) se projettent suivant des ellipses semblables. Soit, par exemple, une circonférence dans le plan XOY. – Soit R son rayon et o son centre. Le grand axe AA sera parallèle à la trace du plan XY sur le tableau, c'est-à-dire perpendiculaire à la bissectrice de l'angle XOY. – Sa grandeur sera $2R \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, d'après la convention; le petit axe sera égal à $\frac{2R\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \sin.\alpha$. On pourra le calculer facilement.

Fig. 242.bis



On peut tracer plus facilement cette ellipse. Les deux demi-diamètres OP - OQ parallèles à Ox et à OY seront égaux à R réduit à l'échelle des axes. – Ce seront 2 diamètres conjugués comme projections de 2 diamètres à angle droit du cercle, ce qui permettra de tracer l'ellipse.

§ 186. –

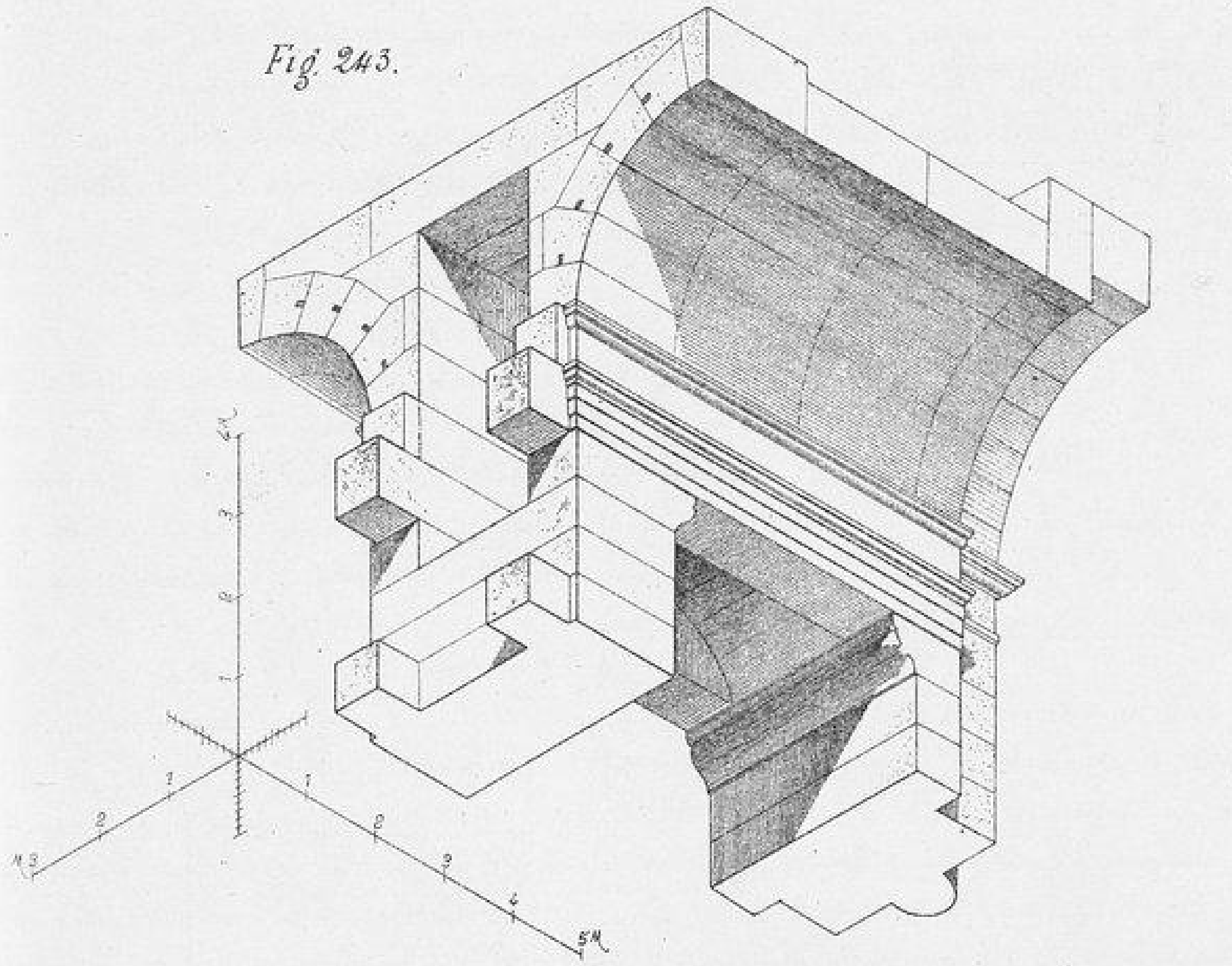
§ 186. – Rapporteur isométrique.

Il se compose d'une série de circonférences isométriques, concentriques et équidistantes. En réalité, il est donc formé d'ellipses semblables. On s'en sert en plaçant le petit axe des ellipses parallèle à la bissectrice de la face dans laquelle on opère.

Il est gradué angulairement à l'aide du rabattement d'une des circonférences, et permet, soit de construire des angles donnés, soit de porter une longueur donnée sur une ligne oblique, soit de mesurer directement une longueur qui, dans un des plans isométriques, ne serait pas parallèle à l'un des axes. Nous n'insistons pas sur l'usage de cet instrument qui est peu répandu.

§ 187. – Pour terminer, fig. 243, nous reproduisons, avec autorisation de l'auteur, comme exemple de l'emploi de la perspective axonométrique, une des figures du bel ouvrage de Mr. Choisy Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées sur l'art de bâtir chez les Romains.

Fig. 243.



Mr. Choisy recommande de choisir les trois axes OX, OY et OZ, de manière à se rapprocher autant que possible de la projection isométrique; cependant, dans la plupart des cas, l'effet produit est meilleur lorsque les trois axes ne sont pas rigoureusement inclinés à 120° les uns sur les autres. Il y a toujours quelques tâtonnements à faire dans le choix des axes pour que la figure se présente favorablement.

Quant aux échelles il recommande de les prendre égales entre elles même si la perspective est axonométrique et non isométrique.

Fin de la perspective.

IV. _ Théorie du Lavis.

Le Rendu dans le dessin d'architecture et dans le dessin de machines.

Lavis. 1re Leçon.

§ 188. _ Généralités. _ La théorie des ombres avait pour but, connaissant la position d'une ou plusieurs sources de lumière directe, de déterminer sur la surface des corps les portions de ces surfaces qui sont éclairées et celles qui sont dans l'ombre.

La théorie du rendu a pour objet d'étudier les différences d'éclat ou de couleur que présentent ces surfaces en ayant égard :

1° à la manière dont leurs différents éléments reçoivent la lumière directe ou les reflets.

2° aux positions que ces éléments occupent, par rapport au spectateur.

Elle donne la marche à suivre pour rendre ces différences sur les dessins à l'aide de couleurs, couleurs parmi lesquelles nous rangerons l'encre de Chine ou tout autre ton servant à produire les effets de l'ombre.

La théorie du rendu sera basée sur l'étude de 3 principes.

1° Le principe des orientations.

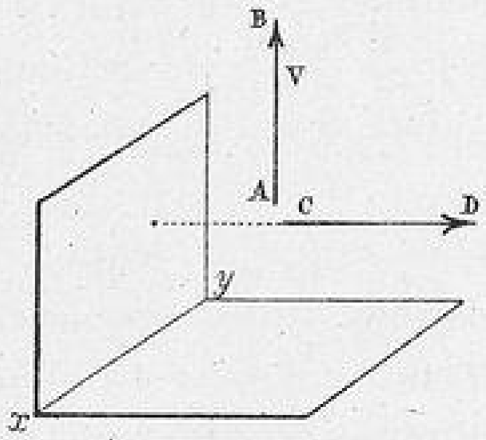
2° Le principe des couleurs.

3° Le principe des distances.

§ 188.bis _ Rayons lumineux directs et rayons visuels.

Nous admettrons, comme toujours, que dans le dessin industriel, les rayons lumineux directs sont parallèles et viennent à 45° ; c'est-à-dire qu'ils sont parallèles à la diagonale du cube. Les rayons visuels aboutissent à l'œil de l'observateur.

Fig. 244.



S'il s'agit de regarder une projection horizontale (fig. 244), on suppose l'observateur placé à l'infini, du côté de B, c'est-à-dire au-dessus du plan horizontal et les rayons visuels sont tous parallèles à la verticale AB.

S'il s'agit au contraire, d'une élévation, les rayons visuels ont la direction CD, perpendiculaire au plan vertical.

§ 189. _ Corps dépolis, corps polis, et corps mi-polis.

La lumière, en frappant la surface d'un corps, peut être renvoyée de deux manières différentes suivant que ce corps est dépoli ou poli. Dans le 1er cas, la lumière est diffusée dans tous les sens ; dans le second cas elle est réfléchie spéculairement comme dans un miroir, c'est-à-dire qu'elle est renvoyée dans une direction bien déterminée.

Les corps mi-polis participent, comme propriétés, des corps polis et des corps dépolis. _ Les lumières intenses s'y réfléchissent plus qu'elles ne s'y diffusent, les lumières

faibles font le contraire.

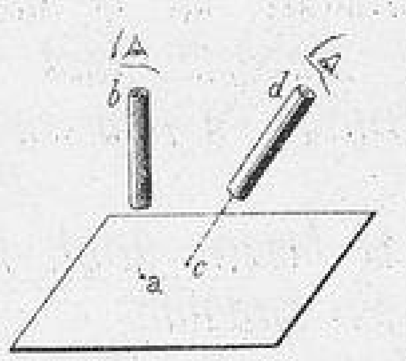
§ 190. – Expérience sur l'éclairement des corps dépolis.

On prend un plan parfaitement dépoli, une plaque recouverte de plâtre, par exemple, ou de papier blanc non glacé que l'on éclaire par la lumière solaire, ou bien encore un bâton de craie à surface bien plane.

Ce plan s'éclaire uniformément et paraît d'une teinte blanche parfaitement unie. L'expérience suivante est facile à réaliser, fig. 245.

On prend un tube, noirci intérieurement au noir de fumée pour éviter les réflexions intérieures, et à l'aide de ce tube on regarde le plan dans toutes les directions ba, dc, etc....

Fig. 245.



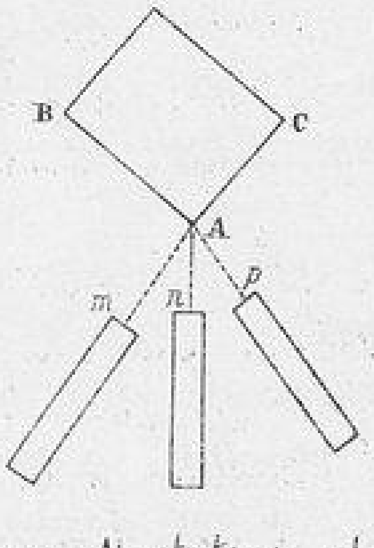
L'extrémité ouverte paraît former un rond blanc d'un certain éclat. Il est impossible de saisir les variations d'éclat quand on change l'inclinaison du tube, excepté lorsque l'on est très près de l'incidence rasante, auquel cas il se produit un assombrissement dû aux aspérités de la surface qui se recouvrent les unes les autres et qui présentent chacune leur partie dans l'ombre.

Ces effets sont les mêmes que ceux qui se produisent avec une plaque de métal rougie au feu et devenue source de lumière. Quelle que soit la manière dont on l'oriente devant les yeux, son éclat apparent ne varie pas.

On peut faire l'expérience d'une manière encore plus concluante.

On prend un prisme de plâtre ou un bâton de craie, dont l'une des arêtes A est bien vive, (fig. 246) et on l'éclaire de telle sorte que deux de ses faces AB, AC, paraissent également lumineuses.

Fig. 246.



Avec le tube précédent, on regarde l'arête A et quelle que soit la direction du tube, Am - An - Ap, les deux faces paraissent toujours aussi lumineuses l'une que l'autre.

C'est à peine si l'arête A peut se distinguer ; il semble que les faces BA et AC soient dans le prolongement l'une de l'autre.

Dans un amphithéâtre l'expérience se fait très facilement. On oriente le prisme devant une fenêtre de telle sorte que pour un spectateur déterminé les deux faces paraissent se confondre comme éclat apparent, et l'on constate que pour tous les autres spectateurs il en est de même.

§ 191. – Conséquences relatives à la lumière émise par une surface dépolie.

1° Un élément plan d'une surface dépolie se conduit, une fois éclairé par une

source de lumière, comme un corps lumineux par lui-même,(1) par exemple comme une plaque de tôle rougie au feu.

2° L'éclat apparent d'une surface dépolie ne dépend pas de la position du spectateur, mais uniquement de l'intensité de la source lumineuse et de l'angle sous lequel la lumière directe frappe cette surface. La 2e expérience, celle du prisme, le prouve bien clairement.

3° Sur une surface dépolie, éclairée par une ou plusieurs sources de rayons lumineux, les lignes d'égal éclat apparent sont les lignes d'égal éclairement.

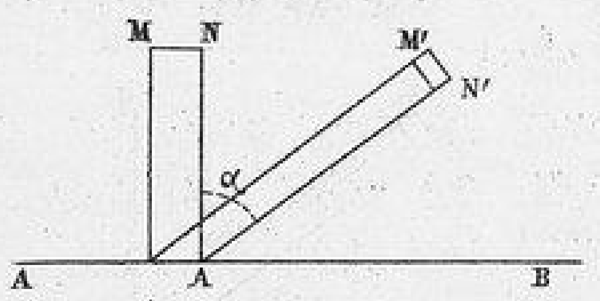
§ 192. - Eclairement total. - Eclairement unitaire d'une surface plane.

L'éclairement total d'une surface plane égale à A est la quantité totale Q de lumière reçue par cette surface.

L'éclairement unitaire serait la quantité de lumière $\frac{Q}{A}$ reçue par l'unité de surface (par le millimètre carré par exemple).

L'éclairement unitaire est important à considérer. Une surface dépolie nous semblera également éclatante si son éclairement unitaire est le même partout, c'est-à-dire si chaque millimètre carré est également éclairé(2).

Fig. 246 bis.



(1) L'intensité des rayons émis par une surface dépolie, ou par une surface source de lumière est proportionnelle au cosinus de l'angle fait par les rayons émis avec la normale à la surface. Nous nommerons cet angle l'angle d'émission. En effet :

Soit Q la quantité de rayons émis normalement par un élément de surface égal à A ; Q' la quantité émise par le même élément sous l'incidence α.

Les premiers forment un cylindre dont la section droite est $MN = A$.

Les seconds en forment un autre de section droite $M'N' = MN \cos\alpha = A\cos\alpha$. Puisque, vu sous ces deux directions, l'élément paraît également éclatant, c'est que les quantités de rayons reçus sur l'unité de surface en section droite, sont égales dans les deux cas.

Ces quantités sont :

$\frac{Q}{A}$ pour la direction normale et $\frac{Q'}{A\cos\alpha}$ dans la 2e direction.

On a donc : $\frac{Q}{A} = \frac{Q'}{A\cos\alpha}$ $\quad Q' = Q\cos\alpha$ C.Q.F.D.

(2) Théorème. - L'éclairement unitaire d'un élément de surface est proportionnel au cosinus de l'angle d'incidence des rayons lumineux.

En effet, soit ABCD un prisme à section droite carrée, servant d'enveloppe à toute une série de rayons lumineux en quantité Q, un premier plan P, normal aux rayons lumineux recevra une quantité de lumière représentée par Q. - Soit A la section droite du prisme, l'éclairement unitaire du plan P sera : $E = \frac{Q}{A}$. Un plan P' incliné sur le plan précédent d'un angle α sera coupé par le prisme suivant une section de surface égale à $\frac{A}{\cos\alpha}$. La quantité de lumière reçue sera toujours Q et l'éclairement spécifique $E' = \frac{Q\cos\alpha}{A}$. On a donc : $E' = E\cos\alpha$ C.Q.F.D.

Par conséquent, sur une surface dépolie, les lignes d'égal éclairement et par suite d'égal éclat apparent sont les lignes d'égale incidence, c'est-à-dire les lignes telles qu'en leurs différents points les rayons lumineux font un même angle avec la normale à la surface; plus cet angle est petit, c'est-à-dire plus le rayon lumineux se rapproche de la normale, ou, ce qui revient au même, s'éloigne du plan tangent, plus l'éclairement est grand et plus grand aussi est l'éclat apparent.

§ 193. - *Rayons indirects ou de reflets.*

Si la lumière solaire était unique et que l'on fût dans le vide, c'est-à-dire en dehors de l'atmosphère et de tout objet environnant, il n'y aurait aucun reflet et tous les points d'une surface, situés dans l'ombre, seraient absolument noirs.

Or, dans les conditions ordinaires, il n'en est pas ainsi; une ombre n'est jamais noire, il y a donc des sources indirectes de lumière qui produisent ce que l'on nomme des reflets.

Ces reflets peuvent provenir des causes les plus variées. Il serait impossible de tenir compte théoriquement de toutes les causes. Les artistes seuls peuvent rendre, à la condition de les étudier d'après nature, les effets de lumière, de coloration, d'ombre ou de demi-teintes dûs aux causes très multiples des reflets qui se présentent aux yeux.

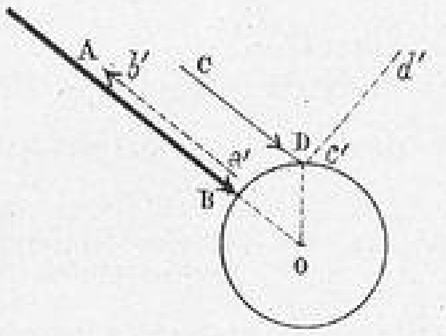
Dans cette étude théorique nous ne tiendrons compte que des reflets dûs à l'atmosphère, ou reflets atmosphériques et de ceux qui sont dus au sol, ou reflets terrestres; et encore ferons-nous des hypothèses et des conventions dont il faudrait bien se garder de tirer des conséquences trop absolues.

Disons de suite qu'il faut beaucoup étudier d'après nature et observer sans cesse les effets que la lumière produit à la surface des corps sous peine d'exagérer et d'interpréter maladroitement ce que nous allons dire par la suite.

(a) *Reflets atmosphériques.*

On assimile chaque molécule d'air, ou de poussière contenue dans l'air, à une très petite sphère brillante qui réfléchirait la lumière dans tous les sens. Dès lors un objet, même dans l'ombre, recevra de la lumière indirecte émanant de toutes ces petites sphères en nombre presque infini.

Fig. 247.



Il est facile de voir, en prenant une de ces petites sphères, fig. 247, que les rayons solaires qui la frapperaient normalement, dans la direction AB, seraient réfléchis suivant a'b' en revenant sur eux-mêmes, tandis que d'autres tels que CD, qui ne frapperaient pas normalement, seraient réfléchis suivant c'd' en formant un cône plus ou moins ouvert.

Il résulte de là que les rayons obliques CD seront plus ou moins dispersés par le fait de la réflexion sur les molécules d'air et donneront par suite de cet éparpillement, après la réflexion, un éclairage moins intense que

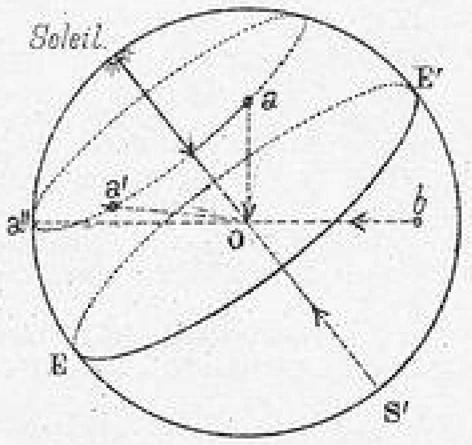
les rayons normaux qui ne sont pas dispersés.

Par conséquent, l'atmosphère donne des reflets dans toutes les directions ; mais c'est dans la direction a'b', directement opposée aux rayons solaires, que les reflets atmosphériques sont le plus éclairant, tandis qu'ils le sont le moins, dans une direction perpendiculaire telle que c'd' ; néanmoins il ne saurait y avoir beaucoup de différence entre les intensités de reflets qui viennent suivant ces différentes directions.

(b) Le ciel, source de reflets.

On se rendra mieux compte encore de ce qui va suivre en se figurant (fig. 248) placé en O et comme enveloppé dans la sphère céleste et en considérant ce que les peintres appellent le Ciel.

Fig. 248.



En quelque point que l'on regarde le ciel, il paraît lumineux et par conséquent il envoie des reflets. Si on le regarde en S on trouvera le soleil envoyant des rayons très intenses ; mais tout autre point tel que a, en enverra aussi ; le ciel paraîtra encore très lumineux en a, près du soleil et plus on se rapprochera de l'équateur EE', perpendiculaire à la ligne SO, plus l'éclat du ciel ira en diminuant ; en EE' on passe par un minimum. - Au-delà de EE' en b par exemple, l'éclat augmentera un peu et sera de nouveau maximum pour le point S' opposé au soleil ; mais ce dernier maximum ne saurait être comparable à celui qui répond au soleil S.

D'ailleurs si nous prenons sur la sphère céleste des points tels que a, a', a''......, situés sur un même parallèle, ils auront le même éclat, ils enverront donc des rayons indirects qui auront la même intensité. Autrement dit, si l'on classe les rayons indirects suivant leur intensité, tous les rayons de même intensité tels que aO - a'O - a''O etc...... arriveront suivant les génératrices d'une série de cônes de révolution qui auraient pour axe commun la ligne SS' c'est-à-dire le rayon solaire principal.

(c) Rayon atmosphérique principal.

Si nous imaginions que, l'atmosphère n'existant plus, il y ait seulement deux sources de lumière : l'une le soleil S éclairant dans la direction SO et l'autre, un second soleil S', très peu lumineux par rapport à l'autre, éclairant dans la direction opposée S'O. Ce deuxième soleil produirait, à lui seul, à peu près le même effet que tous les reflets atmosphériques réunis. Il peut être commode de le considérer au lieu de ces reflets et nous nommerons rayon atmosphérique principal, la direction de lumière qu'il pourrait nous envoyer.

Mais il faut bien remarquer que le soleil des reflets, est tout à fait fictif ; il n'a pas de propriétés ombrantes comme le soleil vrai ; il ne peut pas donner

lieu à des séparatrices d'ombre et de lumière ; il n'est là que pour nous aider à comprendre les variations d'intensité d'éclairage réel ou apparent dans les ombres.

(d) Reflets terrestres.

Le sol supposé horizontal, et éclairé par un plein soleil, doit être considéré comme une surface dépolie, qui reçoit la lumière et la diffuse dans tous les sens, d'après les lois étudiées ci-dessus. Il devient une source lumineuse qui s'éclaire dans toutes les directions et il donne des reflets importants qui l'emportent ordinairement sur les reflets atmosphériques.

Nous les étudierons plus tard, quand nous parlerons du rendu dans le dessin d'architecture. Nous commencerons par les négliger et nous allons, pour débuter, considérer les objets comme noyés dans une atmosphère indéfinie et comme placés suffisamment loin du sol pour n'en pas éprouver de reflets.

Principe des orientations et ses conséquences.

§ 194 - Variations dans l'éclairement des différents points d'un objet noyé dans l'atmosphère.

D'après ce qui précède, même si nous masquons le soleil à un élément de surface, cet élément sera éclairé par les rayons indirects qui lui viendront du ciel. De l'étude faite nous pouvons déduire ce qui suit:

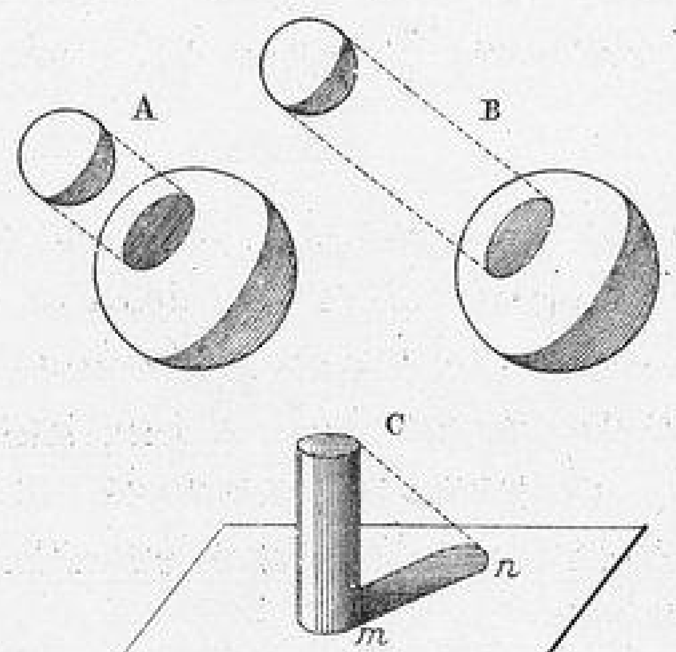
A - Zone d'ombre propre.

1° Plus il y aura de rayons indirects qui seront masqués, plus l'ombre sera noire, et inversement.

2° De deux éléments placés dans l'ombre, celui qui se rapprochera le plus d'être normal au rayon atmosphérique principal, sera le plus reflété.

3° L'ombre portée par un objet sur un autre diminue d'intensité lorsque la distance des deux objets augmente ; en effet, fig. 249, lorsque l'objet qui porte ombre est placé près (A), il masque un plus grand nombre de rayons atmosphériques que lorsqu'il est loin (B); il lui cache une plus grande étendue du ciel. C'est pour cette raison que (C) lorsqu'un objet porte ombre sur un autre (par exemple un cylindre portant ombre sur un plan, une cheminée portant ombre sur un toit) l'ombre portée est plus noire, en m, à son point de départ qu'en n à son extrémité.

Fig. 249.



4° La séparatrice d'ombre propre, ayant ses éléments qui regardent précisément les points du ciel les moins éclairés sera plus noire que tout autre élément de surface pris dans l'ombre propre, sans être cependant complètement noire, et tout en étant moins noire que les éléments situés dans l'ombre portée, ainsi que nous le prouvons plus loin.

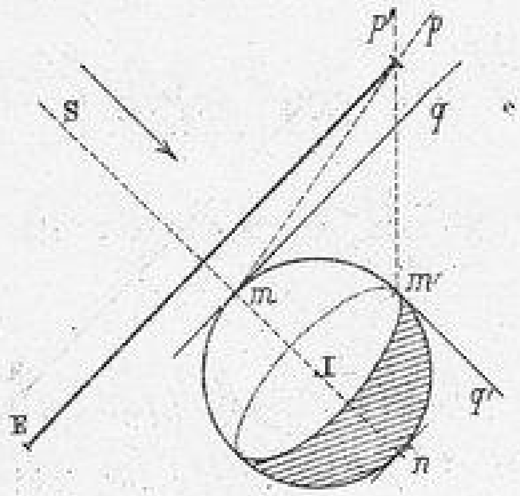
B. – Zones d'ombres portées.

Lorsqu'une surface courbe possède une de ses régions dans l'ombre portée par une autre surface, cette région ne reçoit plus ni les rayons directs ni les rayons atmosphériques voisins des rayons directs et qui sont les plus intenses.

Or, prenons deux éléments de surface, l'un voisin de l'incidence normale m et l'autre m' voisin de la ligne d'ombre propre, fig. 250.

Pour fixer les idées, imaginons que l'écran E, qui projette une ombre soit un plan assez grand. 1° L'élément m reçoit les rayons atmosphériques compris entre le plan

Fig. 250.



m p qui mené par m va raser le bord de l'écran et le plan tangent m q. D'une part ces rayons sont peu nombreux, car l'angle p m q est petit, et d'autre part, ils viennent des points du ciel les moins éclairés. De plus, ils arrivent obliquement. Donc ce point m sera très peu éclairé par les reflets.

2° L'élément m', au contraire, reçoit les rayons bien plus nombreux compris entre le plan rasant m' p' et le plan tangent m' q', parmi lesquels un grand nombre le frappent normalement et viennent de points du ciel qui sont éclairants.

Donc l'élément m' sera plus éclairé que m.

A plus forte raison le point n, directement opposé au point m, et dans l'ombre propre, sera plus reflété encore que le point m'.

(C) Loi de l'éclairement dans les ombres propres et portées.

1° Dans l'ombre propre, un élément sera d'autant plus éclairé par l'ensemble des rayons atmosphériques qu'il l'eût été davantage par le rayon atmosphérique principal supposé existant seul.

2° Dans l'ombre portée, un élément m ou m' sera d'autant plus sombre qu'il eût été plus clair si cette ombre portée n'eût pas existé.

3° Les lignes d'égales teintes dans l'ombre portée seront les mêmes que si cette ombre n'existait pas; seulement, les zones qu'elles sépareront seront d'autant plus noires qu'elles eussent été plus éclairées sans l'existence de cette ombre portée.

4° Dans l'ombre propre, les lignes d'égales teintes se traceront en faisant l'hypothèse d'un soleil fictif, existant seul et directement opposé au soleil réel. Par conséquent, si le corps est dépoli, les lignes d'égales teintes, étant les lignes d'égale incidence, s'obtiendront en continuant le tracé de celles qui correspondent à la partie éclairée de la surface et comme si les rayons directs étaient susceptibles de les atteindre.

Principe des couleurs et ses conséquences.

§ 195. – Tons simples et purs, – rabattus ou éclaircis.

En peinture, lorsqu'on ne cherche pas à se tenir dans les lois rigoureuses de la

physique, on admet trois couleurs simples que nous nommerons les tons simples et qui, par leur réunion, formeront le blanc, ce sont :

Le Jaune, couleur claire et brillante (la gomme gutte donne à peu près le jaune pur).

Le Rouge, couleur éclatante et demi-claire (carmin bien franc; il est quelquefois un peu violacé).

Le Bleu, couleur sombre (Bleu de Prusse clair.)

Le noir est l'absence de lumière, ce n'est pas une couleur.

Lorsque ces tons sont à leur maximum d'intensité et qu'ils ne sont mêlés ni de noir ni de blanc, on dit que ces tons sont purs.

S'ils sont mêlés de noir, on dit que les tons sont rabattus; s'ils sont mêlés de blanc on dit qu'ils sont éclaircis.

Suivant la fraction de noir ou de blanc qu'ils contiennent ils peuvent être rabattus ou éclaircis à $1/10^e$, $2/10^e$, $3/10^e$ &c.

§ 196. – Tons composites de 1er, 2e ou 3e Ordre. – Rosace des couleurs.

Si l'on mélange, par parties égales, les tons simples, on obtiendra les tons composites de premier ordre qui pourront être rabattus ou éclaircis.

Rouge et Jaune donnent Orange,
Jaune et Bleu donnent Vert,
Bleu et Rouge donnent Violet.

Si l'on mélange un ton composite de 1er ordre, avec le ton simple qui en est le plus voisin, on aura un ton composite de 2e ordre.

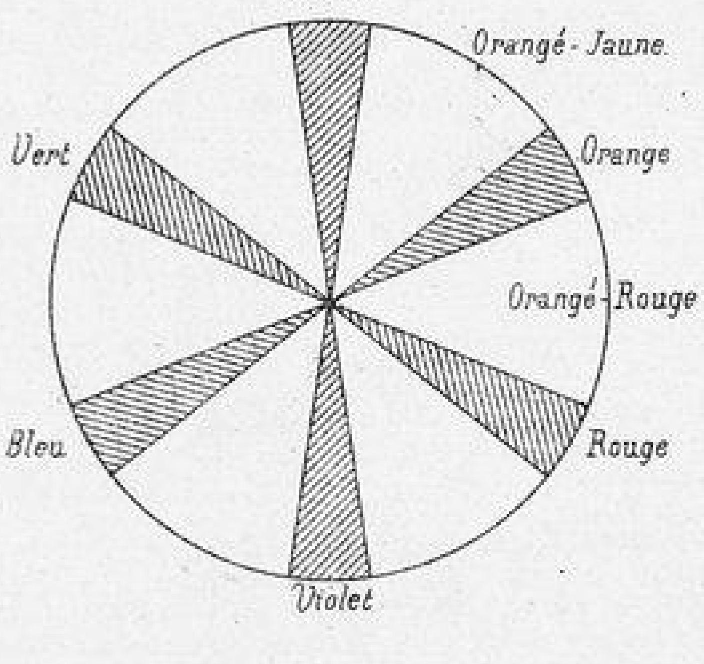
Orangé et Rouge donnent Orangé-Rouge
Orangé et Jaune donnent Orangé-Jaune, etc......

Les tons de 3e ordre s'obtiendront en mélangeant l'un des précédents avec la couleur simple ou composite qui l'avoisine.

Orangé-rouge et rouge donnent Orangé-rouge-rouge, etc.

Pour obtenir une rosace des couleurs on trace un cercle (fig. 251); on prend les points situés au sommet d'un triangle équilatéral et l'on y place les trois couleurs simples, le Jaune, le Rouge et le Bleu.

Fig. 251.



Sur les points situés à égale distance des précédents on placera les tons composites du premier ordre et ainsi de suite.

Cette rosace a été construite par M. Chevreul pour servir aux usages de la Manufacture des Gobelins. Il a construit également d'autres rosaces, donnant les tons de la précédente, mais éclaircis ou rabattus à $1/10^e$, $2/10^e$, etc...

Il les a classés et dès lors, il lui a été

facile, étant donné un ton quelconque d'indiquer la rosace à laquelle il appartient et la place qu'il y occupe.

§ 197. – Couleurs complémentaires.

Deux tons sont dits complémentaires lorsque, par leur mélange, ils donnent du blanc ou du gris non coloré.

Si l'on admet, ce qui n'est pas rigoureusement exact, que les trois tons simples, le rouge, le jaune et le bleu, sont nécessaires pour former le blanc on aura d'une manière approchée tous les tons complémentaires les uns des autres, en prenant sur la rosace des couleurs celles qui sont aux extrémités d'un même diamètre.

Le Rouge a pour complémentaire le Vert
Le Jaune ——— id ——— le Violet
Le Bleu ——— id. ——— l'Orange[1]

§ 198. – Couleurs usuelles.

Les principales couleurs fournies par le commerce sont les suivantes:

Encre de Chine, noir d'ivoire ou noir de bougie }
Sépia } Ombres.
Brun de Vandick, terre d'ombre }

Ocre jaune }
Gomme gutte }
Jaune de Chrôme } Jaunes.
Pierre de fiel }

Terre de Sienne brûlée }
Carmin ou Laque carminée } Rouges.
Vermillon }

Bleu de Prusse }
Outremer ou Cobalt } Bleus.

On ne trouve que très difficilement, dans le Commerce, les couleurs pures; elles

---

[1] Une expérience très simple permet de trouver facilement la couleur complémentaire d'une couleur donnée. On trace sur une feuille de papier un cercle ou une figure quelconque que l'on colore du ton dont on cherche le complémentaire. On fixe avec les yeux, pendant une minute environ, un point A marqué au centre de la figure; puis en portant rapidement les regards sur une feuille blanche, peu éclairée, on voit apparaître la figure précédente mais colorée de la couleur complémentaire.

sont toujours plus ou moins mêlées à un pigment noir, de telle sorte que si l'on mélange deux couleurs complémentaires on n'obtiendra pas du blanc pur mais du gris.

Pour la même raison, le mélange de deux des tons simples qui précèdent ne donnera pas un ton composite très franc. C'est pourquoi on joint à ces couleurs des tons composés permettant de ne pas faire de mélanges. Les principaux sont :

Le Brun de Madder, ou laque de garance.
Le Vert Hocker.
Le Vert Véronèse.
L'indigo.
Le Jaune indien, etc.....

§ 199. – Teintes conventionnelles.

On a adopté, dans le dessin de machines, les teintes conventionnelles suivantes pour rendre la coloration des principaux matériaux que l'on emploie.

Composition des teintes conventionnelles.

		proportions	
Fer, Tôle, Acier	Bleu de Prusse	18	20
	Encre de Chine	2	
Fonte	Bleu de Prusse	15	20
	Encre de Chine	4	
	Carmin	1	
Laiton, Bronze	Gomme gutte	18	20
	Carmin	2	
	Jaune Indien si c'est possible	"	
Cuivre rouge	Terre de Sienne brûlée	10	20
	Carmin	10	
Bois	Ocre jaune	4	20
	Sépia	4	
	Terre de Sienne brûlée	10	
	Carmin	2	

Terrains : – Sépia et Sienne brûlée avec touches plus intenses faites au pinceau.

Ouvrages de maçonnerie en coupe : – Carmin très étendu.

§ 200.-

§ 200.- Lavis en Camaïeu.

On nomme Camaïeu, une peinture faite avec un seul ton (bleu, rouge, noir, etc...). Un lavis fait uniquement à l'encre de Chine est donc un Camaïeu.

Il est facile de voir que dans un pareil lavis, on rendra d'une manière approchée les effets des couleurs en se servant d'une teinte légère pour le jaune, puisque c'est une couleur claire, d'une teinte plus accentuée pour le rouge et d'une teinte plus foncée encore pour le bleu.

§ 201.- Causes de la couleur des objets.

(a) Saturation, Sursaturation, Sous-saturation.- Un objet éclairé par la lumière blanche, nous paraît coloré parce que cette lumière est décomposée à sa surface. Une portion est pour ainsi dire absorbée, tandis que l'autre est renvoyée. Si le rouge est absorbé, le vert est renvoyé. La couleur renvoyée est donc complémentaire de celle qui est absorbée.

Il existera un instant où la limite d'absorption sera atteinte. A ce moment si l'on éclaire davantage la surface, toute la lumière blanche reçue ne sera pas décomposée: une portion nous sera renvoyée, et l'objet nous paraîtra teinté de sa couleur propre mais mêlée de blanc, c'est-à-dire éclaircie.

Au contraire, si la lumière blanche éclairante diminue d'intensité, l'objet paraîtra plus sombre et teinté de sa couleur propre rabattue.

Il y aura saturation, dans le premier cas, sursaturation dans le second, et sous-saturation dans le troisième.

(b) Conventions.- Orientations saturées, sursaturées et sous-saturées.- En dessin géométrique, il nous faut un point de départ défini, quoique conventionnel.

Nous conviendrons qu'un plan est à sa limite de saturation, c'est-à-dire est à son maximum de coloration, ni teinté de noir, ni teinté de blanc, lorsqu'il est parallèle au plan de la projection que l'on regarde. Nous nommerons orientation saturée celle qui correspond à cette position. Si, partant de cette position, le plan se place plus normalement à la lumière et par conséquent s'éclaire plus, il se sursature et s'éclaircit; s'il fait le contraire, il se sous-sature et se rabat.

D'après ces conventions il est facile de voir que, sur une sphère, la zone saturée, c'est-à-dire celle qui devra nous apparaître avec toute la couleur propre de l'objet, ni rabattue, ni éclaircie, sera celle qui se trouve bien au milieu.

Nous ferons en sorte qu'en ce point nous trouvions sur notre rendu ce que nous nommerons plus loin la teinte locale de couleur. Partant de ce point, en se dirigeant du côté de l'ombre propre, cette teinte de couleur devra se rabattre, en allant du côté du point clair ou brillant elle devra, au contraire, s'éclaircir.

Nous donnerons plus loin des explications détaillées sur ce sujet (§ 207).

Principe des distances.

§ 202.- Effets de l'éloignement.

Lorsqu'un objet s'éloigne de nous, deux effets se produisent:

1° La lumière qu'il nous envoie, et, par suite, l'éclat total apparent qu'il possède, pour nous, décroît en raison directe du carré de la distance. Cet effet est absolument nul pour notre œil, et, s'il existait seul, les objets paraîtraient aussi éclatants de loin que de près.

En effet: plus un objet est loin, moins il nous envoie de lumière, c'est vrai, mais plus il paraît petit dans notre œil; de telle sorte, que celui-ci recevant moins de lumière, mais la condensant sur un espace plus petit, l'éclat, par unité de surface de cet espace de la rétine, reste constamment le même et l'objet doit paraître aussi éclatant de loin que de près. Dans les pays où l'atmosphère est très pure, en Egypte notamment, les distances ne modifient que la grandeur apparente des objets, mais presque pas l'intensité de leur coloration.

2° Lorsqu'un objet s'éloigne, il s'interpose entre lui et nous une sorte de brouillard formé par l'air ou par les poussières; ce brouillard est d'autant plus intense que l'air est moins pur. Il agit:

(a) Par réflexion, en recevant de la lumière et nous la renvoyant, ce qui diminue d'autant l'éclat relatif des objets situés derrière.

(b) Par transparence, en colorant de sa couleur, qui est bleuâtre, les objets devant lesquels il s'interpose.

§ 203.- Des différents plans en peinture.

En peinture, on classe les objets suivant leur distance à l'œil, par les places qu'ils occupent.

Les objets placés très près sont dits au *premier plan*; on admet que sur eux l'effet de l'air est nul; donc les objets en premier plan posséderont leur couleur absolue.

Placés un peu plus loin, les objets sont dits en *deuxième plan*; les objets jaunes paraîtront, dans ce cas, moins jaunes et un peu bleuis, ou mieux, un peu neutralisés comme couleur.

Les objets rouges paraîtront moins rouges et un peu bleuis, c'est-à-dire un peu violets.

Les objets bleus paraîtront moins bleus s'ils sont bleu foncé et au contraire un peu plus bleus s'ils sont bleu très clair.

Encore plus loin, les objets sont dits en *troisième plan*. Tous les effets indiqués ci-dessus devront être accentués.

Enfin, tout-à-fait au loin, les objets sont dits *dans le lointain*; la couleur bleue augmente, et l'on peut dire que toutes les couleurs viennent se fondre dans le bleu des lointains.

Le jaune devient bleu-jaune, c'est-à-dire un peu verdâtre.

Le rouge devient rouge-bleu, c'est-à-dire un peu violacé.

Le bleu devient moins foncé s'il était d'abord foncé, et plus foncé au contraire s'il était très clair. En tout cas, jamais ce bleu de lointain ne peut devenir intense; il ne doit évidemment pas dépasser le bleu de ciel, qui est le bleu de l'air à son maximum d'intensité.

§ 204. – Manière de rendre en Camaïeu, à l'encre de Chine, les effets de la distance.

Les effets de distance se rendront à l'encre de Chine de manières différentes suivant l'intensité des tons.

En effet : un objet est-il foncé ? En s'éloignant, il doit : 1° perdre de sa coloration, c'est-à-dire s'éclaircir ; 2° prendre le ton de l'air, c'est-à-dire se foncer.

Suivant que l'un ou l'autre de ces deux effets l'emportera, on devra diminuer ou augmenter la teinte qu'il aurait eue en premier plan.

Exemples : 1° Un objet jaune en lumière, se rendra en premier plan par une teinte d'encre de Chine très légère et pour ainsi dire nulle ; en s'éloignant, c'est l'effet d'assombrissement de l'air qui l'emportera ; on rendra donc l'éloignement en ajoutant de légères teintes d'encre de Chine qui, cependant, ne devront jamais, même pour les lointains, dépasser la teinte que l'on jugerait devoir représenter le bleu du ciel.

2° Un objet jaune dans l'ombre, et, plus généralement tout objet dans l'ombre se rendra, en premier plan, par une teinte d'encre de Chine en général assez intense ; en éloignant l'objet, c'est l'effet d'éclaircissement qui l'emportera et on devra diminuer les teintes.

3° Pour un objet rouge en lumière, le rouge étant un ton demi-sombre, la teinte d'encre de Chine qui le rendra en premier plan, ni sera ni claire ni foncée et à peu près celle qui conviendrait comme bleu de lointain ; il pourra donc se faire que l'éloignement conduise à ne modifier que très peu la teinte rendant le rouge. Cependant, comme il ne faut jamais, en dessin, rester dans l'indécision, on devra franchement adopter un rouge clair ou un rouge foncé ; s'il est clair, on en rendra les effets comme on a fait pour du jaune, s'il est foncé, on agira comme il va être dit pour le bleu.

4° Un objet bleu dans la lumière ; (le bleu étant une couleur sombre), se rendra, en premier plan, par une teinte d'encre de Chine un peu accentuée. En s'éloignant, cette teinte devra diminuer, tandis que l'air agira pour la foncer ; le premier effet l'emportera. Par conséquent, pour les bleus, surtout les bleus sombres (ceci ne s'appliquerait pas aux bleus clairs), la distance se rendra en diminuant le ton de premier plan.

Règle générale. – Veut-on savoir, en faisant un rendu, si tel ton d'ombre ou de lumière doit être rabattu ou éclairci en s'éloignant, on commencera par établir le ton qui conviendrait aux lointains, et qui sera très voisin de celui qui figurait le ciel, près de l'horizon. Les tons plus clairs que celui-là s'assombriront en s'éloignant, mais sans jamais dépasser comme intensité celui des lointains ; les tons plus foncés que celui des lointains devront s'éclaircir en s'éloignant, mais sans jamais devenir plus clairs que le ton de ceux-ci.

En résumé, tous les tons, en s'éloignant, tendront à se rapprocher d'un ton unique, qui est celui des lointains.

§ 205. –

§ 205.– Effets physiologiques

(a) Effets de contraste. – Ces effets sont physiologiques et se produisent sur les nerfs de la rétine. Leur influence est considérable sur l'aspect apparent des objets; le dessinateur doit les connaître, afin de les produire dans ses rendus en les exagérant. Il augmentera ainsi l'illusion produite par eux sur le spectateur. Voici les principaux effets de contraste et d'irradiation. Commençons par les effets de contraste.

1° Si deux surfaces placées à côté l'une de l'autre sont, l'une noire et l'autre blanche, leur différence d'éclat s'exagère par le seul fait de leur juxtaposition.

2° Une même surface légèrement grise paraîtra presque noire si on la fait se détacher sur un fond très blanc ou très lumineux, et presque blanche si on la met sur un fond noir.

3° Un cercle très blanc placé sur un fond moins blanc semblera entouré d'une auréole dégradée grise. Au contraire un cercle très noir placé sur un fond presque blanc semblera entouré d'une auréole plus blanche que le fond et se dégradant vers le blanc du fond en s'éloignant du cercle.

4° Une surface d'une certaine couleur, verte par exemple, se détachant sur un fond vert un peu différent d'elle, paraît moins verte que si on la place sur un fond d'une couleur complémentaire, rouge par conséquent. Autrement dit: Deux tons de couleurs analogues s'atténuent réciproquement, et deux tons de couleurs opposées, c'est-à-dire complémentaires, s'exaltent l'un par l'autre.

5° Une figure d'une certaine couleur placée sur un fond blanc paraît entourée d'une auréole dégradée, teintée de la couleur complémentaire.

(b) Effets d'irradiation. – Deux surfaces égales, l'une noire et l'autre blanche, placées à côté l'une de l'autre, ne paraissent pas égales, et la surface blanche paraît plus grande. C'est par un effet analogue que le croissant de la lune, alors que la lumière cendrée est visible, semble déborder sur la partie obscure du disque. Un fil fin, obscur, visible sur un fond gris, disparaît si le fond devient plus éclairé. Les plombs des vitraux d'église paraissent beaucoup plus minces qu'ils ne le sont en réalité. Dans certains cas, c'est à peine si on les voit. En résumé, il y a empiètement du clair sur l'obscur.

(c) Conséquences. – 1° Si deux plans A et B se coupent suivant une arête vive CD, si l'un d'eux A est éclairé, et si l'autre B est dans l'ombre, la face dans l'ombre paraît plus noire aux environs de l'arête CD et la face éclairée plus blanche.

Fig. 252.

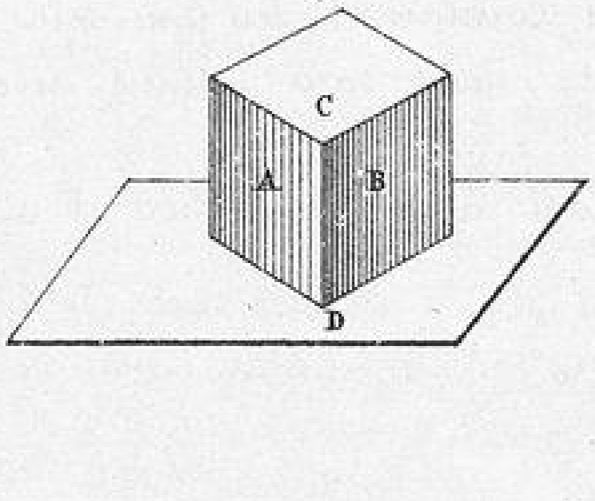
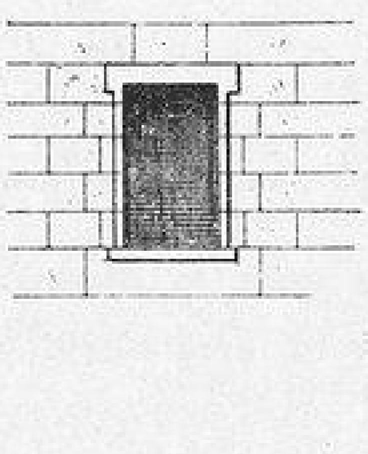


Fig. 253.



Le dessinateur devra donc, dans son lavis, accuser cet effet en l'exagérant.

2° En architecture, les fenêtres se détachent sur des murs qui, même dans l'ombre, sont beaucoup plus éclairés que l'intérieur des pièces auxquelles elles appartiennent.

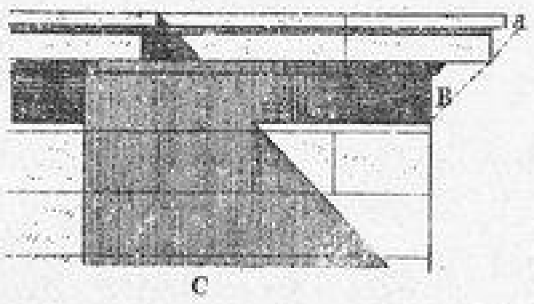
Ces fenêtres, paraissent très noires et plus foncées en haut qu'en bas. Ce dernier effet tient à ce que, dans les appartements, les parties basses des parois intérieures sont plus éclairées que les parties hautes, il se justifie également par ce qui est dit aux numéros suivants (3° et 4°).

3° Dans un édifice, les toits paraissent presque toujours sombres; à moins qu'ils ne fassent miroirs et ne réfléchissent la lumière. Cela tient à ce qu'ils se détachent sur le ciel qui est presque toujours très brillant. Les ombres dans les toits paraissent toujours très noires.

4° Le ciel étant bleu, les objets qui se détachent sur lui doivent paraître plus orangés qu'ils ne le sont en réalité, puisque l'orangé est la couleur complémentaire du bleu. Ce fait est surtout sensible pour les édifices en pierres jaunes. Aussi les architectes ont-ils l'habitude, dans leurs lavis, lorsqu'ils veulent rendre l'effet d'un édifice en pierre rouge ou jaune de passer la teinte plus intense à la partie supérieure.

Plus généralement, à cause du contraste puissant dû au ciel très clair, tous les tons, (tons d'ombre ou tons de couleur) doivent être plus intenses à la partie supérieure des édifices qu'à la partie inférieure.

Fig. 254.



5° Dans un dessin d'architecture (fig. 254) les ombres fines telles que a, se détachant sur une surface très éclairée, comme l'est un larmier, paraîtront, à égalité d'éloignement, plus noires que d'autres ombres plus larges telles que C. – La partie B de l'ombre qui est peu étendue paraîtra plus sombre que la grande nappe d'ombre C quoique située dans un même plan. En fondant la teinte de B en C on produira un effet satisfaisant et l'on donnera au dessin l'aspect que produirait un éclairage puissant.

Corps dépolis.

Lavis.
2e Leçon.

§ 206. – *Lignes d'égales teintes sur une sphère dépolie* (Épure) fig. 255.

Afin de simplifier l'épure, le rayon lumineux a été, par une rotation préalable, rendu parallèle au plan vertical; nous désignerons par φ l'angle qu'il fait avec la ligne de terre.

On sait que l'on a:

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (Voir ombres usuelles).}$$

Le point N' d'incidence normale est le point le plus clair. Les lignes d'égale incidence et par suite d'égales teintes s'obtiendront en coupant par des plans perpendiculaires au rayon lumineux. Le nombre de ces plans est arbitraire ainsi que leurs distances relatives.

On a pris 7 plans équidistants, ce qui correspond à des angles d'incidence dont les cosinus décroissent en progression arithmétique. Mais il faut remarquer que ce nombre et cette équidistance sont tout à fait conventionnels.

Les lignes ainsi obtenues ont été désignées par des nombres positifs dans la partie en lumière, 1, 2, 3...... et par des nombres négatifs, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$...... [1] dans celle qui est dans l'ombre.

Fig. 255.

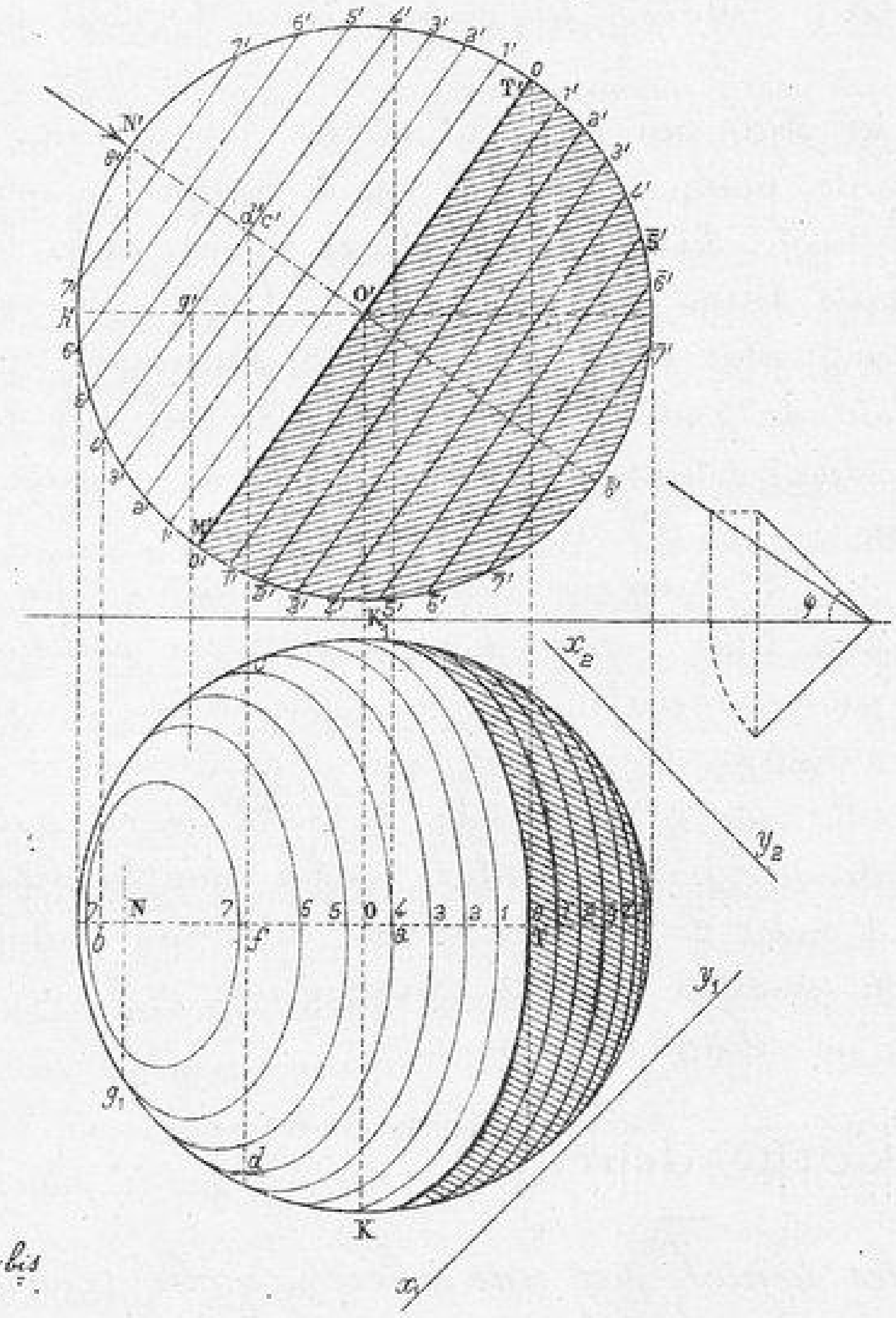


Fig. 255^bis.

La ligne d'ombre propre est la ligne de teinte N° 0.

En prenant pour nouvelle ligne de terre la droite à 45°, $x_1 y_1$, la sphère se présente comme si elle était en projection verticale avec le rayon lumineux ramené à 45°.

En prenant l'autre droite à 45° $x_2 y_2$, pour ligne de terre, on voit la sphère comme si elle était en projection horizontale.

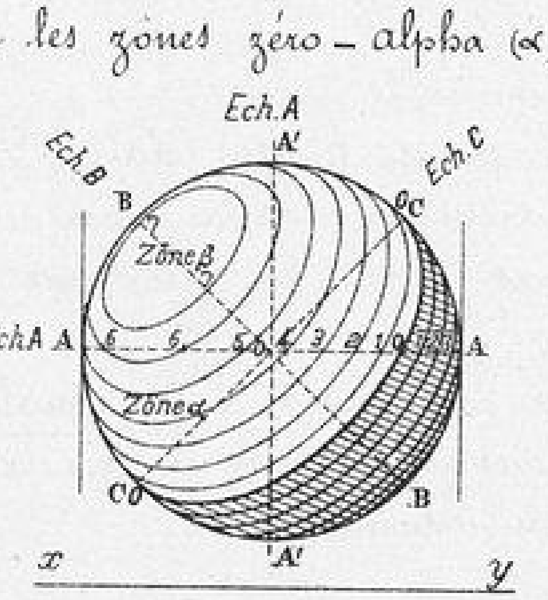
On remarquera que dans une sphère dépolie la zone 7.7 la plus claire est très voisine du contour apparent.

§ 207. – Les trois zones caractéristiques de toute surface : (Zéro – α et β).

Replaçons, par une rotation inverse, la sphère précédente dans sa position première, nous obtenons la figure 256, (qui est ici une réduction de la figure 255^bis). La subdivision en huit zones était tout à fait conventionnelle, et on pourrait faire toute autre convention. Néanmoins, quel que soit le tracé adopté, nous aurons toujours trois zones caractéristiques qui devront occuper des positions semblables, parce qu'elles répondent à des conditions optiques toujours les mêmes.

Ce sont les zones zéro – alpha (α) et Bêta (β).

Fig. 256.



1° Zone zéro, ou zone séparatrice.

C'est la zone qui vient immédiatement après la séparatrice d'ombre et de lumière. Cette séparatrice n'est pas une ligne de convention, elle est déterminée géométriquement (voir 1^ère partie) par les rayons lumineux tangents à la surface.

---

[1] Qu'il faut lire moins un – moins deux ...... etc.

2° Zone alpha (α) ou zone de teinte locale dite encore zone d'éclairage à saturation.

Nous avons dit que lorsqu'un objet coloré est éclairé par de la lumière blanche, sa coloration nous apparaît parce que la lumière blanche est décomposée à sa surface. Une portion est pour ainsi dire absorbée, tandis que l'autre est renvoyée. Si le rouge est absorbé, le vert est renvoyé. La couleur renvoyée est complémentaire de celle qui est absorbée. (Voir plus haut: Principe des couleurs). La couleur renvoyée est précisément celle que nous attribuons à l'objet.

Mais cette capacité d'absorption n'est pas indéfinie et, si l'éclairage est très considérable, une portion de lumière blanche, non décomposée, nous sera renvoyée et l'objet nous paraîtra teinté de sa couleur propre, mais mêlée de blanc, c'est-à-dire éclaircie.

Au contraire si la lumière blanche éclairante diminue d'intensité l'objet paraîtra plus sombre et teinté de sa couleur propre mais mêlée de noir c'est-à-dire rabattue.

Dans le premier cas il y a saturation, dans le second sursaturation et dans le troisième sous-saturation.

La zone α, sera pour nous la zone saturée; ce sera celle pour laquelle l'objet apparaît avec sa véritable couleur, avec ce que les peintres appellent sa teinte locale; Il est facile en prenant un plan coloré, la couverture d'un livre par exemple, de reconnaître sa teinte locale. On le placera devant soi et, l'orientant de différentes manières par rapport à la lumière, mais toujours en le regardant de face, on arrivera rapidement par tâtonnements, à trouver la position pour laquelle en le tournant un peu plus du côté du jour il s'éclaircirait et en le tournant du côté opposé il s'assombrirait.

A ce moment, il est orienté à saturation, il nous apparaît avec sa couleur vraie; nous avons sous nos yeux la teinte locale, qu'avec un peu d'habitude nous pourrions reproduire soit à la peinture à l'huile soit à l'aquarelle.

A ce moment, le plan que nous regardons est de face, c'est-à-dire dans la position du plan vertical lorsque nous regardons une projection.

Convention. - Par conséquent nous conviendrons qu'un plan est éclairé à saturation lorsqu'il est parallèle au plan de la projection que l'on regarde.

Maintenant revenons à la sphère type donnée fig. 256 en élévation et menons lui un plan tangent parallèle au plan vertical de projection; le point de contact se fera au centre même de la projection, et par suite nous pouvons affirmer que ce point appartient à la zone α.

Or, il est compris, sur la sphère type dépolie, entre les deux ellipses 4 et 5, par conséquent toute la zone $\overline{4.5}$ sera, elle aussi, éclairée à saturation: ce sera la zone α. Si la sphère est rouge, sur toute cette zone α nous devons trouver la même teinte locale rouge.

3° Zone Bêta (β) ou zone claire.

Le point d'incidence normale NN' (fig. 256) est celui qui reçoit le plus de lumière ; en ce point la sursaturation est à son maximum et il doit nous apparaître si non tout à fait blanc, du moins de la couleur locale très éclaircie. La zone $\overline{7}.\overline{7}$ qui l'entoure sera la zone claire, ou zone δ.

§ 208. – Zones intermédiaires, dites zones de demi-teintes.

Si la surface est continue, les trois zones doivent se raccorder entre elles par des zones intermédiaires ; c'est-à-dire par des demi-teintes. Mais il faut bien remarquer qu'entre la zone α et la zone δ, les demi-teintes (5, 6 et 7) ne doivent être obtenues qu'en éclaircissant la teinte locale, sans ajouter d'ombre, tandis qu'entre la zone α et la teinte zéro, il faut assombrir la teinte locale.

Ces demi-teintes de transition portent le nom de teintes de modelé.

Entre α et δ on modèle avec de la couleur éclaircie, tandis qu'entre α et zéro, on modèle avec de la couleur rabattue, autrement dit avec de l'ombre.

§ 209. – Lavis de la sphère type, à teintes fondues.

1ère manière. – 1° On reconnaîtra bien la teinte locale, autrement dit la couleur de l'objet à rendre et on composera dans un godet le ton local avec les couleurs de la boîte en lui donnant toute l'intensité qu'il doit avoir.

2° On déterminera la teinte d'ombre qui servira à modeler dans les ombres, (Nous donnerons plus loin (pratique du lavis) des notions sur ce point) et on la composera dans un autre godet. Cela fait :

3° On passera, à plat, la teinte locale sur toute la portion de la surface comprise du côté de l'ombre en deçà et à droite de la zone α ; cette teinte sera passée à pinceau plein mais plate c'est-à-dire sans fondre jusqu'à la zone α. Une fois la zone α atteinte, on fondra du côté de la lumière, en ajoutant de l'eau et en suivant à peu près pour la dégradation les ellipses 5, 6 et 7 ; arrivé à la zone $\overline{7}.\overline{7}$ le pinceau ne devra plus contenir qu'une teinte de couleur très faible, presque de l'eau pure. A ce moment le modelé dans la lumière est terminé.

4° On passera, à plat sans fondre, la teinte d'ombre, pas très intense, sur toute la zone d'ombre propre (zones négatives $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$......).

5° Prenant de nouveau la teinte d'ombre mais diminuée d'intensité, on en placera, à pinceau plein, une faible bande, à cheval sur la ligne zéro et on la fondra d'une part du côté de l'ombre en se guidant sur les lignes négatives $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$.... pour la dégradation et d'autre part du côté de la lumière en se guidant sur les lignes positives 1, 2, 3 et 4.

Mais dans cette dernière partie de l'opération il faut avoir bien soin de dégrader assez vite pour avoir de l'eau pure dans le pinceau lorsque l'on arrive à la zone α. autrement cette zone saturée α qui est déjà recouverte par la teinte locale pure, serait en plus recouverte d'ombre et ne présenterait plus l'aspect d'éclairage à saturation qu'elle doit avoir.

2e manière. – On pourrait opérer autrement, d'une manière plus certaine peut-être, comme il suit :

1° Avec de l'eau presque pure, très légèrement colorée de la teinte locale, on recouvre la zone claire β, à pinceau plein, et, se dirigeant vers la zone α on fond en ajoutant chaque fois de la couleur, de manière à recouvrir successivement les zones 7.6 – 6.5 – 5.4. On arrive ainsi à la zone α, avec une teinte franchement colorée, que l'on pousse ensuite sur tout le reste de la surface, sans fondre.

2° Avec la teinte d'ombre, on recouvre, sans fondre, toute l'ombre propre.

3° Avec de l'eau pure, on s'amorce sur la zone α, on ajoute peu à peu de la teinte d'ombre et se dirigeant vers la ligne zéro, on recouvre successivement les zones 4.3.2 et 1.

On arrive ainsi sur la ligne zéro avec une teinte d'ombre assez soutenue que l'on fond ensuite, mais en la diminuant, dans les zones négatives en se guidant sur les lignes $\bar{1}$. $\bar{2}$. $\bar{3}$........

§ 210. – Résumé.

Quelle que soit la surface dont on veut rendre l'effet, qu'elle soit dépolie, polie ou mi-polie, une fois que l'on a déterminé : La ligne zéro (séparatrice), la zone saturée α ou du moins sa ligne moyenne (Teinte locale de couleur), la zone claire ou brillante β, ou du moins sa ligne ou son point moyen (ligne ou point brillant), un lavis à teintes fondues s'exécute en trois opérations qui constituent :

(a) Le rendu de la couleur et de ses demi-teintes ; – Teinte fondue partant du presque blanc, au point β et allant en se colorant de plus en plus jusqu'à la zone α, où elle atteint son maximum, qui doit donner la vraie teinte locale, pour se terminer ensuite en teinte plate sur tout le reste.

(b) Le rendu de l'ombre propre ; – Teinte plate d'ombre passée sur tout ce qui ne reçoit pas de lumière directe. (pas très forte).

(c) Le rendu des demi-teintes d'ombre ; – Teinte fondue, partant du blanc à la zone α, allant en se colorant d'ombre de plus en plus jusqu'à la ligne zéro où elle atteint son maximum et se prolongeant dans l'ombre propre, mais en se dégradant rapidement.

(d) Le rendu des ombres portées ; – D'abord, tout ce qui est dans l'ombre portée aura dû recevoir non-seulement la teinte d'ombre propre mais aussi la teinte locale pure, sans dégradation.

Appliquant maintenant la loi des ombres portées (§ 194 – B – 2°) on prendra une teinte d'ombre que nous nommerons la teinte de contre-ombre et la commençant à la séparatrice on la dirigera, en la passant seulement dans l'ombre portée et en la fonçant de plus en plus vers les zones qui eussent été les plus claires sans l'existence de cette ombre portée. De telle sorte que si la zone β est en partie dans la lumière et en partie dans l'ombre portée, sa partie en lumière sera la plus claire de tout le dessin, tandis que sa partie dans l'ombre sera la plus noire. (comme

application voir plus loin le rendu des moulures).

En résumé : Dans l'ombre portée une zone est d'autant plus noire qu'elle eût été plus claire sans l'existence de cette ombre portée.

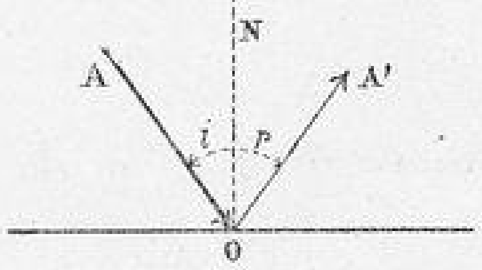
Nota : Nous désignerons par les lettres α' et β' les zones α et β lorsqu'elles seront dans l'ombre portée. - De même la zone 3-4 dans la lumière sera désignée par 3'-4' si elle est dans l'ombre portée.

Corps polis.

§ 211. - Lois de la réflexion. - Intensité du rayon réfléchi.

Les corps polis sont ceux dont la surface renvoie spéculairement la lumière, c'est-à-dire dans une direction déterminée. On sait 1° que le rayon incident est avec le rayon réfléchi dans un même plan contenant la normale à la surface réfléchissante et 2° que l'angle d'incidence AON est égal à l'angle de reflexion NOA'.

Fig. 257.



L'intensité du rayon réfléchi varie : 1° avec la nature de la surface réfléchissante ; 2° avec l'angle de réflexion.

Cette dernière variation est assez considérable pour certaines substances. Pour d'autres (les surfaces métalliques sont de ce cas), l'intensité du rayon réfléchi varie très peu avec l'incidence. Cette intensité est toujours plus grande sous l'incidence rasante que sous l'incidence normale.

Nous admettons que les corps polis que nous allons étudier, sont des métaux et que l'intensité du rayon réfléchi est indépendante de l'incidence. Cette intensité variera donc seulement avec celle de la source lumineuse.

§ 212. - Aspects divers d'un plan poli.

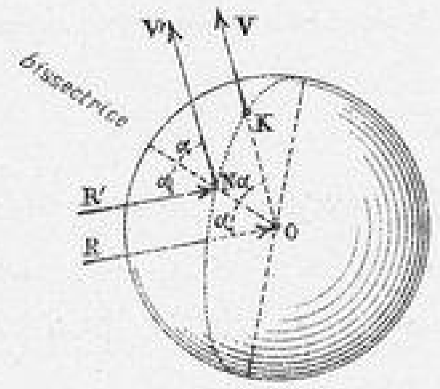
1er Cas. - Les rayons lumineux sont parallèles et le spectateur est placé à l'infini. - Les rayons se réfléchissant suivant la loi connue ; si les rayons visuels sont parallèles aux rayons réfléchis, tous les points du plan paraissent lumineux, sinon ils seront obscurs et le plan ne semblera pas exister. - Autrement dit, il faut que, s'il s'agit d'une élévation, les rayons soient réfléchis suivant des perpendiculaires au plan vertical, autrement le plan paraîtra obscur. Si la condition est remplie, au contraire, il paraîtra brillant dans son entier.

2e Cas. - Le plan est éclairé par des rayons parallèles venant dans toutes les directions. - Le spectateur est à l'infini. - C'est le cas de la lumière solaire jointe aux lumières indirectes émanant de l'atmosphère. L'œil ne recevra des rayons directs ou indirects que ceux qui, après la réflexion, auront pris la direction du rayon visuel. - Si ce sont les rayons de reflets les plus intenses qui sont renvoyés à l'œil, le plan paraîtra très lumineux et d'un éclat uniforme et inversement ; mais en tout cas, quelle que soit la position du spectateur il ne paraîtra jamais obscur.

§ 213. – Aspects divers d'une sphère polie.

1er Cas. – La sphère est éclairée par des rayons lumineux venant dans une direction unique. Le spectateur est à l'infini. – On mène (fig. 258) le rayon lumineux central RO, le rayon visuel central OV et l'on construit la bissectrice ON de leur angle.

Fig. 258.



Soit N le point où cette bissectrice sort de la sphère. Un rayon incident tel que R'N sera réfléchi suivant NV' parallèle à CV, c'est-à-dire dans la direction de l'œil. Le point N sera le point brillant de la sphère polie. Ce point seul sera brillant. Tous les autres seront obscurs et l'existence de la sphère ne se révèlera que par ce point brillant.

Ce tracé qui donne le point brillant est connu sous le nom de Tracé par la bissectrice.

2e Cas. – La sphère polie est éclairée par des rayons parallèles venant dans toutes les directions. – Le spectateur étant à l'infini.

C'est le cas d'une sphère éclairée par la lumière solaire directe et par toutes les lumières indirectes.

Chaque direction de rayons donnera son point brillant obtenu par la méthode de la bissectrice. Comme ces directions sont en nombre infini, il y aura de ces points brillants sur toute la surface de la sphère ; seulement ils n'auront pas le même éclat. Pour avoir des lignes d'égales teintes, si nous admettons, ce qui n'est pas tout à fait exact, que la variation de l'angle d'incidence ne modifie pas l'éclat des rayons réfléchis, il faudra :

1° Classer les rayons indirects, d'après leur différence d'éclat ; (Ce classement d'ailleurs un peu hypothétique, a été indiqué au § 133).

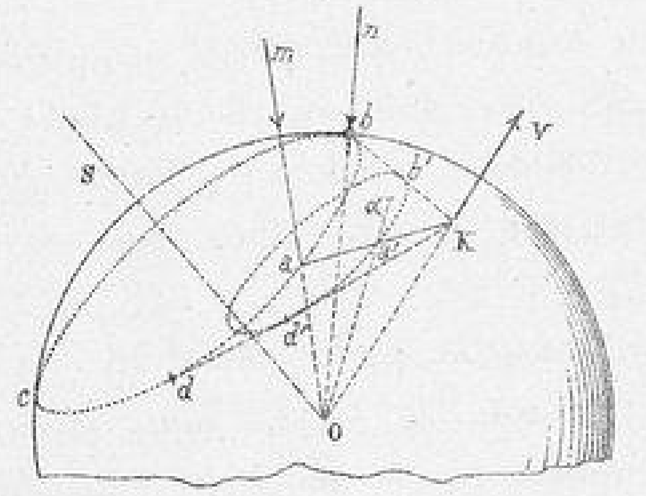
2° Grouper les rayons d'égale intensité. Ils formeront, ainsi que nous l'avons dit § 133 une série de cônes de révolution ayant tous pour axe le rayon solaire direct.

3° Chercher sur la sphère le lieu des points brillants des rayons d'égale intensité. Pour une série de rayons d'égale intensité les points brillants auront le même éclat et leur ensemble formera un lieu géométrique qui sera une ligne d'égale teinte.

§ 214. – Lignes d'égales teintes sur une sphère parfaitement polie.

(α) Recherche théorique des lignes. – Soit O, fig. 259, le rayon direct, m a, n b, une série de rayons indirects d'égale intensité et disposés, ainsi que nous venons de le dire, suivant les génératrices d'un cône de révolution, dont l'axe SO est le rayon central direct.

Fig. 259.



Les points d'incidence a b se trouvent sur un cercle b a c de la sphère, puisque les rayons d'égale intensité forment un cône de révolution.

Soit OV le rayon visuel et soit K son point de sortie de la sphère.

Cherchons par exemple le point brillant de la direction m a. A cet effet menons la bissectrice 0a′ de l'angle a 0V.

Le triangle a 0K est isocèle puisque 0a et 0K sont deux rayons de la sphère. Le point a′ pied de la bissectrice est donc le milieu de la droite K a qui est la base de ce triangle isocèle.

Si l'on prolonge 0a′ jusqu'en α point de rencontre avec la sphère, α sera le point brillant de la direction.

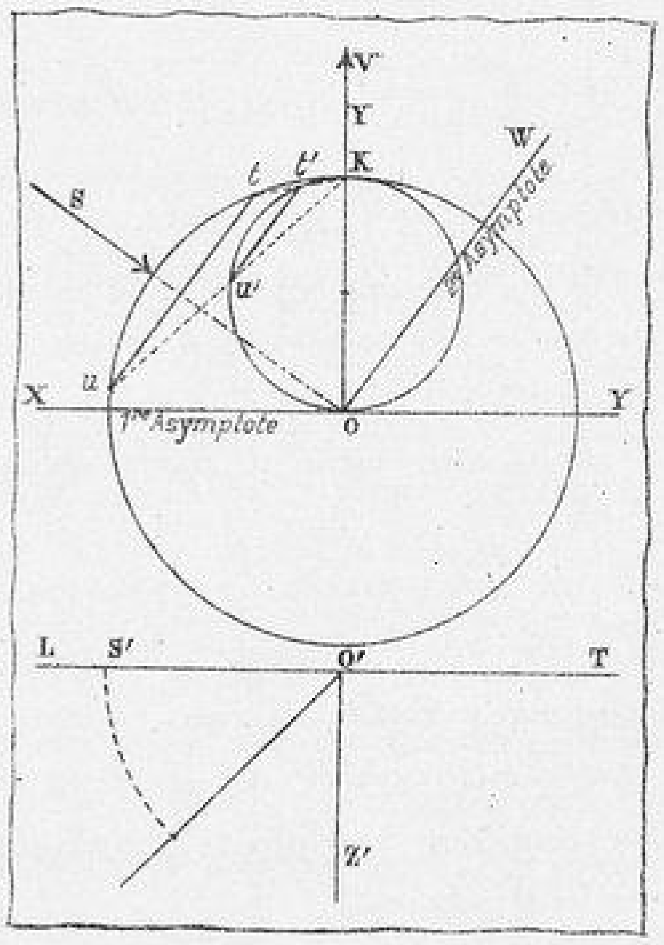
Or je dis que le lieu des points a′ b′ est un cercle.

En effet, les droites telles que K a, K b, K d, ... forment un cône oblique dont la base est le cercle b a d c et dont le sommet est le point K. On a en a′, b′, d′, ... les milieux des génératrices, donc les points a′, b′, c′ sont sur un cercle parallèle au cercle de base et de rayon moitié.

Pour avoir les points brillants tels que α, on joint 0a′ et on prolonge jusqu'à la sphère en α. Mais les droites telles que 0a′ - 0b′ ..... formeront un nouveau cône oblique dont le cercle a′ b′ c′ .... est la base et 0 le sommet; donc le lieu des points brillants α sera l'intersection de la sphère et du cône oblique ayant le cercle a′ b′ c′ .... pour directrice et le centre 0 pour sommet.

(b) *Epure*. – (fig. 260). Par une rotation, le rayon lumineux est supposé rendu parallèle au plan vertical et projeté à l'angle φ sur le plan horizontal.

Fig. 260.



Soit 0S, 0S′, le rayon direct. Prenons une série de rayons indirects d'égal éclat. Ils formeront un cône ayant 0S pour axe. La ligne des points d'incidence sera le cercle u t, projeté verticalement en ligne droite et perpendiculairement au rayon direct. Ce cercle peut être considéré comme l'intersection de la sphère et du plan perpendiculaire au plan vertical qui aurait u t pour trace verticale.

K est le point de sortie du rayon visuel.

Joignons t K, u K, et prenons les milieux t′, u′ ..... de ces lignes, nous aurons en t′ u′, la projection verticale du cercle parallèle au premier et de rayon moitié qu'il faut prendre pour directrice d'un cône ayant son sommet au point 0.

Si nous décrivions une sphère ayant 0K pour diamètre, et ayant, par suite, un rayon moitié de celui de la sphère donnée, ce cercle u′t′ pourrait être considéré comme l'intersection de cette sphère par un plan t′u′ parallèle au premier plan t u.

Nous aurons donc les lignes de teinte en prenant la petite sphère 0K; la coupant par des plans perpendiculaires au rayon lumineux: prenant les cercles ainsi formés pour bases de cônes ayant leurs sommets au centre de la sphère et cherchant les intersections de ces

cônes avec la sphère primitive.

Les courbes, en projection verticale, seront des coniques puisque ce plan de projection est parallèle à un plan diamétral commun aux deux surfaces. – Nous allons en chercher les équations en projection verticale.

A cet effet : prenons pour plan des xy le méridien de front de la sphère ; le centre 0 pour centre des coordonnées, et l'axe des x parallèle à la ligne de terre. – L'axe des z sera pris perpendiculaire au plan vertical.

Soit $y = \alpha x$ l'équation du rayon lumineux en projection horizontale.

(1) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, sera l'équation de la grande sphère.

La petite sphère aura pour équation :

$x^2 + (y - \frac{R}{2})^2 + z^2 = \frac{R^2}{4}$ ou en simplifiant :

(2) $x^2 + y^2 - Ry + z^2 = 0$.

Un plan perpendiculaire au rayon lumineux aura pour équation :

(3) $y = -\frac{1}{\alpha} x + \beta$ β étant indéterminé.

Les équations (2) et (3) définissent la directrice du cône.

Le cône ayant son sommet à l'origine, les équations d'une de ses génératrices seront :

(4) $y = mz$.

(5) $x = nz$.

On exprimera que cette droite rencontre la directrice ; on éliminera pour cela x, y, z entre les équations (2) (3) (4) et (5). On obtiendra l'équation de condition :

(6) $Rm(n + \alpha m) = \alpha\beta(n^2 + m^2 + 1)$.

Remplaçant m et n par leurs valeurs tirées de (4) et (5) on aura l'équation du cône

(7) $R\alpha y + R\alpha y^2 = \alpha\beta(x^2 + y^2 + z^2)$.

L'équation de la courbe d'intersection du cône et de la sphère en projection horizontale s'obtiendra en éliminant z entre les équations (1) et (7) et l'on aura l'équation :

(8) $y(x + \alpha y) = \alpha\beta R$: Telle est l'équation du lieu en projection verticale.

Cette équation représente une hyperbole dont les asymptotes, sont les droites $y = 0$ et $x + \alpha y = 0$.

L'une $y = 0$, représente l'axe OX ; c'est donc la projection verticale de l'équateur de la sphère, l'autre $x + \alpha y = 0$ peut s'écrire $y = -\frac{1}{\alpha} x$; elle représente une droite OW, passant par l'origine et perpendiculaire au rayon lumineux OS ; c'est donc la projection verticale de la séparatrice d'ombre propre de la sphère.

Toutes les lignes d'égales teintes dans cette hypothèse se projetteront verticalement suivant des hyperboles ayant mêmes asymptotes, OX, OW, fig. 260 et 261.

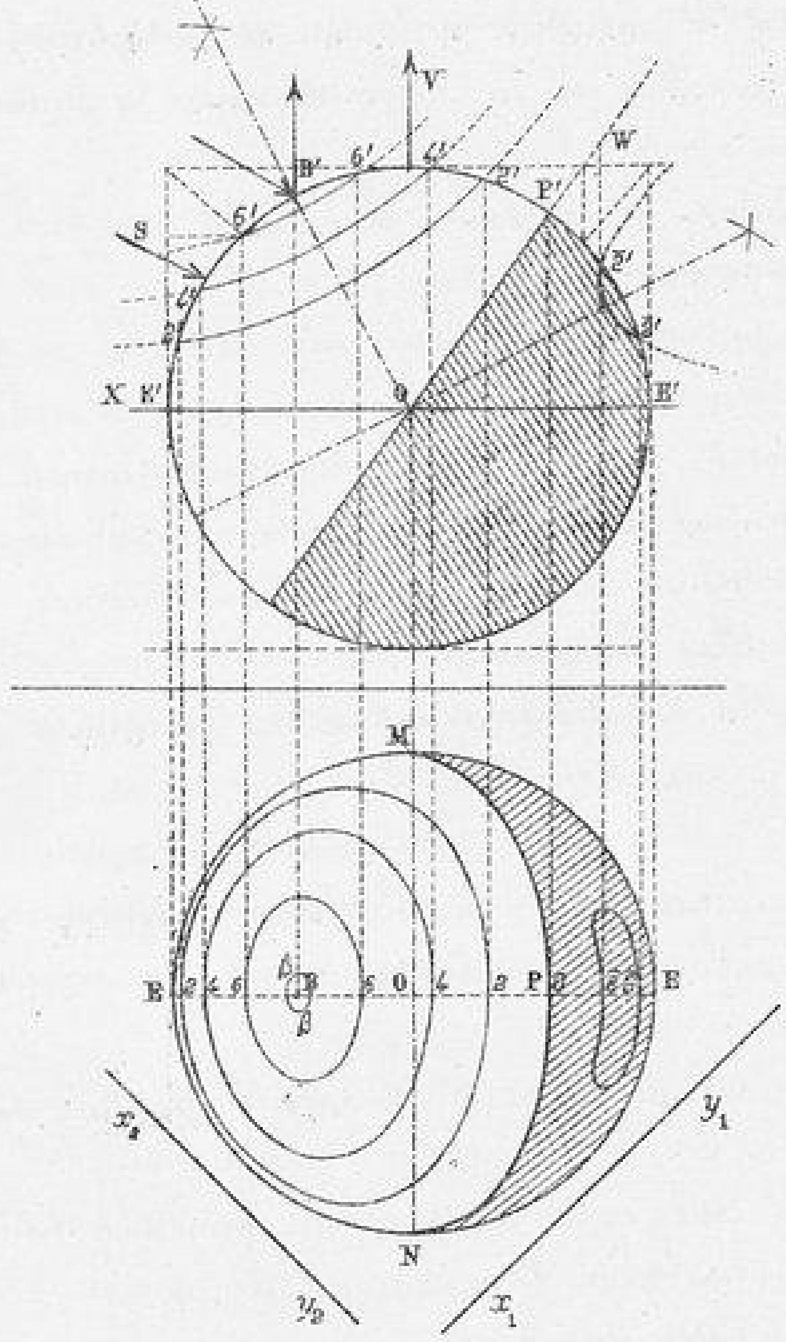
La connaissance d'un point seulement de chacune d'elles suffira pour la tracer complètement par points. On en déduira ensuite les courbes en projection horizontale par les procédés ordinaires de la géométrie descriptive.

L'épure en projection horizontale, fig. 261, une fois faite, en prenant la ligne à 45° $x_1 y_1$ pour ligne de terre, la sphère se présentera dans la position ordinaire d'une élévation, en prenant $x_2 y_2$ on la verra en plan.

Remarques : 1° La bissectrice O'B' des asymptotes, c'est-à-dire l'axe de toutes les

hyperboles est aussi la bissectrice de l'angle SOV ; son point de sortie B', sur la sphère donne donc le point brillant du soleil. Sa projection horizontale est B : C'est le point tout à fait brillant de la sphère pour un spectateur qui regarde la projection horizontale.

Fig. 261.



2° Dans la nature, comme le soleil n'apparaît pas suivant un point, mais suivant un disque de faible diamètre apparent, au lieu d'un point brillant B, nous aurons une petite courbe brillante β, β........

3° Aucune des lignes de teintes, telles que 2,2 - 4.4 etc....... ne touchent le contour apparent ; la sphère paraîtra donc aussi sombre aux environs de son contour apparent MEN qu'à ceux de sa séparatrice d'ombre et de lumière MPN : Cet effet est exact et facile à observer. En règle générale, sur les corps polis, les contours apparents sont sombres ; les zones brillantes ont des dimensions restreintes ; elles sont très claires par rapport aux zones qui les entourent, et placées toujours assez loin des contours apparents.

On ne s'étendra pas davantage sur l'étude d'une sphère polie placée dans les conditions précédentes, conditions tout-à-fait en dehors de celles qui se présentent ordinairement.

Nous avons admis en effet :

1° Que l'incidence ne modifiait pas l'éclat du rayon réfléchi (ce qui n'est pas exact).

2° Que la sphère était isolée au milieu de l'atmosphère et placée très loin de la terre, et ne subissait par conséquent que les reflets du ciel.

3° Que l'éclat des diverses parties du ciel était conforme à la loi de distribution symétrique donnée au § 133.

Or les nuages modifieront à chaque instant cette loi et de plus les objets qui entourent le corps poli viendront se réfléchir à sa surface et y former image.

Lorsque l'on voudra, dans un dessin, rendre l'aspect d'un corps parfaitement poli, on devra figurer à sa surface les images des objets environnants. La Géométrie donnerait bien le moyen de trouver ces images brillantes, mais les épures seraient fort compliquées et il serait oiseux, pour un cas si rare dans la pratique, de faire une pareille étude. Il sera préférable, si le cas se présente, d'agir comme font les peintres, c'est-à-dire de faire poser le modèle et de le copier. On remarquera seulement que la ligne d'ombre propre est encore dans ce cas une ligne d'égale teinte. On trace donc l'ombre propre sur les surfaces polies ou dépolies, de la même manière, et sur toutes les surfaces sans exception, la ligne d'ombre propre sera une ligne d'égale teinte.

Corps mi-polis.

§ 215. – Conventions pour les corps mi-polis.

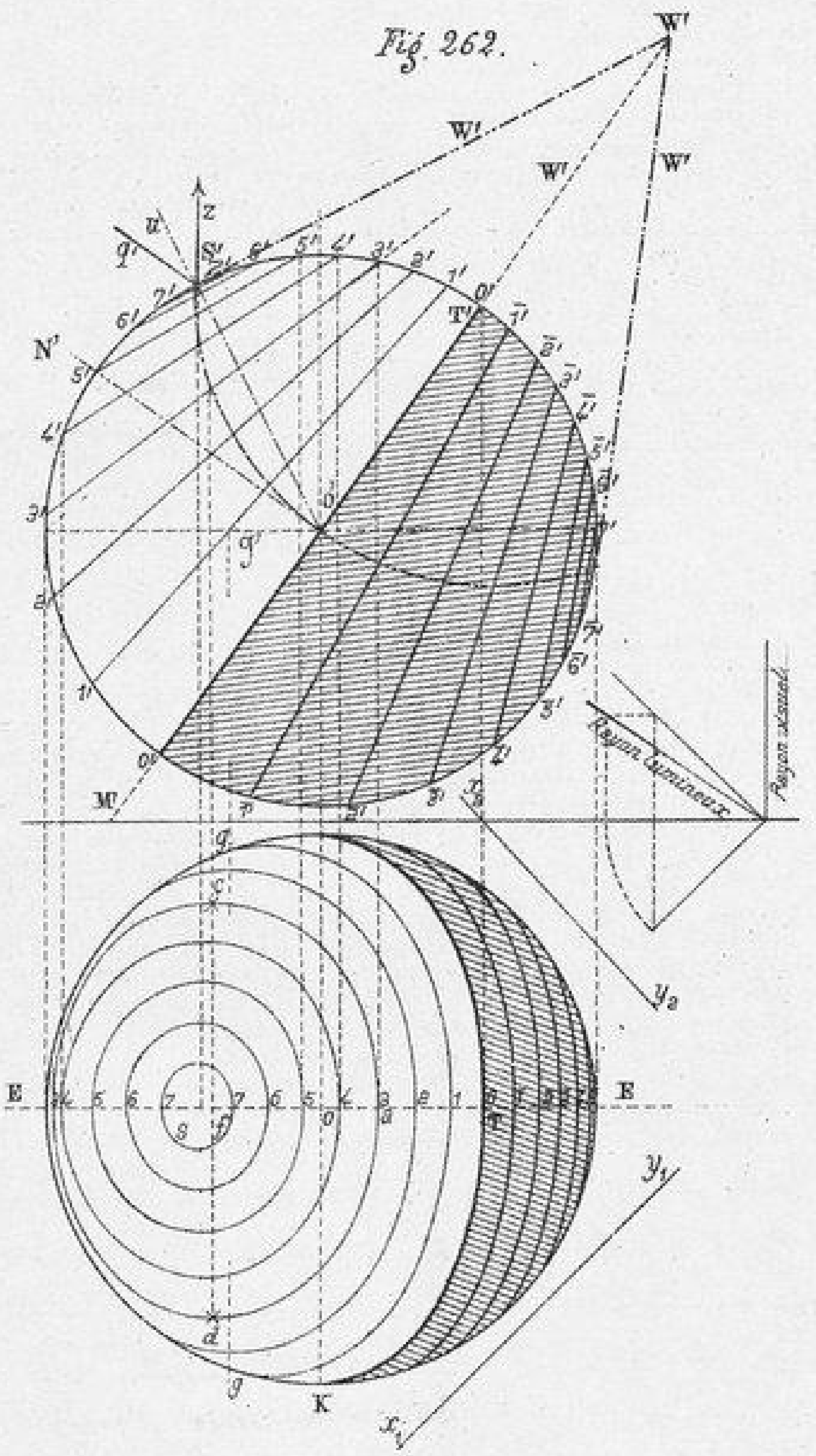
Les corps mi-polis participent, comme propriétés, des corps polis et des corps dépolis.

Les lumières intenses s'y réfléchissent plus qu'elles ne s'y diffusent, et les lumières faibles font le contraire.

Une lumière intense donnera donc lieu sur leur surface à une image brillante, comme s'ils étaient polis. Nous chercherons ce point brillant comme nous l'avons fait ci-dessus, c'est-à-dire par la méthode de la bissectrice de l'angle du rayon lumineux central et du rayon visuel central.

Nous tracerons l'ombre propre comme à l'ordinaire par les rayons lumineux tangents et nous adopterons, comme lignes de teintes, une série de courbes passant graduellement du point brillant à la ligne d'ombre propre. Forcément ces courbes seront de convention.

Fig. 262.



§216. – Epure des lignes de teintes sur une sphère mi-polie.

Nous avons adopté la construction conventionnelle suivante, s'appliquant à un observateur qui regarderait la projection horizontale.

OO' est le centre de la Sphère. Comme dans les épures précédentes, le rayon lumineux a été rendu, par une rotation, parallèle au plan vertical et projeté à l'angle φ sur le plan horizontal.

(a) Point brillant. – Le point brillant sera situé sur le méridien de front EE.

Le rayon visuel est perpendiculaire au plan horizontal. On a donc mené (Elévation) le rayon lumineux N'O' qui passerait par le centre. La bissectrice O'S' a donné en S' le point brillant, projeté horizontalement en S.

(b) Ombre. – L'ombre propre est déterminée par le grand cercle M'T' (Elévation) perpendiculaire au rayon lumineux. – En plan elle nous donne l'ellipse connue KTK.

(c) Lignes de teintes. – Pour simplifier, on s'est imposé de prendre pour lignes de teintes des courbes planes, mais c'est par pure convention, il faut bien le remarquer.

Or, quel serait le plan qui donnerait comme courbe plane, infiniment petite, le point brillant S' ?

Ce serait le plan tangent S'W'.

On a donc été conduit à mener le plan tangent S'W', au point brillant. On a pris ensuite son intersection avec le plan d'ombre propre M'T'W' : Cette intersection est une droite perpendiculaire au plan vertical et projetée, toute entière, au point W'. Dès lors, il était tout naturel, voulant des courbes planes, de prendre pour lignes de teintes, les sections faites par des plans, non plus parallèles comme dans le cas de la sphère polie, mais passant tous par la ligne W' perpendiculaire au plan vertical.

On voit en 1'1'-2'2'........7'7', sur l'élévation, ces courbes planes.

Comme pour la sphère dépolie, on a pris sept plans divisant la portion éclairée de la sphère en 8 zones.

A cet effet, l'arc T'S' compris entre la séparatrice et le point brillant, a été partagé en 8 parties égales. Ces lignes ont été affectées des nombres positifs (plus un, plus 2, etc....). On a prolongé le même tracé dans l'ombre propre et les lignes ont été affectées des nombres négatifs (moins 1, moins 2, etc.....).

De la projection verticale on déduit facilement les ellipses projections horizontales des cercles de teintes. Les points importants à déterminer pour ces ellipses sont les extrémités des axes et les points tels que g, g ..... où elles se perdent tangentiellement dans l'équateur qui est le contour apparent horizontal.

Remarques: 1° On voit que cette division de l'arc en 8 parties égales est tout à fait conventionnelle. On pourrait adopter toute autre loi de division.

2° Le point central 0, de la sphère mi-polie est, grâce au nombre de lignes de teintes que nous avons adoptées, compris entre les lignes +4 et +5 ; exactement comme pour la sphère dépolie.

Pour chacune de ces deux sphères, la zone d'éclairage à saturation, ou zone α, laquelle répond à la teinte locale de couleur, sera donc la zone 4-5.

3° Sur la sphère mi-polie, dans la partie éclairée, les lignes positives 1 et 2, se perdent dans le contour apparent ; la ligne 3 et les suivantes 4, 5, 6 et 7 ne le rencontrent pas. Sur la sphère dépolie (fig. 255) la ligne 7 était la première qui ne rencontrait pas le contour apparent.

4° En résumé, dans une sphère polie ou mi-polie, le point brillant est beaucoup plus éloigné du contour apparent que dans une sphère dépolie. Le contour apparent est plus sombre sur la sphère mi-polie que sur l'autre.

Echelles de teintes.

§ 217. – Usage des sphères types.[1]

Ayant tracé les lignes de teintes sur une sphère type polie ou mi-polie, il sera facile d'en déduire les lignes de teintes sur des cylindres ou sur des cônes de révolution placés dans des positions quelconques.

Il suffira pour cela: 1° de circonscrire à la sphère le cylindre ou le cône, 2° de déterminer la ligne de contact, 3° de prendre les points de rencontre de cette ligne avec les courbes de teintes et 4° de faire passer par ces points les génératrices des cônes ou des cylindres dont on veut faire le lavis. On obtiendrait ainsi des divisions qui s'appliqueraient ensuite, soit en les amplifiant, soit en les réduisant, à des cylindres ou à des cônes de révolution de dimensions quelconques pourvu que ces surfaces occupent, par rapport aux rayons lumineux et aux rayons visuels, des positions identiques à celles qu'occupaient sur la sphère type les surfaces qui lui ont été circonscrites.

Or, cette amplification ou cette réduction proportionnelle serait longue à faire dans chaque cas particulier; c'est pourquoi il est préférable de construire, une fois pour toutes, des subdivisions que nous nommerons des *Echelles de teintes*, auxquelles on se rapportera chaque fois.

§ 218. – Echelles de teintes les plus usuelles. (Voir les Echelles à la fin du Cours).

Ces échelles pourraient être en nombre infini puisque, d'une part, un cylindre peut occuper toute sorte de positions autour d'une sphère et que, d'autre part, un cône peut avoir un angle au sommet quelconque et occuper, lui aussi, une position quelconque.

L'expérience a montré que trois échelles suffisent, à la rigueur, à toute personne ayant quelque habitude du dessin, non-seulement pour ombrer, mais encore pour modeler les surfaces les plus compliquées qui se rencontrent dans le dessin d'architecture et dans le dessin de machines.

Ces échelles sont données fig. 263-264 et 265 pour les corps dépolis (dessin d'architecture) et fig. 266-267 et 268 pour les corps mi-polis (dessin de machines). Elles s'appliquent aux cylindres de révolution dans les trois positions principales qu'indiquent les figures marquées en trait plein sur les croquis qui accompagnent chaque échelle. On se sert de ces échelles de la manière suivante:

Soit à ombrer et à graduer un cylindre dépoli dans la position répondant à l'échelle A (cylindre parallèle aux arêtes du cube). Supposons que son diamètre soit égal à 80^{mm}.

1° Sur une bande de papier on prendra la largeur du diamètre; 2° On inscrira la bande de papier dans l'échelle de telle sorte qu'une de ses extrémités (fig. 263) étant en A à l'origine, l'autre vienne en B sur la ligne extérieure de l'échelle; 3° On marquera tous les points et on les numérotera en ayant soin de toujours marquer un peu plus fort le point zéro, qui répond à la séparatrice; 4° On reportera ensuite la division sur la base du

---

(1) Nous nommerons *sphère type*, polie ou mi-polie, l'une des deux sphères dont nous venons de tracer les lignes de teintes.

cylindre et 5° Par les points ainsi obtenus on tracera au crayon, très légèrement, les génératrices du cylindre, ce qui donnera les lignes de teintes.

Nota: Dans ce tracé préparatoire des lignes de teintes au crayon, on dessinera d'un trait presque invisible celles qui répondent à des zones éclairées telles que 7, 6, 5 .... On marquera d'un trait plus soutenu celles qui sont dans l'ombre propre, telles que les lignes $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ ....

Enfin, si une ligne claire, c'est-à-dire positive telle que 7 ou 6, pénètre dans une ombre portée, on fera bien sur le passage dans l'ombre, de la dessiner d'un trait vigoureux.

Ces différences dans l'intensité des traits de crayon concorderont plus tard, lorsque l'on fera le lavis, avec les différences dans les intensités des teintes et produiront déjà un certain effet de modelé; cela aura pour double avantage d'abord d'avertir de l'effet à produire plus tard avec le pinceau et ensuite de faire que les traits de crayon tracés dans les zones obscures ne se perdront pas de vue tant que le lavis ne sera pas terminé.

On voit ces différences de traits observées sur les figures 269 - 270 et 271 et sur toutes celles qui suivent.

Lorsque l'on a gradué un certain nombre de cylindres dans les trois positions simples répondant aux échelles A, B et C, ou A', B' et C', on arrive à connaître assez bien, de mémoire, les distances relatives des lignes de teintes. Cela est important, car il serait absurde de ne savoir exécuter un lavis qu'à la condition que l'on ait à sa disposition les échelles.

C'est pourquoi on fera bien de lire et de retenir les légendes sommaires qui accompagnent chaque échelle.

Fig. 269.
Cylindre en saillie M.

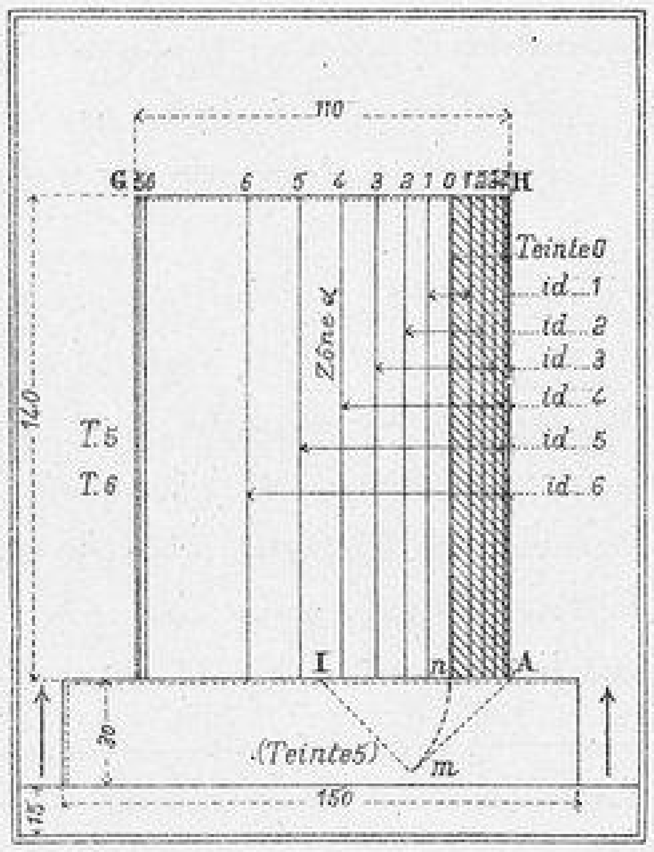
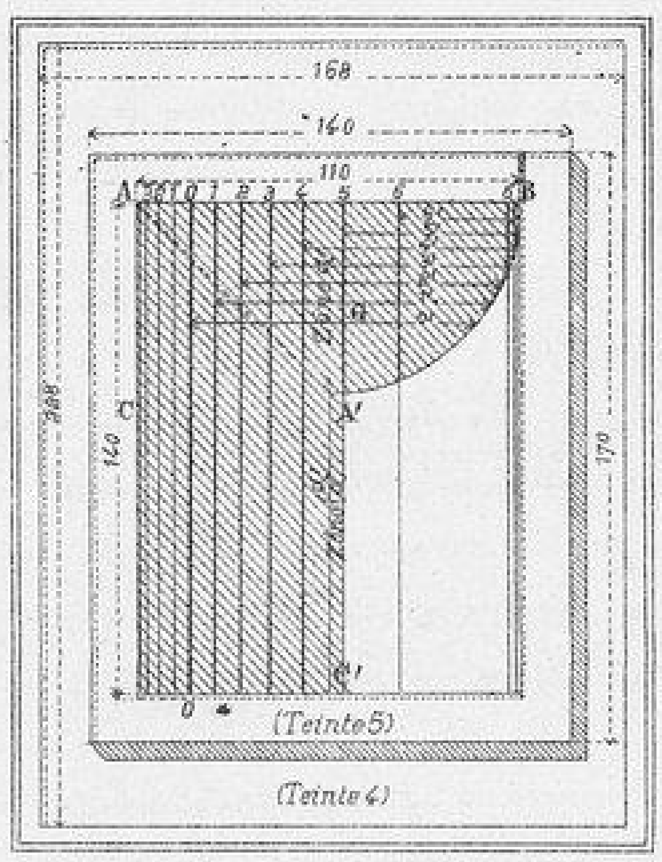


Fig. 270.
Cylindre en creux N.



§ 219. – Application des échelles aux surfaces en creux.

Prenons fig. 269 et 270 deux demi-cylindres verticaux de même diamètre : L'un M est en saillie, l'autre N est en creux. On voit facilement que à toutes les zones du premier, répondront des zones de même orientation sur le second. Seulement tandis que

sur le cylindre plein M la ligne zéro d'ombre propre est à droite, sur le cylindre creux N, elle est à gauche.

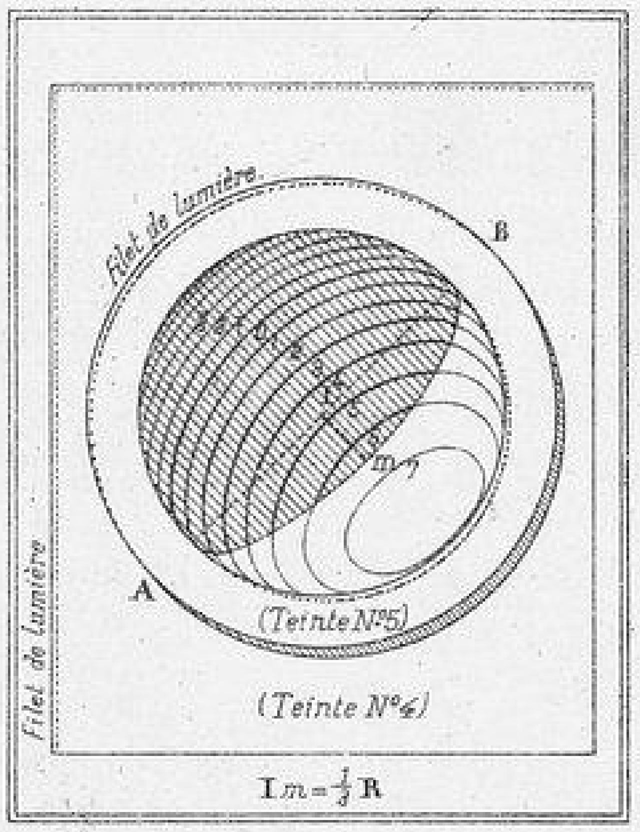
La même échelle de teinte A, servira donc mais en la renversant, c'est-à-dire en mettant à droite sur le cylindre creux les numéros mis à gauche sur le cylindre plein et inversement.

Il résulte de là ce principe important:

Les lignes de teintes sur les surfaces en creux sont les mêmes que sur les surfaces en saillie dont elles pourraient constituer le moule, mais elles sont renversées dans tous les sens.

On voit, fig. 271, l'application de ce principe au lavis d'une sphère en creux.

Fig. 271.
Sphère en creux.



Dans les surfaces creuses il y a toujours une ombre portée, et la ligne zéro est une ligne d'ombre propre virtuelle et non plus réelle comme dans les surfaces en saillie, mais elle n'en reste pas moins une ligne d'égale teinte.

Les zones négatives $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$..... seront recouvertes exactement des mêmes teintes aussi bien sur le cylindre saillant M que sur le cylindre creux N; il n'y aura donc aucune différence dans l'aspect des zones négatives. Les zones positives 1.2.3..... donneront aussi les mêmes aspects sur les deux surfaces, pourvu qu'elles soient dans la lumière. - Mais, au contraire, si elles sont les unes en tout ou en partie dans l'ombre (cylindre N), les autres dans la lumière (Cylindre M) alors le principe des ombres portées s'appliquera (voir § 210 - d).

Nous montrerons plus loin comment les échelles permettent de tracer les lignes de teintes sur les sphères, sur les tores simples ou composés, et, plus généralement, sur la plupart des surfaces qui se rencontrent en dessin géométrique.

Pratique du Lavis.

Lavis.
3e Leçon.

§ 220. - Des Teintes. - Transparence et intensité d'une teinte.

(a) Définitions. - Une teinte d'encre de Chine ou de couleur appliquée sur le papier agit comme un verre coloré ou teinté qui ne laisse passer qu'une fraction de la lumière qui est distribuée à ce papier et qui nous est ensuite renvoyée par lui.

Nous appellerons transparence d'une teinte, la fraction de la lumière qui laisse passer cette teinte.

L'intensité serait la fraction de lumière arrêtée par la teinte.

Si on représente par T la transparence et par I l'intensité, on aura donc $I + T = 1$.

(b). *Problème 1.*- Quelle est la transparence finale T'' de deux teintes superposées de transparence T et T' ? - On aura $T'' = T \times T'$.

En effet, supposons que la première teinte ait une transparence $\frac{1}{2}$; cela veut dire qu'elle laisse passer $\frac{1}{2}$ de la lumière blanche émise par le papier. Si la seconde a pour transparence $\frac{3}{4}$, cela veut dire qu'elle ne laisse passer que les trois quarts de ce qu'elle reçoit, et comme elle recevait $\frac{1}{2}$ elle laisse passer finalement les $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ du blanc du papier. Sa transparence T'' est donc égale à $T \times T'$.

(c) *Conséquences.*- 1° Si l'on prend une série de teintes égales superposées, tandis que le nombre des teintes croîtra en progression arithmétique, la transparence finale décroîtra en progression géométrique. 2° Si l'on passe une même teinte sur deux autres teintes inégales, l'assombrissement relatif le plus considérable sera produit sur la teinte la plus faible.

(d) *Problème 2.*- Réaliser au lavis à l'encre de Chine une teinte de transparence connue, $^2/_3$ par exemple.

A

Avec un tire-ligne rempli d'encre absolument noire, on tracera une série de traits parallèles et équidistants. Ces traits auront une épaisseur constante, $^1/_2$ millimètre par exemple, et les blancs compris entre eux auront un millimètre. Vue de loin, une feuille de papier ainsi réglée paraîtra teintée. La surface des blancs sera les $^2/_3$ de la surface totale, et par suite on peut admettre, en ne tenant pas compte des effets d'irradiation, énoncés plus haut, que la transparence de la teinte ainsi figurée, sera $^2/_3$. Il sera facile ensuite de mélanger d'eau une teinte d'encre de Chine de telle sorte que la teinte qu'elle fournira au pinceau soit équivalente à celle que nous venons de créer au tire-ligne.

Pour bien juger des teintes il faut attendre qu'elles soient sèches. Quand elles sont humides elles paraissent toujours plus intenses.

§ 221.- *Classification des teintes.*

Nous diviserons les teintes en quatre séries : (Suivre en regardant la sphère type, fig. 256, ou le cylindre, fig. 269).

1° *La teinte d'ébauche* (Teinte N° 0). C'est une teinte d'encre de Chine de transparence $^2/_3$ environ, que l'on place sur toutes les surfaces qui sont dans l'ombre propre ou dans l'ombre portée, sans distinction.

2° *Les teintes d'ombre propre et les demi-teintes* au nombre de quatre (teinte 1, 2, 3, 4). Ce sont encore des teintes d'encre de Chine.

La teinte N° 1 s'obtient en additionnant de $^1/_6$ environ d'eau pure la teinte 0 et se passe entre les lignes $+1$ et $\bar{1}$.

La teinte N° 2 se passe entre $+2$ et $\bar{2}$. On l'obtient en additionnant encore la teinte 1 avec de l'eau et ainsi de suite.

3° *Les teintes de couleurs* au nombre de trois (teintes 5, 6 et 7).

Elles sont diversement composées, suivant la nature de l'objet et vont en augmentant de transparence. (Voir teintes conventionnelles). On les passe entre $+5$ et $\bar{5}$, $+6$ et $\bar{6}$, $+7$ et $\bar{7}$. Dans les dessins lavés, on passera une teinte N° 8 excessivement légère ; souvent même cette teinte sera de l'eau pure.

4° *Teintes d'ombres portées* (Teintes N.os 0', 1', 2', 3', 4' etc .... 7').

D'après ce qui a été dit sur l'intensité des ombres, on sait qu'une zone dans l'ombre sera d'autant plus noire qu'elle eût été plus claire si elle n'eût pas été dans l'ombre.

Si donc, certaines zones positives étaient en tout ou en partie dans l'ombre portée, la zone + 7 devrait être la plus noire ; viendraient ensuite les zones + 7 + 6 + 5, etc.....

On devrait donc, dans ce cas, passer une première teinte noire, (plus noire que la teinte d'ébauche), sur la zone 7, ce sera la teinte 7'. Une deuxième teinte s'étendant jusqu'à la ligne + 6 ce sera la teinte 6' et recouvrant les zones + 7 et + 6 et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à la ligne N.° 0, ce sera la teinte 0'. (On reviendra sur ce point dans les exercices d'application).

§ 222. – *Conseils pratiques.*

Pratiquement, on opérera ainsi : Avec le gros pinceau, servant de jauge, et bien rempli, on mesurera dans le godet 6 forts pinceaux d'eau pure – Dans cette eau on délayera l'encre de Chine de manière à donner naissance à une teinte $t = \frac{2}{3}$ environ. Ce sera la teinte d'ébauche N.° 0 que l'on passera sur tout ce qui est dans l'ombre propre ou portée, indistinctement – Cela fait, on y ajoutera un pinceau d'eau, ce qui donnera la teinte N.° 1 passée des lignes + 1 à $\bar{1}$. On ajoutera à cette teinte N.° 1 2 pinceaux d'eau ce qui donnera la teinte 2, passée de 1 2 à $\bar{2}$. On ajoutera 3 pinceaux d'eau ce qui donnera la teinte + 3 et ainsi de suite.

§ 223. – *Ombres portées.*

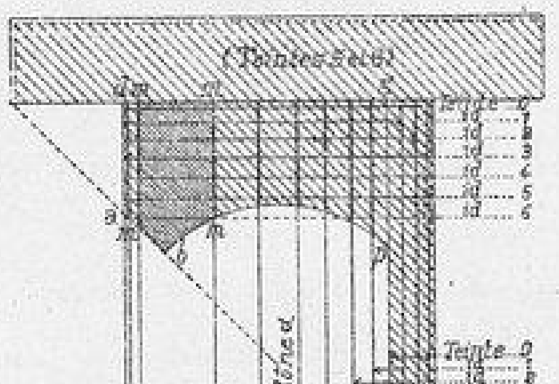
Lorsqu'une surface présente des parties dans la lumière et d'autres dans l'ombre portée, nous savons que les lignes de teintes se prolongent dans l'ombre portée ; mais, nous venons de rappeler que les zones qu'elles séparent doivent être d'autant plus foncées, qu'elles eussent été plus claires sans l'existence de l'ombre portée.

Pour réaliser cet effet, on opère de la manière suivante :

(a) *Lavis à teintes plates.* – Soit un cylindre surmonté d'un tailloir portant ombre suivant la ligne a b p (fig. 272).

On trace au crayon la ligne d'ombre propre N.° 0, et les lignes de teintes 1, 2, 3..... $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$. Il faut avoir soin, ainsi que nous l'avons dit et comme cela est visible sur le croquis ci-joint, d'indiquer très légèrement ces lignes au crayon dans toute la partie éclairée, de les marquer un peu plus dans l'ombre propre (lignes $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$.......) et de les tracer très franchement dans toute la partie a b p s occupée par l'ombre portée. Cela fait, la teinte N.° 0 est passée sur tout ce qui est dans l'ombre propre ou l'ombre portée.

Fig. 272.



La teinte 1 est passée dans la partie en lumière, depuis + 1 jusqu'à la ligne $\bar{1}$;

Dans l'ombre portée elle se limite également, à droite

à la ligne $\bar{1}$, tandis qu'elle recouvre en entier l'ombre portée.

La teinte 2, est bordée de même, pour la partie en lumière, aux lignes 2 et $\bar{2}$, tandis que dans l'ombre portée elle s'étend à $\bar{2}$ à toute l'ombre portée.

Et ainsi de suite, jusqu'à la teinte 6.

A ce moment le lavis est terminé pour tout ce qui est dans la lumière ou dans l'ombre propre mais la partie dans l'ombre portée d, a, b, p, s est recouverte d'une teinte plate assez forte. L'effet de contre-ombre n'est donc pas encore réalisé.

Pour l'obtenir il suffit de passer, dans l'ombre portée seulement, de nouvelles séries de teintes, que nous nommerons les teintes de contre-ombres.

La première (que nous appellerons la teinte 6') sera passée en m m m m sur toute la zone 6 6 noyée dans l'ombre portée; la seconde (teinte 5') sera passée par dessus la précédente, la débordera et se limitera aux lignes 5, 5, et ainsi de suite jusqu'à la dernière teinte (N° 0') qui se limitera en p s à la ligne d'ombre propre [1].

Nota: Il est évident que l'on pourrait opérer autrement et aller au contraire du faible au fort, tandis que nous avons été du fort au faible.

Ainsi on pourrait commencer par la teinte 6, de couleur très faible: ajouter un peu de couleur dans le godet ce qui donnerait la teinte 5, à ce moment ajouter un peu de teinte d'ombre ce qui fournirait la teinte 4 et ainsi de suite. On arriverait ainsi à la teinte zéro. En y ajoutant de plus en plus de teinte d'ombre on obtiendra les teintes d'ombres portées 1'. 2', 3'...... 7'.

On sera peut-être plus sur, de cette façon, de partir de la teinte la plus claire que l'on désire, d'obtenir (zone α) le ton local de couleur qui convient et d'avoir en dernier lieu (zone 7') le noir voulu dans la zone la plus obscure de l'ombre portée.

§224. – *Lavis à teintes fondues* (Même cylindre).

1° La teinte d'ébauche N° 0 est passée, à plat, comme dans le cas précédent.

2° Comme il importe de bien ménager en clair la zone 6, 6, on prend de l'eau pure que l'on étend sur cette zone (aussi bien dans la partie éclairée que dans la partie ombrée). On la fond rapidement en gris du côté du contour apparent de gauche. (Voir le paragraphe suivant. Teintes adoucies) puis on la reprend du côté droit avant qu'elle n'ait séché et on l'amène, en la fonçant progressivement, jusqu'à être à son maximum, à la ligne N° 0 (§ 234, 2e manière) après quoi on la dégrade jusqu'au contour apparent de droite (§ 234, 1re manière).

On répète cette opération jusqu'à ce que l'effet désiré soit obtenu dans la lumière et dans l'ombre propre.

Depuis que la teinte d'ébauche a été passée, on ne s'est pas occupé de la partie dans l'ombre portée; par conséquent, à ce moment, dans cette partie, la zone m m m m est plus claire que les autres, ce qui est le contraire de ce qui doit être.

---

[1] Cette première teinte de contre-ombre 6', doit être plus forte que la teinte d'ébauche N° 0. – Les autres teintes 5', 4'..... etc., sont de plus en plus faibles et s'obtiennent par additions successives d'eau.

Pour obtenir l'effet de contre ombre, il suffira donc, en partant de cette zone, et fondant du fort au faible (§ 226, 1ère manière), de passer une ou plusieurs teintes, qui, toutes, se réduiront à rien en arrivant à la ligne d'ombre propre ps.

On peut, si on le préfère opérer du faible au fort, c'est-à-dire commencer avec de l'eau à la ligne ps et foncer progressivement jusqu'à obtenir, en mm, mm, un maximum que l'on adoucit, pour finir du côté du contour apparent de gauche.

§ 225. – Des filets de lumière et des filets de reflets.

Lorsqu'un plan est limité par des arêtes, comme par exemple la face d'un parallélipipède (fig. 273) on admet que ses arêtes ne sont pas absolument vives, mais légèrement arrondies, chacune d'elle affectant ainsi la forme d'un quart de cylindre.

(a) *Filet de lumière et filet de contre-ombre.* – Si nous prenons l'arête supérieure AB et celle de gauche AC, la surface arrondie qui leur est substituée serait dans la position du quart de cylindre M'M (fig. 274) lequel, dans sa partie en lumière, M', renferme la zone la plus claire α et dans sa partie ombrée la zone la plus en contre-ombre, c'est-à-dire la plus noire α'.

Fig. 273.

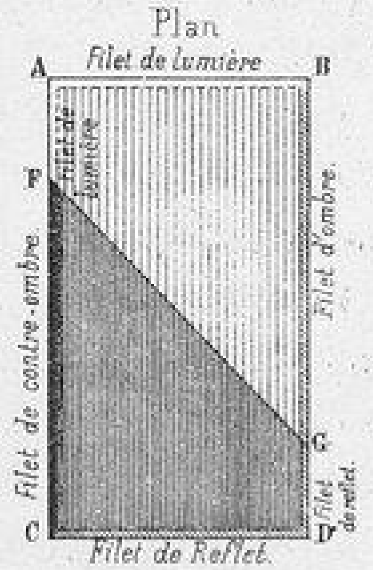
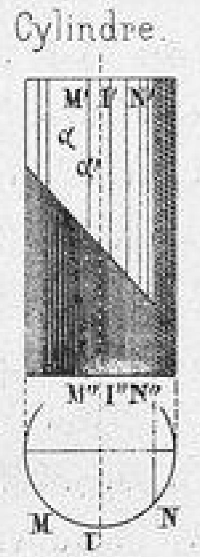


Fig. 274.



Par conséquent, si nous revenons au plan ABCD, il faudra ménager de A en F un filet clair, c'est le filet de lumière (de ½ à 1 millimètre de largeur) et de F en C, au contraire passer, au tire-ligne, un léger trait avec la teinte d'ombre la plus foncée, c'est le filet de contre-ombre (on ne l'observe pas toujours).

L'arête horizontale AB serait dans les mêmes conditions.

(b) *Filet d'ombre et filet de reflet.* – Si nous prenons l'arête de droite GD et l'arête inférieure CD, la surface arrondie qui leur est substituée serait dans la position du quart de cylindre N'N, lequel renferme l'ombre propre. Or, dans la partie éclairée N' cette ombre propre tranche en gris sur le ton central I; par conséquent, sur l'arête BG, nous devrons passer au tire-ligne un ton gris (bien se garder de le faire noir) de ½ à 1 millimètre d'épaisseur qui viendra se perdre en G dans l'ombre portée inférieure: c'est le *filet d'ombre*. (On ne l'observe pas toujours).

Si nous revenons au cylindre, dans la partie M', l'ombre propre tranche en reflet sur la partie centrale I'' qui est en contre ombre. Par conséquent la partie GD de l'arête du prisme, doit porter un filet, dit *filet de reflet* de ½ à 1 millimètre d'épaisseur, obtenu en le ménageant lorsque l'on passe la 1ère teinte de contre-ombre sur la partie ombrée. L'arête inférieure CD est dans les mêmes conditions.

Résumé. – Les filets de lumière se réservent sur toutes les arêtes éclairées situées en haut et à gauche et les filets de reflets sur toutes celles qui étant dans l'ombre sont à droite et en dessous.

Nous indiquerons dans le cours des exercices comment il faut indiquer les filets de lumière et les filets de reflets lorsque la surface n'est pas plane, ou lorsque, étant plane,

les lignes qui en limitent le contour sont courbes.

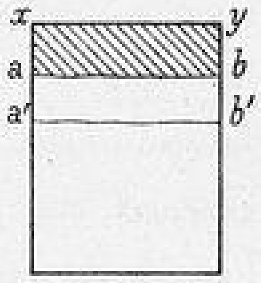
Exécution des teintes fondues.

§ 226.– Teintes fondues sur un grand espace (telles que teintes de fond. grandes teintes d'ombre).

On donne un coup d'éponge léger, afin d'ôter au papier sa sécheresse. On tamponne fortement la feuille avec un linge bien sec et on peut laver de suite.

1ère manière d'opérer. Du fort au faible.– Dans un godet on prépare 3 gros pinceaux environ, d'une teinte grise assez accusée. On oriente la planche de manière à placer en haut la partie x y qui doit être la plus foncée et on lui donne une très légère inclinaison (un livre placé sous la planche suffit pour cela).

Fig. 275.



On commence en x y, et par des petits coups de pinceau donnés de haut en bas et très également, on amène la teinte en a b, placée à 1 centimètre ou un centimètre ½ au-dessous de x y.

La ligne dentelée a b doit être bien horizontale et nourrie également de teinte sur toute sa longueur.– On doit opérer à pinceau demi-plein. On ajoute alors 2 ou 3 gouttes d'eau dans le godet. On mêle bien avec le pinceau et on fait descendre la teinte en a'b'. On continue de la même manière jusqu'en bas, mais en ajoutant chaque fois un peu plus d'eau que la fois précédente.

2e Manière. Du faible au fort.– On a deux godets : Dans l'un se trouve 4 ou 5 pinceaux d'eau pure, et dans l'autre de la teinte assez foncée, presque noire, que nous appellerons de la teinte de réserve.– On a de plus un petit pinceau qui servira de compte-gouttes et de jauge.

On met une goutte de teinte de reserve dans le godet d'eau pure, et on commence, mais, bien entendu, en remettant la planche dans sa position normale, c'est-à-dire la partie qui doit être la plus claire, en haut.

On couvre ainsi comme tout à l'heure une zone de 10 à 15 millimètres de hauteur.

On ajoute dans le godet, avec le petit pinceau, une goutte de teinte de réserve, on mêle bien avec le pinceau à laver, et on fait descentre encore la teinte de 10 à 15 millimètres.

On ajoute deux gouttes de teinte de réserve, on mêle et on continue de la même manière, en ajoutant chaque fois plus de teinte de réserve que la fois précedente. On fera bien de s'exercer à passer des teintes fondues par l'une ou par l'autre des deux manières.

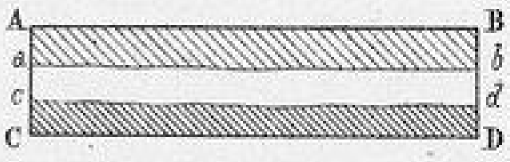
La seconde est peut-être préférable. On doit surtout l'employer lorsqu'il est important d'obtenir un ton déterminé sur la partie la plus claire de la teinte, parceque il sera toujours possible de partir de ce ton comme point de départ.

En employant la première manière on risque souvent de terminer par un ton moins clair que celui que l'on désire.

Nota : Dans tous les cas, surtout lorsque la teinte doit être assez foncée dans sa partie la plus obscure, il faut répéter les opérations précédentes deux ou trois fois avant d'arriver à l'effet voulu.

§ 227. – Teintes adoucies, c'est-à-dire fondues sur un petit espace.

Fig. 276.



Soit par exemple, à fondre une teinte de AB en CD, sachant que l'on veut avoir en AB du blanc absolu et en CD un ton gris déterminé.

On place la ligne AB horizontale.

La planche ne doit pas avoir de pente.

On a deux pinceaux, l'un, le plus gros, contient de l'eau pure, et l'autre de la teinte grise. On passe de AB en ab, une zone d'eau pure; et, ensuite de cd en CD, avec l'autre pinceau, une zone de teinte grise.

Puis on enlève au gros pinceau la plus grande partie de son eau et le passant sur la zone ab, cd, on mêle ainsi les deux teintes mises en premier lieu.

Si quelques marbrures se produisent on les fait disparaître en se servant du gros pinceau, presque sec, dont on promène légèrement la pointe sur les marbrures.

Nota. – Il faut recommencer plusieurs fois cette opération avant d'obtenir l'effet définitif.

Application au rendu des surfaces géométriques.

Lavis. 4e Leçon.

§ 228. – Lignes de teintes sur un tore à profil circulaire (fig. 277-278-279). Nous supposons la surface mi-polie.

(a) Élévation (fig. 277). – Le long du grand équateur A'A' on pourrait circonscrire un cylindre vertical répondant à l'échelle A' (fig. 266, à la fin du cours).

On relèvera donc, sur une bande de papier, la largeur A'A' et, l'inscrivant dans l'échelle A' on prendra et on reportera les numéros 0, 1, 2, 3 ...... et $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$.

De même, au méridien de profil a'a', répond un cylindre circonscrit parallèle à la ligne de terre et auquel s'applique l'échelle A'. On marquera donc de même sur la ligne a'a' les numéros 0, 1, 2, 3 ..... etc....

Cela suffit, avec un peu d'habitude pour tracer les lignes de teintes de l'élévation. On devra toujours commencer par la ligne zéro d'ombre propre que nous savons tracer sans le secours des échelles (Voir ombres usuelles). On sait qu'elle est tangente à 45°, aux points 0 et 0 du contour apparent.

On remarquera que du côté positif les lignes 1 et 2 se perdent dans le contour apparent, tandis que la ligne 3 et à plus forte raison les lignes 4, 5 ..... ne le rencontrent pas. C'est pourquoi nous dirons que sur les surfaces mi-polies, la zone 2-3 est une zone de contour apparent en lumière. Du côté négatif, c'est la zone $\bar{3}$-$\bar{4}$.

(b) Coupe (fig. 279). – Nous avons un tracé analogue.

En A"A", petit équateur, nous plaçons l'échelle A', mais renversée, parce que le cylindre qui serait circonscrit le long du cercle A"A" serait un demi-cylindre en creux.

Le long du méridien de profil a"a" nous aurons encore l'échelle A'.

Par les points ainsi placés on tracera les lignes de teintes comme pour l'élévation, en

commençant toujours par la ligne zéro et faisant les mêmes remarques pour la zone de contour apparent dans la lumière 2-3 et pour celle dans l'ombre 3-4.

(c) *Plan* (fig. 278). – Nous avons figuré au centre une sphère égale à celle qui, par sa rotation, engendrerait le tore.

L'échelle A' (dite des cylindres verticaux), fig. 266 nous sert pour le méridien de front A A .... et pour le méridien de profil a'aa' Remarquons que la bande de papier qui nous est nécessaire a été faite déjà pour le méridien de profil de l'élévation et de la coupe.

L'échelle B' (dite des cylindres à 45° en lumière) nous sert le long du méridien de symétrie à 45° Z Z.

L'échelle C' (dite des cylindres à 45° en demi-teinte) nous sert pour le méridien fuyant à 45° O O.

Nous avons dès lors assez de points pour tracer les courbes sur la sphère et sur le tore.

Fig. 277. Elévation

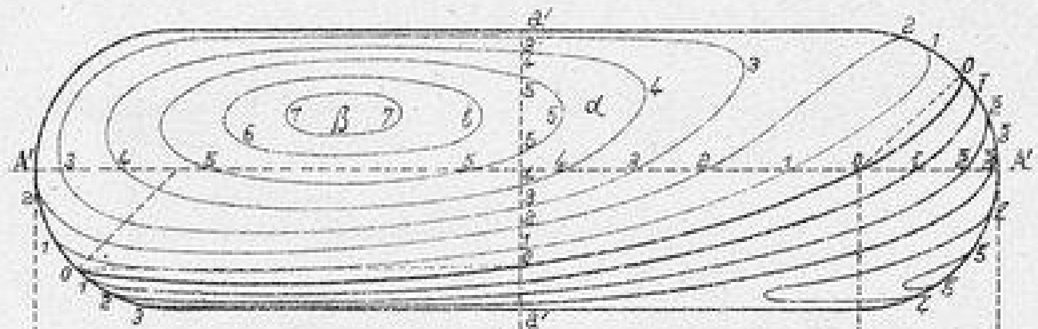


Fig. 278. Plan.

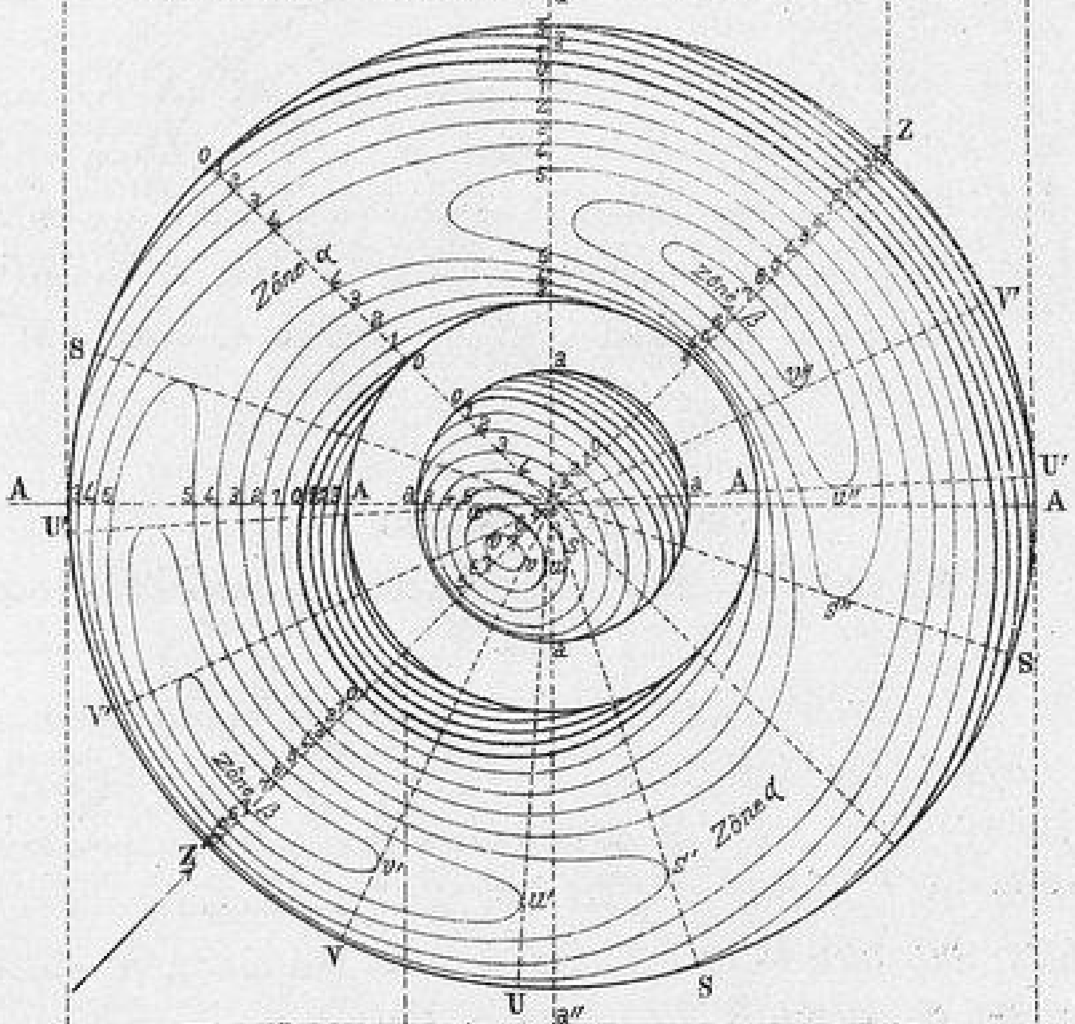
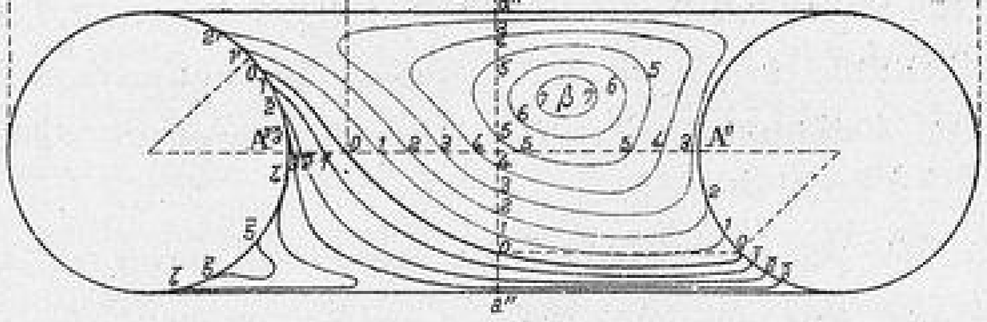


Fig. 279. Coupe.



(d) *Zones de contour apparent, courbes ovoïdes et zones de couleur.*

1° Remarquons, comme pour l'élévation et la coupe, que la courbe 2 se perd dans le contour apparent tandis que la courbe 3 et les suivantes 4, 5 .... ne le rencontrent pas. Nous observons donc ici, comme d'ailleurs sur toute surface mi-polie, que la zone 2-3 est zone de contour apparent en lumière.

2° Du centre de la sphère il nous est possible de mener des tangentes aux trois ellipses 5, 6 et 7 de la sphère. Soient ov, ou, os ces trois tangentes. Nous en concluons que sur le tore, aussi bien dans sa partie extérieure que dans son intérieur, il existera trois zones 5, 6 et 7 auxquelles répondront les mêmes tangentes.

Ces zones affectent la forme d'un ovale déprimé, nous les nommerons les <u>zones ovoïdes</u>. On voit qu'elles sont au-delà de la zone 4-5, ou zone α, dite d'éclairage à saturation. Ce seront donc des zones qui ne recevront que de la couleur et aucune teinte d'ombre. L'une d'elles, la zone 7, sera la zone brillante ou zone δ, qui sur le lavis restera blanche ou peu s'en faut.

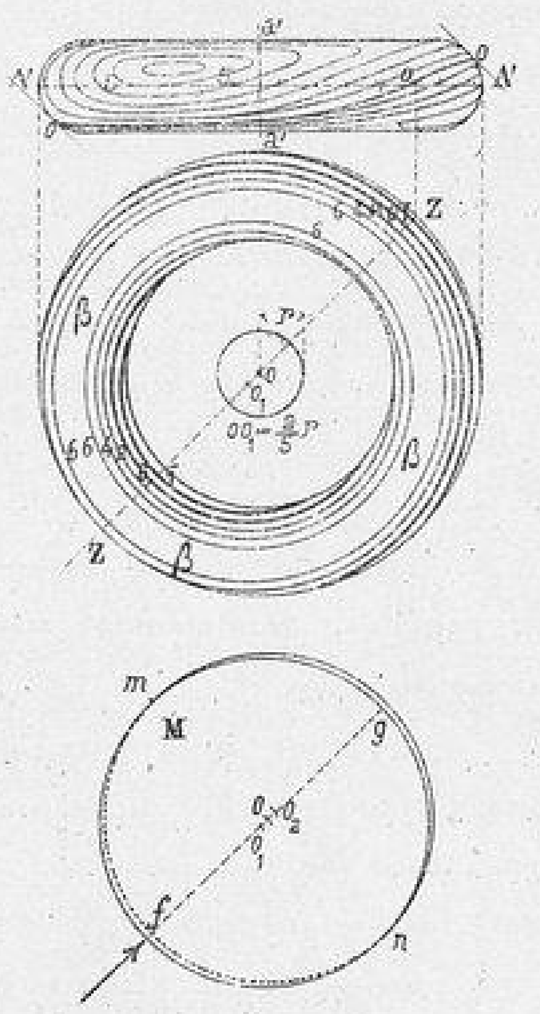
Nota. – Il faut bien remarquer que les mêmes tangentes issues du centre, servent aux courbes ovoïdes intérieures et extérieures.[1]

§ 229. – Tores dont le cercle générateur est très petit. (fig. 280).

Dans ce cas il serait impossible de tracer toutes les lignes de teintes, avec leur vraie forme, dans l'espace restreint dont on dispose. On peut procéder comme suit :

(a) Élévation. – Sur l'équateur A A' l'espace est assez grand pour y placer tous les numéros 0. 1. 2. 3. 4. 5. Mais, en hauteur, sur le méridien de profil cela devient impossible. Alors on amorce toutes les lignes de teintes dans le sens de la largeur, c'est-à-dire du grand espace, mais, dans l'autre, on fait perdre les teintes de deux en deux, l'une dans l'autre.

Fig. 280.



Ainsi $\bar{1}$ se perd avec 0. $\bar{3}$ se perd avec $\bar{2}$ et du côté de la lumière 1 et 2 se rejoignent, puis 3 et 4 etc.......

(b) En plan au lieu des sept lignes de la figure 278, on n'en prendra que trois qui, non compris la ligne zéro, seront 2. 4 et 6.

Remarquant maintenant que sur l'épure exacte (fig. 278) le point zéro situé sur le méridien de symétrie à 45° Z Z, se trouve à une distance du contour apparent qui est sensiblement les 0,4 du rayon, on substitue au vrai tracé un autre tracé approximatif, par arcs de cercles, qui est le suivant :

1° On prend, du côté d'où vient la lumière, sur le méridien à 45°, une distance $0\,0_1$ égale aux 0,4 (soit 2/5) du rayon.

2° De ce point avec des rayons égaux à ceux du grand et du petit équateur, on trace des demi-circonférences qui donnent, sensiblement, les lignes zéro.

3° Du même centre 0_1 on trace une série de circonférences concentriques qui donnent les lignes $\bar{2}$ et 2. 4. 6.

Remarques. – Ce tracé substitue aux zones ovoïdes brillantes du tracé exact, une couronne circulaire.

Il justifie également le procédé employé pour tracer les traits de forces et les filets circulaires sur un contour circulaire plan M. Il consiste à prendre sur la ligne à 45° du centre, deux points 0_1 et 0_2 distants du point 0 de toute l'épaisseur que l'on veut donner soit au filet de lumière f, soit au trait de force g, et à décrire de ces points comme centre, avec le rayon du contour circulaire, deux demi-cercles m f n et m g n, excentriques l'un à l'autre.

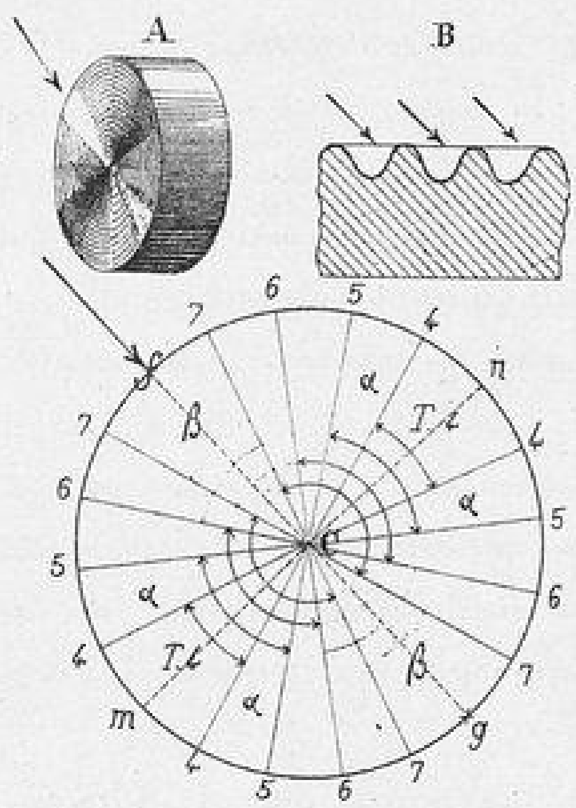
§ 230. – Surfaces planes travaillées au tour (fig. 281).

Certaines surfaces planes ou même légèrement sphériques ou coniques travaillées au tour telles que les extrémités des tourillons, les obturateurs de lunettes d'approche A, etc.... présentent au lieu d'un

(1) Il est facile de démontrer que les courbes du tore sont des conchoïdes des ellipses de la sphère obtenues en prenant pour pôle le centre de cette dernière.

plan parfait une série de stries circulaires (voir la coupe grossie, en B) formant comme autant de tores à cercles générateurs très petits, emboîtés les uns dans les autres, et ayant tous le même centre.

Fig. 281.



Or ces tores présentent tous, aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur, trois zones ovoïdes 5.6 et 7 (figure 278) limitées aux mêmes tangentes U, V et S. Les tores, pris en masse, présenteront donc une série de lignes brillantes, qui par leur ensemble donneront l'aspect de deux secteurs (voir A, fig. 281) brillants, opposés par le sommet.

Dans un lavis à teintes plates un pareil plan C, se rendra de la manière suivante:

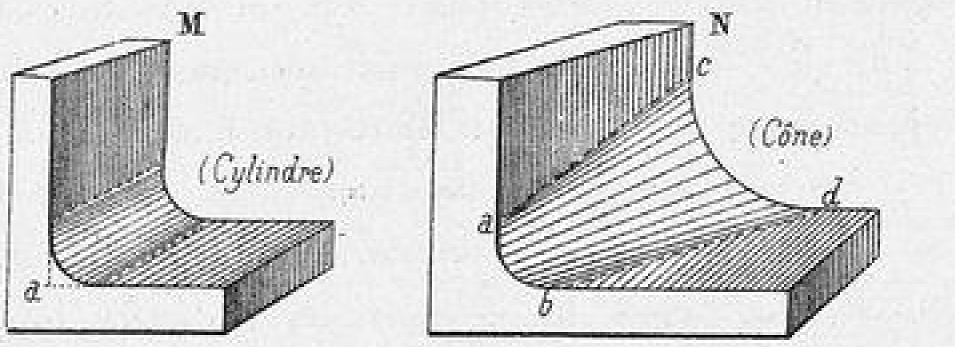
On divisera f m et f n en cinq parties égales, et joignant ces points au centre cela donnera des lignes que l'on considérera comme les lignes de teintes 7.6, 5 et 4 et entre lesquelles on passera les teintes comme l'indiquent les flèches de la figure C.

§ 231. – Raccordement des surfaces – Congés.

Quelquefois en Architecture mais surtout en mécanique, pour les pièces qui doivent être fondues directement, lorsque deux surfaces se rencontrent, au lieu d'accuser leur ligne d'intersection on émousse, pour ainsi dire, cette ligne d'intersection à l'aide d'une surface de raccordement qui prend ordinairement le nom de *Congé*.

Ces surfaces *congés*, sont quelquefois très simples et susceptibles d'être définies géométriquement, mais, le plus souvent, elles sont compliquées et leur définition géométrique est presque impossible.

Fig. 282.



Le congé entre deux plans fig. 282, sera, comme en M, un cylindre, dont les génératrices seront parallèles à l'intersection des deux plans.

On pourrait prendre aussi, comme en N, un cône tangent aux deux plans.

Deux surfaces de révolution ayant même axe se raccorderont par un congé qui sera un tore.

La marche à suivre pour voir le passage des lignes de teintes d'une surface sur l'autre en prenant comme transition le congé est toujours la même. Elle se résume ainsi:

1° On détermine, fig. 283, en d d. f f......., a a les lignes suivant lesquelles se feront le raccordement;

2° On trace les lignes de teintes sur les surfaces à raccorder et on les arrête aux lignes de raccordement. – Il ne reste alors qu'à tracer les lignes sur le congé, c'est-à-dire à relier convenablement les points de mêmes numéros des lignes de raccordement;

3° On se rend compte des lignes de contour apparent du congé et en leur menant des

tangentes à 45° on a des points zéro, d'ombre propre;

4° Cela suffit en général pour permettre de tracer avec une approximation suffisante la ligne zéro du congé; sa direction aide à trouver celle des lignes 1.2.3. etc.... dont on a les points de départ et d'arrivée, là où les lignes de teintes des surfaces données rencontrent les lignes de raccordement du congé.

Remarque. – Si le profil du congé est fourni par des arcs de cercle, dans ce cas le congé et les surfaces sont simplement tangentes mais ne sont pas ce que l'on nomme *osculatrices*; alors les lignes de teintes se rencontrent sur la ligne de raccordement mais ne sont pas tangentes entre elles.

Si le profil du congé est tracé à la main, alors il y a osculation et les lignes de teintes se raccordent. – Nous supposons dans les exemples donnés plus loin qu'il en est ainsi, l'effet produit est meilleur.

Raccordement d'un cylindre et d'un plan.

(Les ombres portées ne sont pas indiquées).

Fig. 283.

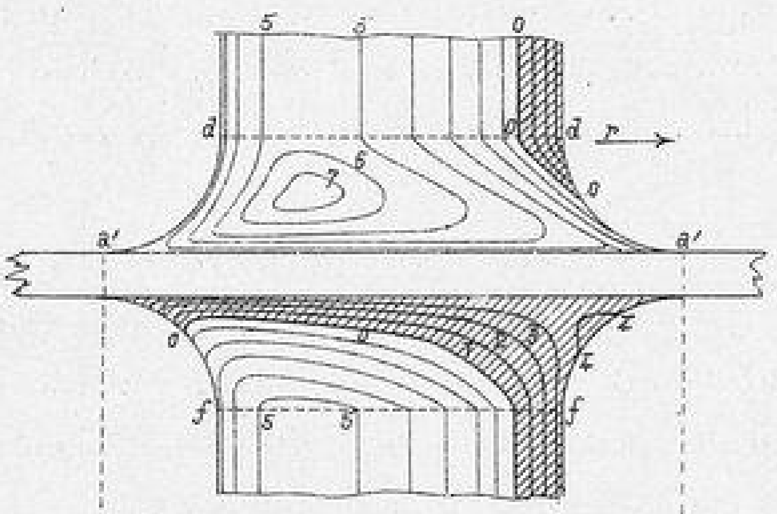


Fig. 283 bis.

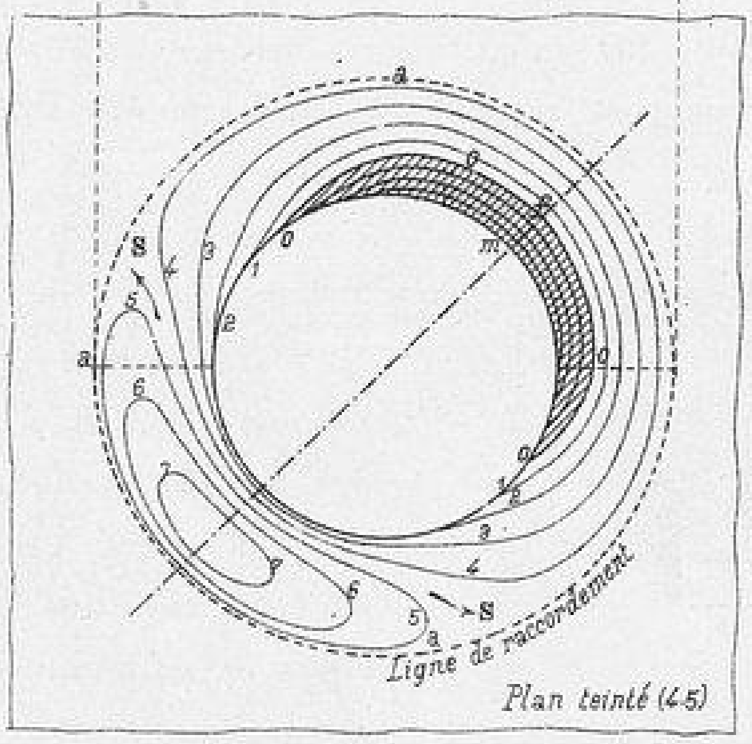
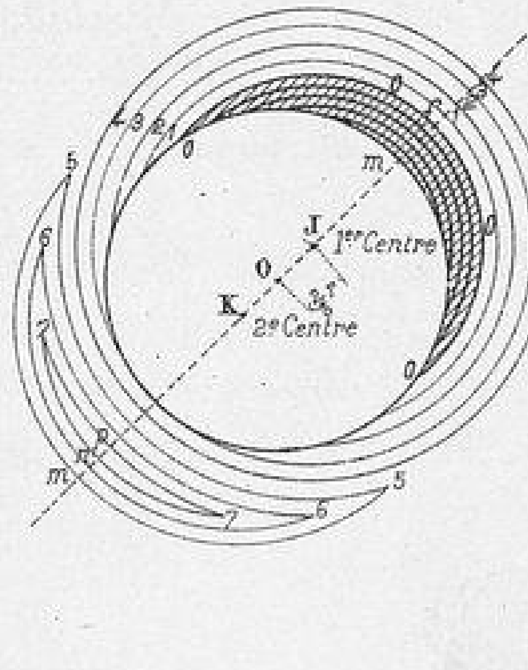


Fig. 284.



§ 232. – Raccordement d'un cylindre et d'un plan.

On remarquera fig. 283 bis sur le plan, que les lignes de teintes du congé ne doivent pas rencontrer la ligne de raccordement a, a, a, qui est ici un cercle. – Cela est naturel puisqu'un plan ayant la même orientation pour tous ses points doit être teinté d'une seule et même teinte.

On voit en S, S, deux espèces d'estuaires par lesquels la zone 4.5, semble se déverser sur le plan, comme un fleuve se déverse dans la mer.

En dessin de machines, sur les portées des boulons, on trace les lignes de teintes d'une manière approchée, en se servant du compas (fig. 284). Ayant remarqué (fig. 283) que la distance mf est sensiblement les 4/10 du rayon du congé, on prend de part et d'autre du centre O et sur la ligne à 45° deux points I et K situés à une distance égale aux 4/10 du rayon.

Du point I comme centre on trace 4 cercles, donnant les teintes positives N^os 1, 2, 3 et 4.

Du côté de la lumière, les courbes ovoïdes

N^os 5 6 et 7. sont obtenues par des arcs de cercles ayant alternativement f et k comme centres.

Au lieu d'être arrondies aux extrémités comme sur la figure 283, elles sont terminées en pointe. Cela ne nuit pas à l'effet produit.

§ 233. – Raccordement de deux cylindres de diamètres différents.

On s'est donné, fig. 285 en élévation et fig. 286, en plan, les profils du congé, lesquels seront pour lui, ses lignes de contours apparents.

Fig. 285.

Elévation

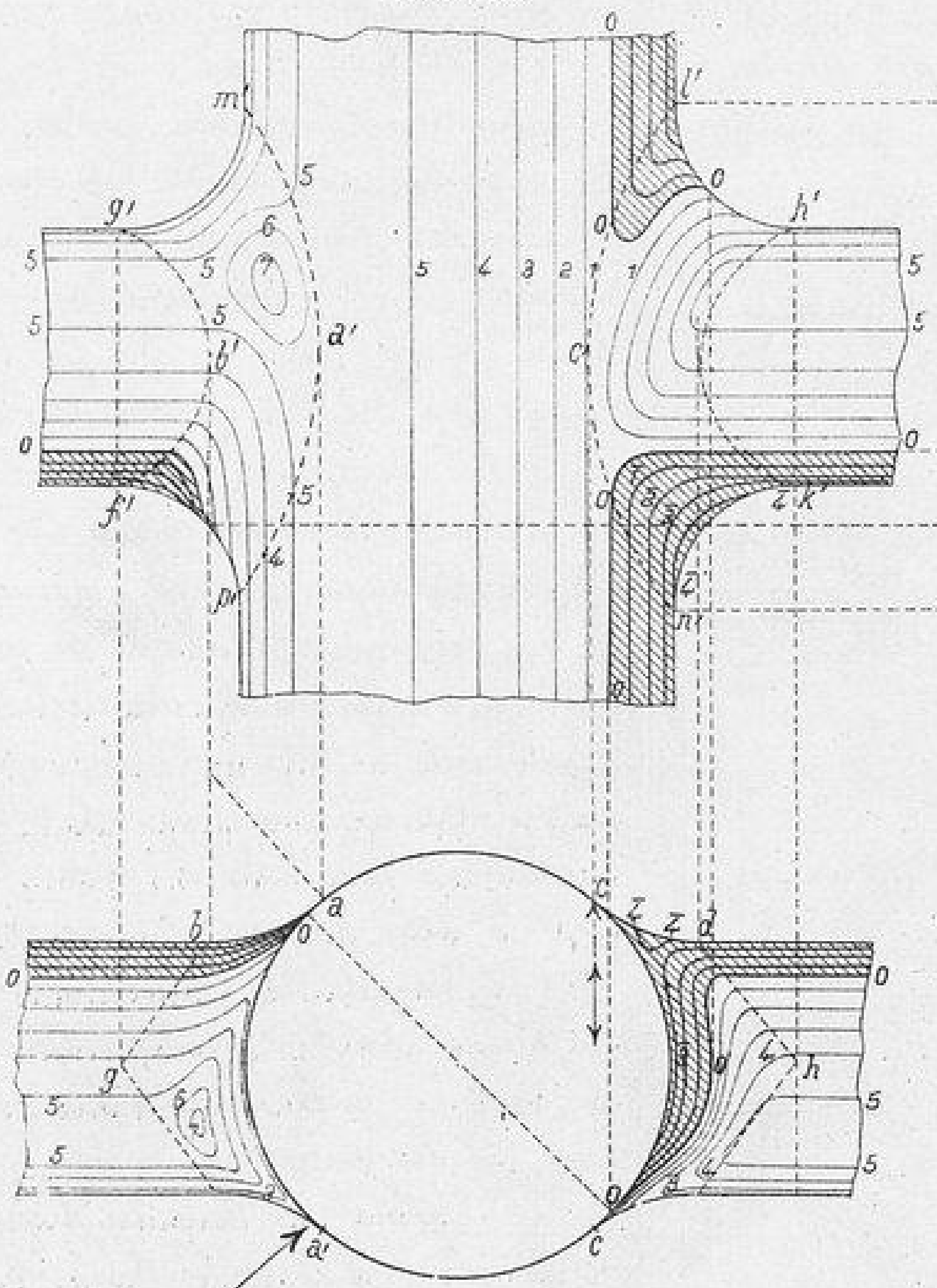
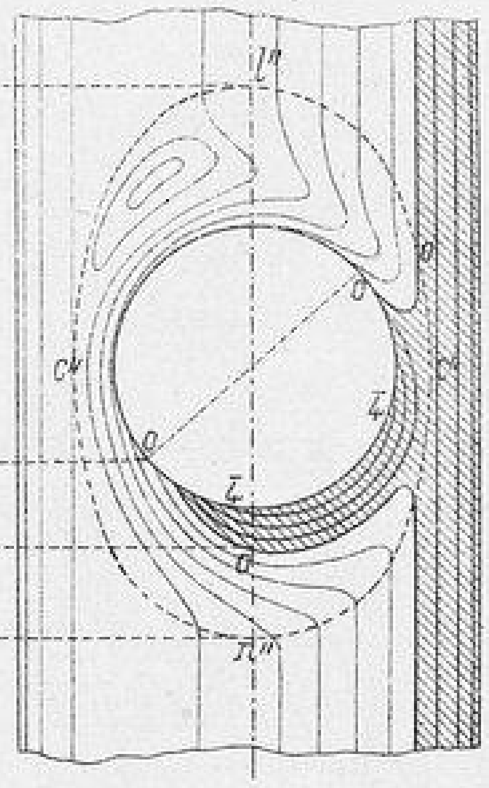


Fig. 286.

Plan

Les ombres portées sont à déterminer.

Fig. 287.



Elévation latérale

Les contacts a et c du plan ramenés en a' et c' et les contacts b g, et d, h, du plan ramenés en g' b' f' – g' d' k' sur l'élévation permettent d'établir approximativement sur l'élévation les lignes de raccordement m' a' p' – g' b' f' etc.... indiquées en pointillé sur le croquis.

L'échelle A' des cylindres mi-polis, a permis de tracer les lignes de teintes des surfaces cylindriques.

Les lignes du congé rejoignent les points dont les numéros se correspondent sur les lignes de raccordement.

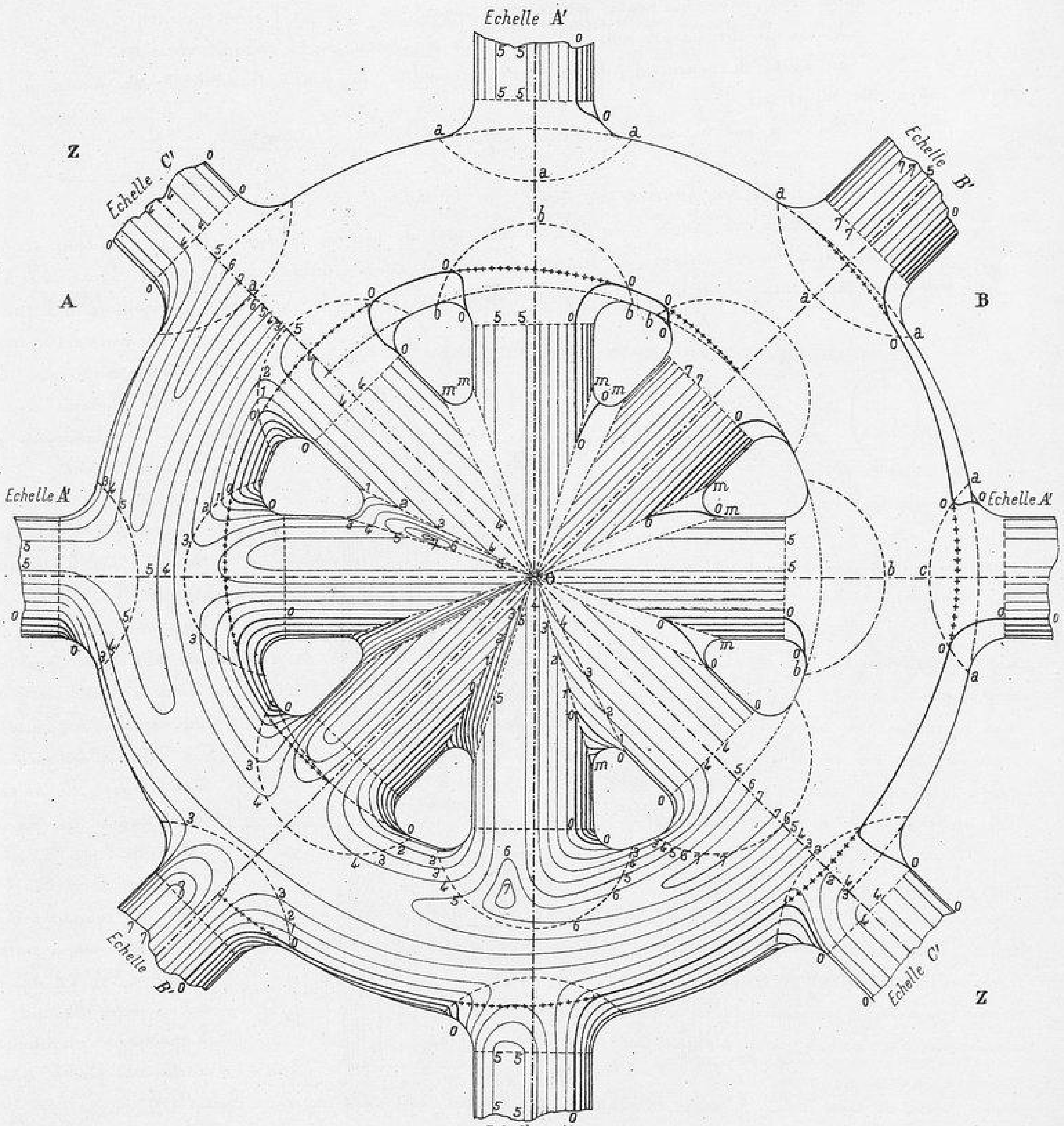
Nota. – On trouvera l'application de cet exemple dans le lavis des robinets.

§ 234. – Raccordements d'un tore et de huit cylindres. (fig. 288).

Un tore est rencontré par 8 cylindres. – Les lignes de raccordement sont, à l'extérieur, les

courbes a, a, a, (on peut prendre en plan des arcs de cercle; mais dans l'espace ce sont des courbes gauches; à l'intérieur, ce sont les courbes b. b. b. et pour le croisement des cylindres entre eux, ce sont des lignes Om, Om, Om, qui sont droites sur le plan, mais qui en réalité sont des ellipses dans

Fig. 288.



l'espace, comme sections planes de ces cylindres. (On aurait pu, pour ces dernières, prendre toute autre ligne).

Les échelles A' B' et C' des corps mi-polis ont permis de diviser les 8 cylindres qui sont en présence. On a donc tracé les lignes de teintes de ces cylindres, mais en les arrêtant aux lignes de raccordement a a a ...... b b b .... et m.m.m.

On a, par les procédés indiqués ci-dessus, §. 326 tracé les lignes de teinte du tore et on ne les a conservées qu'en dehors des lignes de raccordements. On les voit sur le croquis ci-contre, continuées par des petites croix, dans la partie propre aux congés.

Le raccord des lignes entre elles est facile à suivre sur le croquis ci-contre.

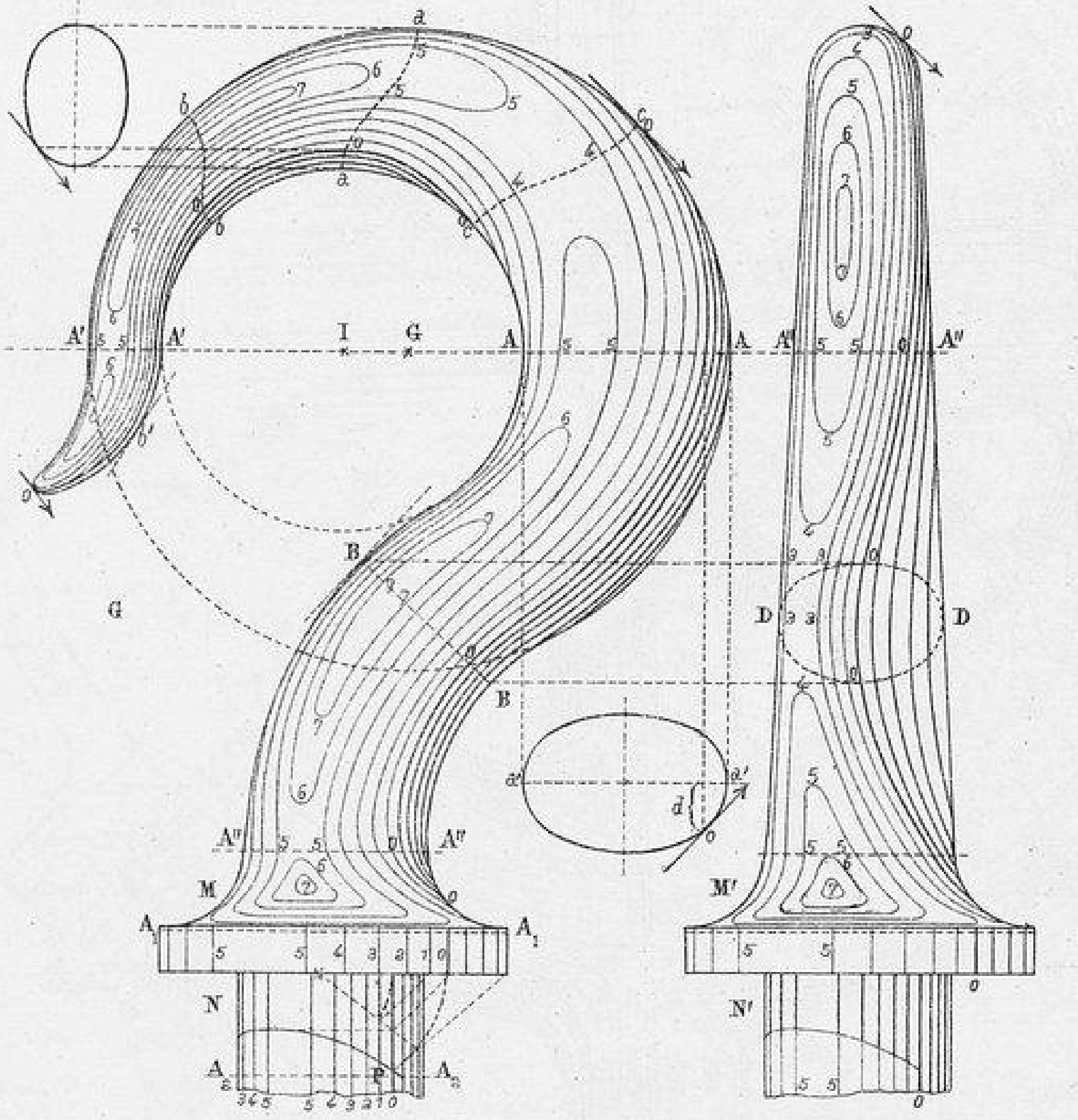
La moitié de gauche A, donne le tracé complet, la moitié de droite B ne donne que l'indication des lignes zéro.

(On n'a pas indiqué les ombres portées).

§ 235. _ Raccordements de tores.

Un crochet de poulie (fig. 289). _ Nous avons en présence plusieurs tores ou fractions de tores qui se succèdent en changeant de section méridienne. Ainsi, tandis que la coupe horizontale A''A'' faite immédiatement au-dessus du congé M, donnerait un cercle, une coupe horizontale A A faite au niveau des centres I et G donnerait la courbe elliptique dont on voit le rabattement en a'a' au-dessous.

Fig. 289. Fig. 290.



Comme toujours on détermine d'abord, et même sans le secours des échelles, les lignes zéro en ayant soin de les faire passer par les points de tangence à 45° sur les contours apparents.

Quant à l'application des échelles, elle ne peut plus se faire très rigoureusement sur le crochet.

Ainsi l'échelle A' (dite des cylindres verticaux) s'applique, par à peu près, en A A - A'A' - A''A'', mais sur un profil elliptique. Le point zéro est déterminé exactement par le tracé

de l'ombre propre, mais les autres points ne le sont qu'à vue d'œil. L'échelle ne s'applique plus. Néanmoins on placera les points au sentiment sachant toujours que l'on ne doit pas dépasser le numéro 5 et que le milieu des sections doit être compris entre 4 et 5 (Zone α).

En menant des tangentes horizontales aux points a et a, et joignant a a par une ligne que nous prendrons comme ligne conventionnelle de contact d'un cylindre horizontal circonscrit, nous disposerons aussi sur cette ligne des numéros analogues à ceux de l'échelle A'.

L'échelle B' (dite des cylindres à 45°, en lumière) trouvera son application en B B et en b b (cette dernière ligne de contact n'est pas droite); nous aurons soin d'y placer tous les numéros jusqu'à 7 et de faire en sorte que le milieu de la ligne soit compris entre 4 et 5 (Zone α).

Enfin l'échelle C' (dite des cylindres à 45° en demi-teinte) trouve son application sur la ligne courbe c c.

Il est inutile d'insister; le croquis donne les indications nécessaires pour achever le tracé.

Applications
au dessin d'Architecture et au dessin de machines.

§236. – Des reflets dans le dessin d'architecture.

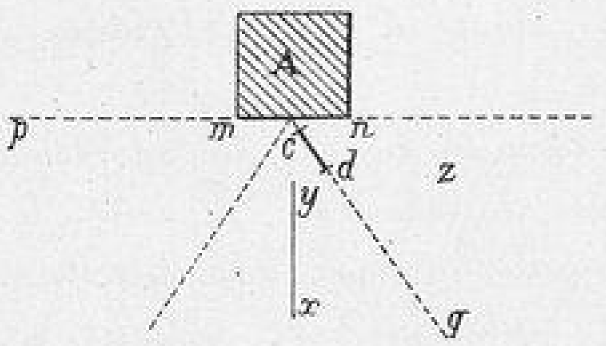
En architecture, les édifices reposent sur le sol, qui est fortement éclairé, et souvent de couleur claire et qui donne des reflets violents. Les reflets atmosphériques doivent donc être combinés avec les reflets émanant du sol. Ces derniers sont même les plus intenses.

Cherchons à nous rendre compte de la direction suivant laquelle ils ont le plus d'intensité.

Cette direction combinée avec celle du rayon atmosphérique principal nous donnera celle des rayons de reflets résultants.

(a) *Rayon terrestre principal.* – Soit en projection horizontale A fig. 291 un édifice rectangulaire, reposant sur un sol mat, éclairé et renvoyant de la lumière par diffusion et non par réflexion, comme pourrait le faire une nappe d'eau.

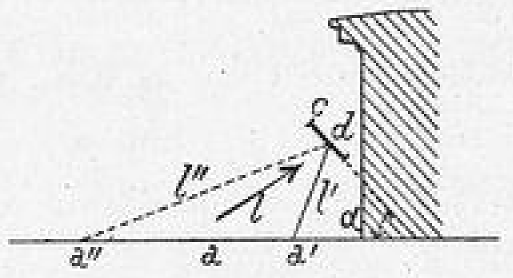
Fig. 291.



Il est évident que si nous plaçons un petit élément plan vertical c d, dans une position inclinée sur la face m n de l'édifice, il ne recevra de reflets que des points du sol situés dans l'angle p c q, car il ne peut pas recevoir de reflets de la partie du sol z qui est située derrière lui. Il sera donc d'autant moins reflété qu'il sera plus loin d'être parallèle à la face m n. On peut donc dire que le *Rayon terrestre principal* c'est-à-dire le rayon fictif qui à lui tout seul donnerait à peu près les mêmes effets que l'ensemble des rayons qui viennent de tous les points du sol, doit être dans un plan vertical, x y, perpendiculaire sur la face m n de l'édifice.

Quel angle, avec le plan horizontal, fait-il dans ce plan? – Pour nous en rendre compte, faisons une coupe verticale sur l'édifice, fig. 292.

Fig. 292.



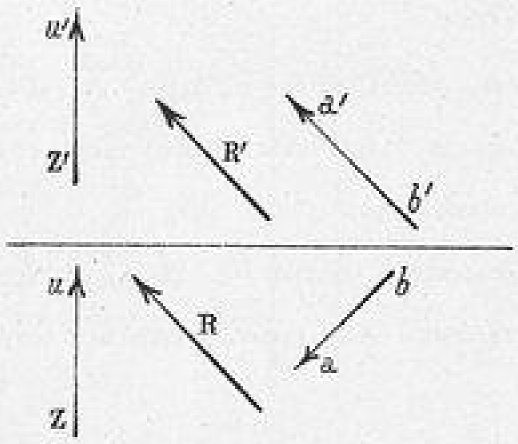
Un petit élément plan cd, incliné à l'angle α, reçoit de la lumière d'une infinité de points, tels que a' a a'' situés à des distances l' l l''. Ces points lui envoient de la lumière dont l'éclairement varie: 1° avec l'angle d'incidence; 2° avec la distance (loi de l'inverse du carré de la distance). – En combinant tous ces effets, il sera facile de reconnaître:

1° que l'élément cd sera plus éclairé quand il sera près du sol que quand il en sera loin.

2° Qu'il sera éclairé au maximum quand il fera avec le sol un certain angle α que le calcul pourrait déterminer. Le rayon de reflet maximum dû au sol, c'est-à-dire ce que nous nommerons le rayon terrestre *principal*, sera pris normal au plan cd, dans la position précédente, répondant à cet angle α d'éclairement maximum.

(b) Combinaison des reflets du sol et des rayons atmosphériques. – Rayon aéro-terrestre principal. – Combinons (fig. 293) les reflets du sol représentés par le rayon terrestre Zu – Z'u', situé dans un plan de profil Zu et dirigé de bas en haut, avec le rayon atmosphérique principal représenté par ba – b'a' (dans l'hypothèse du rayon à 45°). Le premier est plus intense que le second, et on pourra les réunir en un seul RR' que nous nommerons le rayon aéro-terrestre principal. On le prend ordinairement, en architecture, dirigé suivant une diagonale du cube de lumière mais ce n'est pas celle qui est directement opposée aux rayons solaires. On prend le rayon aero-terrestre incliné à 45°, dirigé de droite à gauche, de bas en haut et d'arrière en avant. Les projections d'un de ces rayons seraient les droites R et R'.

Fig. 293.



Remarque. – Il est bien entendu que ce rayon aéro-terrestre n'est que conventionnel; c'est un rayon qui, pris seul, éclairerait les ombres à peu près comme le font tous les rayons de reflets qui viennent dans toutes les directions, avec des intensités variables. – Il faudra bien se garder de lui donner des propriétés ombrantes (Voir plus loin § d, contre-ombres).

(c) Conséquences. – 1° Dans un dessin d'architecture représentant la façade ou la coupe d'un édifice, toutes les ombres doivent être plus claires en bas de l'édifice qu'en haut, comme étant plus près de la source des reflets.

2° Les moulures qui dans l'ombre sont tournées du côté du sol doivent être moins noires que celles qui sont tournées du côté du ciel. – Plus généralement, le point le plus clair d'une moulure placée dans l'ombre, est celui pour lequel le rayon aéro-terrestre lui est normal.

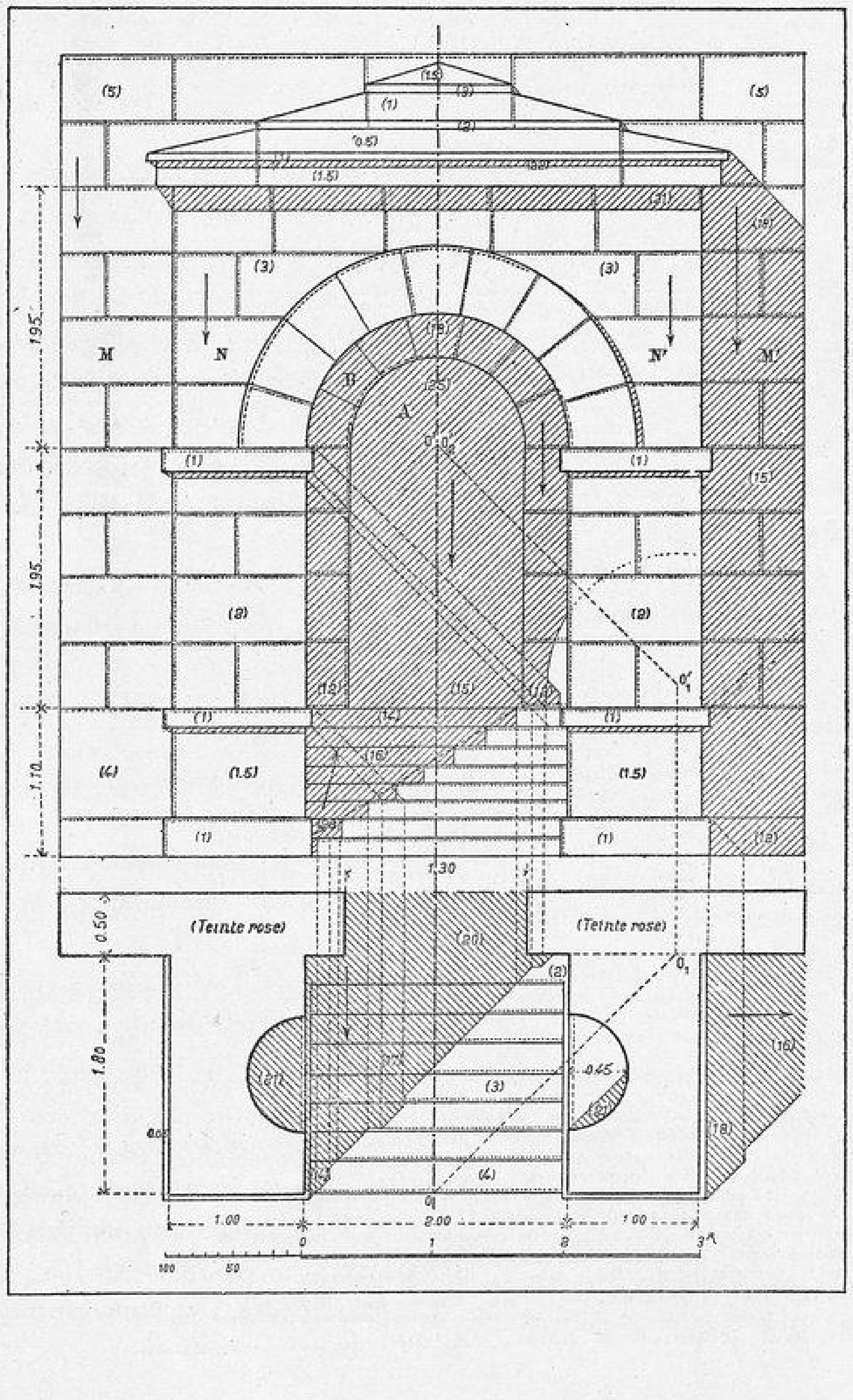
(d) Contre-ombres. – Les reflets du sol sont quelquefois assez intenses pour produire des ombres dans les ombres. On nomme ces dernières des *contre-ombres*. On ne les trace que dans les ombres portées en les supposant produites par le rayon aéro-terrestre principal, tel que nous venons de le définir. Seulement, il ne convient pas de donner à ces contre-ombres des contours aussi définis qu'aux ombres directes, ni de les prolonger aussi loin. En effet, les reflets qui viennent de tous les points du sol produisent des pénombres très considérables qui font que

les contre-ombres disparaissent à très petite distance des objets qui les portent et que leurs contours s'estompent très rapidement. On fait ordinairement les contre-ombres à l'aide de teintes très rapidement adoucies ou fondues (Voir plus loin fig. 299 lavis d'un entablement).

§ 237. – Application au rendu d'un porche (fig. 294). – 1er Exercice de Lavis.

Nous donnons cet exemple comme application du principe des distances : le fragment d'édifice représenté ne comporte que des plans de front situés à des distances différentes.

Fig. 294.



Le dessin sera exécuté sur une feuille 1/4 grand aigle (Cadre 240mm x 400mm – Marge 10mm) à une échelle qui sera le double de celle du croquis ci-joint, c'est-à-dire de 0m,04 pour 1 mètre.

Marche à suivre:

(a) Dessin. – Dessiner les arêtes à l'encre, avant de commencer le lavis (Trait assez gros d'encre de Chine). Les lignes d'ombre, les filets de lumière et les filets de reflet au crayon (N° 3 trait fin). – Le rayon lumineux direct (R, R') est incliné à 45° suivant l'usage.

(b) Ombres. – Préparer dans un godet la teinte d'ombre (Teinte d'encre de Chine, gris peu foncé, transparence 2/3) et passer cette teinte sur toutes les surfaces dans l'ombre, sans exception. Au préalable donner un coup d'éponge; tamponner la feuille avec un linge sec et passer la teinte tandis que le papier n'est pas encore complètement sec. – Ne ménager avec cette teinte aucun filet

de reflet. Ces derniers n'apparaîtront qu'avec les teintes d'ombres portées et de contre-ombres.

(c) *Teintes locales.* — Il n'y aura qu'une seule teinte locale devant figurer la pierre. Prendre soit une teinte légère d'ocre jaune mêlé d'un peu de carmin, soit une teinte légère d'encre de Chine. — Passer cette teinte sur toutes les surfaces, qu'elles soient dans l'ombre ou dans la lumière, en premier ou en second plan. — Ménager tous les filets de lumière dans les premiers plans (N, N). Ne pas les ménager dans les seconds plans (M, M). Ne pas s'occuper encore des filets de reflet dans les ombres.

Pour faire avancer les premiers plans et les détacher en clair, passer un glacis (teinte extrêmement faible d'encre de Chine) sur les seconds plans tels que M et M'; en passant ce glacis, ménager alors les filets de lumière du second plan.

Le principe est le suivant:

Principe. — Toute surface dans la lumière, si sa teinte locale est claire, doit être d'autant plus claire qu'elle est plus près de l'œil. — Si la teinte locale était foncée de sa nature (ardoise, fonte, granit .....) ce serait le contraire. — On suppose ici que la pierre est d'un ton jaune clair.

Les filets de lumière sont sur les arêtes supérieures et sur celles de gauche des surfaces éclairées. Les filets de reflet sont sur les arêtes inférieures et sur les arêtes de droite des surfaces dans l'ombre, c'est-à-dire sur les arêtes qui porteraient ombre si elles étaient éclairées.

(d) *Ombres portées. — Principe.* — Toute surface dans l'ombre est d'autant plus noire 1° qu'elle est plus près de l'œil; 2° qu'elle est plus loin du sol, qui est la source principale des reflets; 3° qu'elle est plus étroite et qu'elle se détache sur un fond plus clair (Effet d'irradiation et de contraste).

En conséquence: 1° Les teintes d'ombre du second plan M et M' seront plus claires que celles du premier N; 2° Les grandes ombres verticales, telles que A, B et M', seront dégradées de haut en bas.

Exécution. — Prendre une teinte de contre-ombre, plus foncée que la première teinte d'ombre et la passer, en ménageant alors les filets de reflets.

Nota. — 1° Les flèches tracées sur le croquis ci-joint, indiquent le sens de la dégradation des teintes. La pointe se dirigeant vers la zone la plus claire.

2° Les numéros placés entre parenthèses sur les divers points du croquis indiquent d'une manière approchée les intensités des teintes qui doivent recouvrir les surfaces situées autour de ces points.

Exemple: (1) Indique une teinte très légère, presque de l'eau pure — (12) une teinte moyenne entre le blanc et le noir absolus — (21, 22) un gris très intense — (25) une teinte presque noire.

§ 238. — *Application au rendu des moulures cylindriques.* — 2e exercice de Lavis.

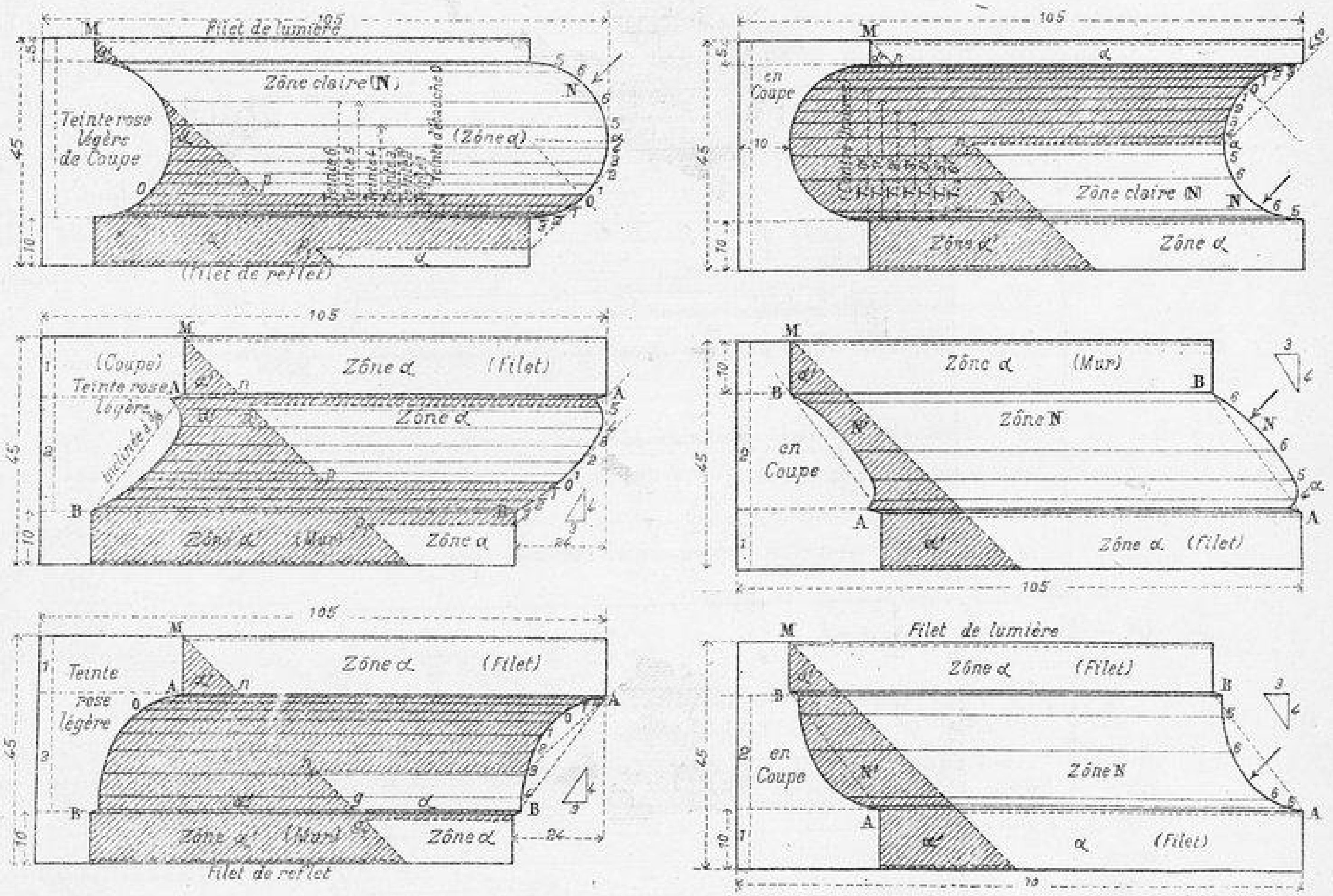
(a) *Trait.* — Les cotes sont données en millimètres sur les croquis ci-joints. Les chiffres tels que 1, 2, marqués sur les côtés, entre deux lignes verticales sont des nombres proportionnels qui indiquent les proportions en hauteur des différentes parties. (fig. 295 et 296).

Les triangles ◸ ou ◹ indiquent, par leurs hypothénuses, la pente générale des profils (lignes telles que AB, AB joignant le point saillant au point rentrant).

Le rayon lumineux est à 45° suivant l'usage.

Les lignes d'arêtes ou de contours seront tracées à l'encre de Chine (trait de grosseur moyenne et pas très noir). Les lignes d'ombres et les lignes de teintes seront faites au crayon (trait fin - crayon N°3).

Fig. 295.



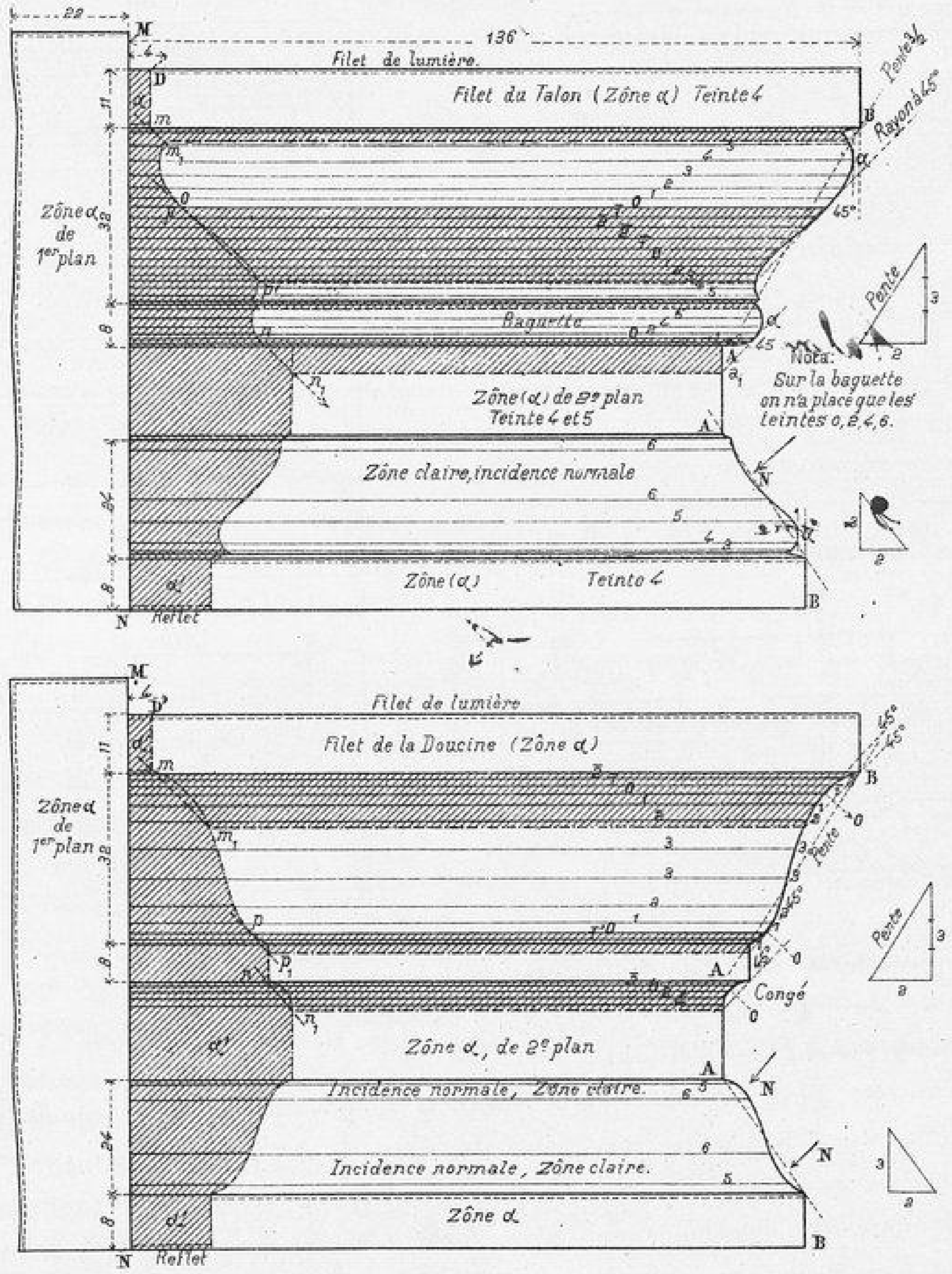
On tracera légèrement les lignes de teintes dans la lumière ainsi que les filets de lumière et de reflets. Les lignes situées dans les ombres propres ($\bar{1}, \bar{2}, \bar{5}$) et surtout dans les ombres portées seront plus accusées. Le croquis ci-joint indique ces différences.

(b) *Tracé des lignes d'ombres et de teintes.* — La première moulure (baguette ou gorge) est formée par un demi-cylindre de révolution, plein ou creux. C'est à elle que l'on rapportera toutes les autres, en y comparant les orientations des plans tangents. On suppose que les moulures sont en pierre dépolie. Un cylindre de révolution, circonscrit à une sphère dépolie (Voir les surfaces dépolies) pourrait à la rigueur, ainsi que nous l'avons dit, ne se diviser qu'en 4 zones bien distinctes : 1° *Zone d'ombre propre*, commençant à la ligne N° 0 et comprenant les teintes négatives $\bar{1}.\bar{2}.\bar{3}$ répondant au rayon lumineux tangent à 45°. — 2° *Zone claire* ou zone N, comprise entre les lignes 7.7, ou à la rigueur 6.6; répondant au rayon lumineux normal. — 3° *Zone saturée* ou zone α, comprise entre les teintes 4 et 5, et sur laquelle on doit trouver, dans toute sa pureté la teinte locale de couleur de l'objet. Elle répond, par convention à un plan tangent de front, c'est-à-dire à une tangente verticale menée en α aux profils. — 4° *Zone de transition* ou de demi-teinte, comprenant les lignes 2.3, et qui seront recouverte d'une teinte grise, formant

transition entre l'ombre et la couleur.

Pour des moulures dessinées à petite échelle ces 4 zones suffiraient en 3 teintes, savoir : (a) la teinte d'ombre, (b) la teinte de couleur, (c) la teinte de transition, permettraient d'en rendre le modelé.

Fig. 296.



Dans le cas actuel, l'échelle assez grande des dessins permet de se servir de 6 lignes de teintes.

On divisera d'abord les 2 premières moulures (baguette et gorge). On pourra se servir de l'échelle A, corps dépolis fig. 263).

Pour les autres on procédera comme il suit :

1° On mènera toutes les tangentes à 45°. Les contacts donneront les lignes N° 0.

Les unes <u>réelles</u>, si le profil est convexe, les autres <u>virtuelles</u>, si le profil est concave.

Ces dernières seront noyées dans une ombre portée par la moulure sur elle-même.

2° On mènera les tangentes verticales. Les points de contact α, devront être compris entre les lignes N° 4 et N° 5. — Entre 0 et α on placera donc, au jugé, les points 1, 2, 3, 4. De l'autre côté des points N° 0, on placera les points négatifs $\bar{1}$, $\bar{2}$, et s'il y a lieu $\bar{3}$.

3° On tracera les normales à 45° (s'il y en a). Les points d'incidence normale seront les centres approchés des zones claires 6.6.

(C) *Exécution du Lavis*. — (Voir plus haut, pratique du Lavis, d'ailleurs les flèches indiquées sur la baguette et sur la gorge indiquent l'ordre de passage des teintes). — Pour les contre-ombres ne pas oublier ce principe.

une zone dans l'ombre portée, doit être d'autant plus foncée qu'elle eût été plus claire sans l'existence de l'ombre portée.

(d) *Observations.* — 1° La 1ère teinte d'ombre dite teinte d'ébauche, se passe sur toutes les ombres indifféremment (ombres propres et ombres portées) sans ménager les filets de reflets, lesquels n'apparaîtront qu'avec les teintes de contre-ombre, 6', 5', etc.

2° Les premières teintes 0, 1, 2, 3, 4, sont des teintes d'encre de Chine de plus en plus faibles. La dernière doit être très légère.

Les teintes 5 et 6, sont des teintes de couleur (ocre jaune très dilué et un peu de carmin).

(e) *Nota.* — Ces teintes (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) qui, dans les lumières, et dans les ombres propres se passent en empiétant successivement les unes sur les autres, doivent, toutes, recouvrir en entier les ombres portées.

3° Les teintes de contre-ombre, 6', 5', 4', ... sur les cylindres, se passent en recouvrement les unes sur les autres, et exclusivement dans les ombres portées. — Aucune d'elles ne doit atteindre de ligne négative. — La dernière vient se limiter à la ligne N° 0.

4° Les ombres portées sur les surfaces planes se font, en dernier lieu et par une seule teinte, composée exprès, de manière à donner à ces surfaces planes l'intensité des zones, qui, sur les cylindres, ont les mêmes orientations qu'elles. C'est alors que l'on ménage les filets de reflets et que l'on tient compte, dans une certaine mesure, des effets de distance. — On ne doit mettre aucun trait de force.

§239. — Rendu des moulures annulaires.

Si l'on fait tourner autour d'un axe l'un des profils de moulures étudiés ci-dessus, on engendre des surfaces de révolution qui constituent des moulures annulaires.

Fig. 297.

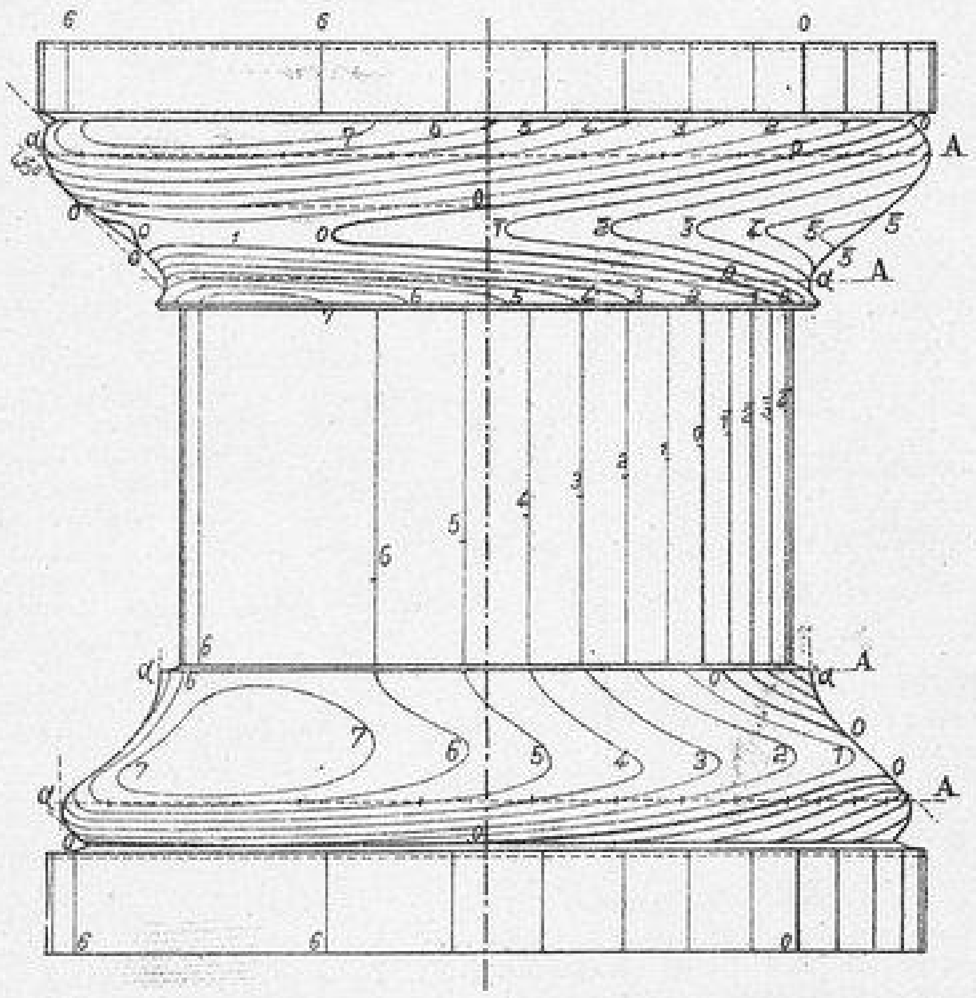
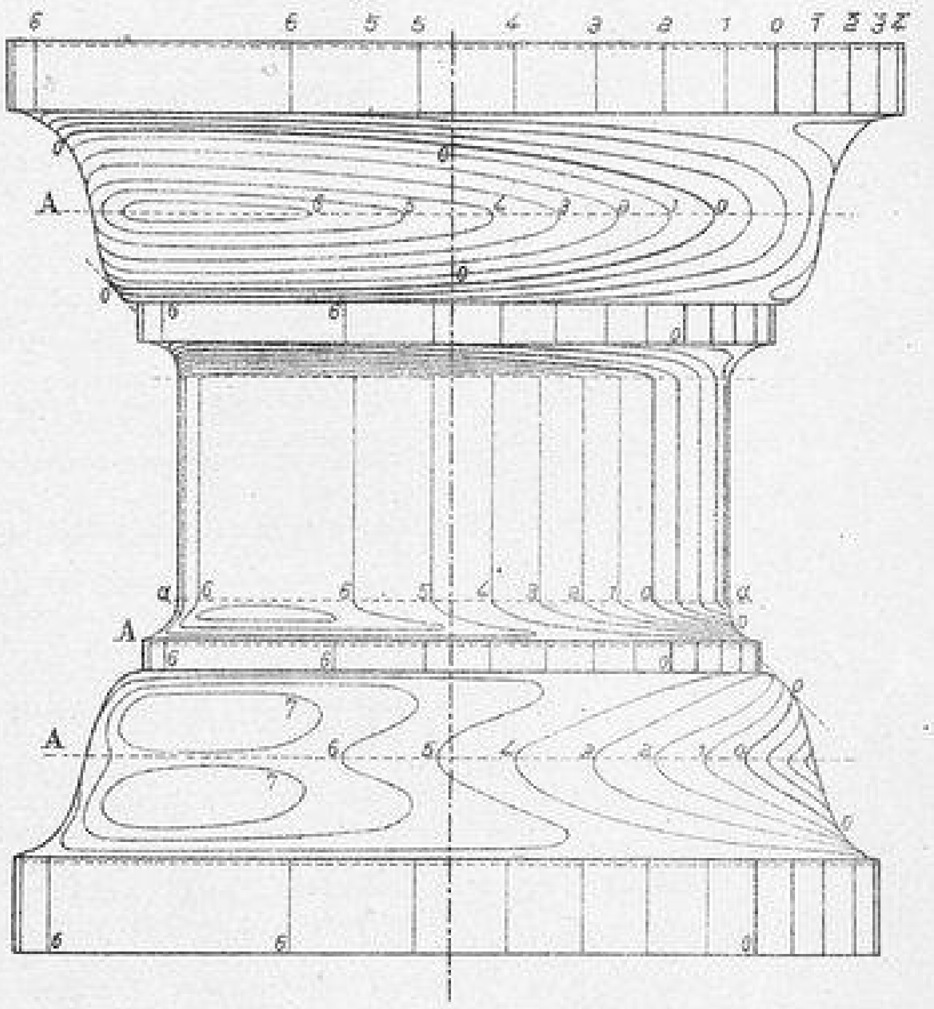


Fig. 298.



La figure 297 représente un talon annulaire droit et un autre renversé. La figure 298 figure une doucine annulaire dans les deux positions, droites ou renversées.

Ces moulures se rencontrent dans les colonnes, dans les vases, dans les balustres, etc......

Nous avons mené aux profils les tangentes verticales aux points marqués α, α.... et le long des parallèles qui répondent à ces points on pourrait circonscrire des cylindres verticaux (Échelle A).

Nous avons donc appliqué sur tous ces parallèles l'échelle A (corps dépolis) et cela nous a suffi pour tracer les lignes de teintes.

On aura toujours soin, dans un cas analogue, de mener aux profils les tangentes à 45°, ce qui donne des points zéro de contour apparent, et de commencer par tracer les séparatrices d'ombre propre (lignes N° 0) réelles ou virtuelles.

Nota. - Sur les croquis ci-joints nous n'avons pas indiqué les ombres portées. - On les tracera par les méthodes données dans la première partie (Ombres usuelles).

§ 240. - Rendu à l'effet d'un fragment d'architecture (Teintes plates ou fondues)

Nous prendrons, fig. 299, comme exemple, l'entablement dont nous avons donné le croquis plus haut, et qui appartient à l'édicule connu sous le nom de Tribunes des Cariatides, à Athènes. La marche à suivre est toujours à peu près la même ; nous la résumerons comme il suit :

(a) *Teinte de pierre.* - Cette teinte doit avoir une couleur en rapport avec la nature de la pierre. Quelques aquarelles exécutées d'après nature, en apprendront plus sur ce point que tout ce que l'on pourrait dire. - Néanmoins, pour le fragment en question, qui est en marbre pentélique, d'une coloration jaune doré très prononcée, on rendra l'effet par une teinte d'ocre jaune additionnée de terre de sienne brulée ou de pierre de fiel.

On la passera en la dégradant de haut en bas, c'est-à-dire en la tenant plus intense à la partie supérieure. On aura soin de ménager en blanc les filets de lumière sur les arêtes éclairées. On ménagera aussi et même d'une façon un peu heurtée, cela n'a pas d'inconvénient avec la couleur jaune, toutes les zones éclairées des moulures (zones 7, 7), à la condition toutefois qu'elles soient en lumière, car nous savons que si elles sont dans l'ombre, loin d'être les plus éclairées, elles seront les plus obscures.

(b) *Teinte générale d'ombre, ou teinte d'ébauche.* - On lui donnera le ton voulu pour être en rapport avec la teinte de pierre. C'est encore l'étude d'après nature qui permettra de bien choisir le ton des ombres. Dans le cas actuel on fera bien de prendre l'encre de Chine pour fond des teintes d'ombres, mais on pourra lui donner une couleur plus légère, en quelque sorte plus aérienne, en y ajoutant un peu de laque carminée ou de bleu de cobalt.

Cette teinte sera passée, sans faire aucune réserve de filets de reflets, sur toutes les ombres propres ou portées, sans distinction.

On la commence à la partie supérieure du dessin, on la descend et tout en la descendant on la dégrade en y ajoutant peu à peu, de l'eau.

Cette teinte d'ébauche ne doit pas être très forte. Elle doit posséder le ton que l'on veut attribuer, dans les ombres, aux parties les plus en reflet. Ces parties sont les dessous des talons, l'ombre propre des baguettes ...... etc.... En un mot toutes les zones négatives 3, 4 .... des moulures.

(c) *Modelé des moulures.* - On s'occupe alors du rendu des moulures, parce que en chaque point

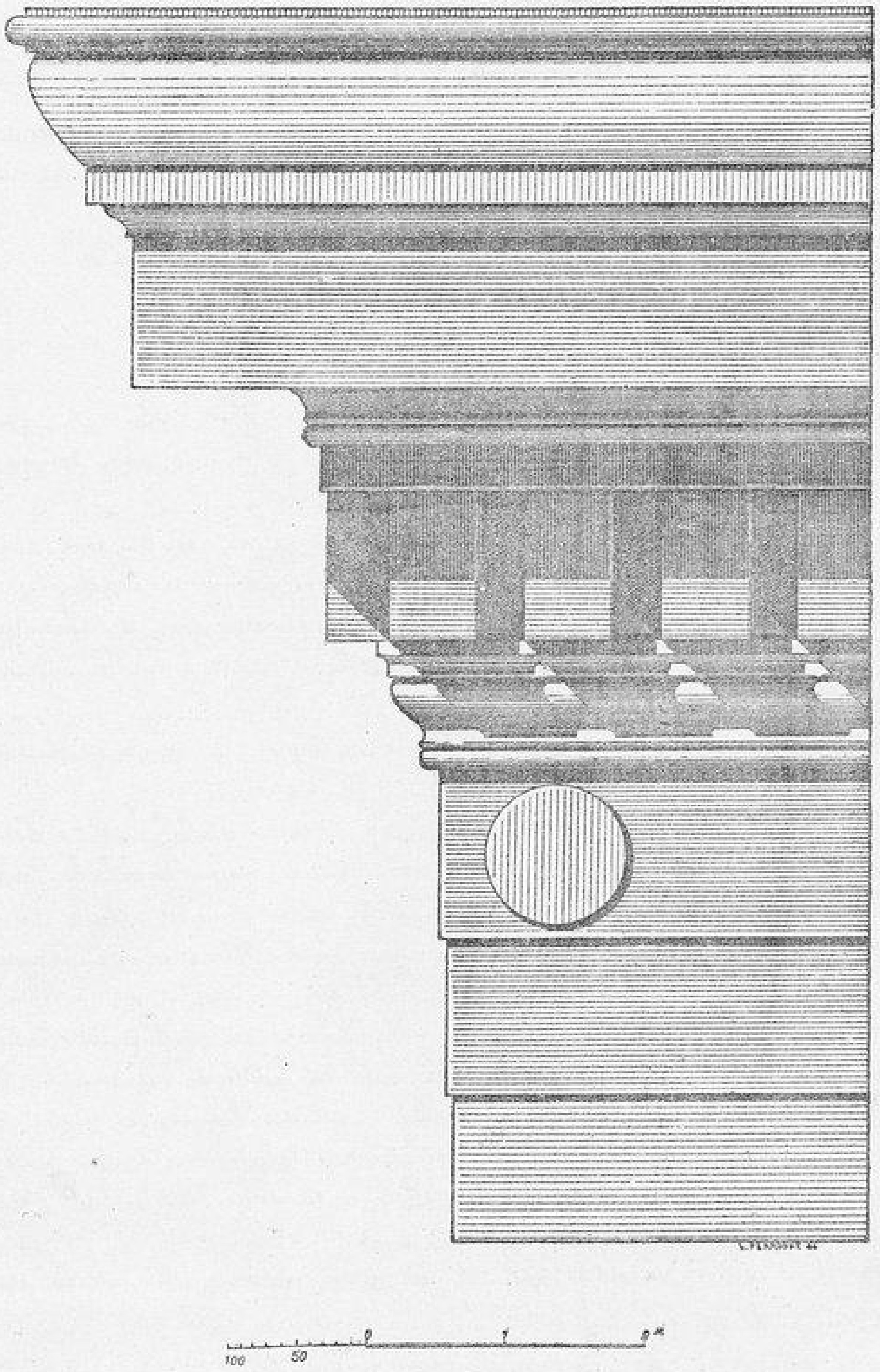
ce sera la moulure qui s'y trouve qui donnera la valeur de la teinte à appliquer sur les plans qui sont aux environs.

Nous avons appris à laver les moulures à teintes plates, ce qui nous renseigne sur l'effet à obtenir dans le cas où l'on opèrerait à teintes fondues ou adoucies (Voir pratique du Lavis). On observera bien le principe des ombres portées.

(d) *Tons locaux des surfaces planes.* – Nous trouvons des surfaces planes à différentes hauteurs et à différentes profondeurs; mais nous avons toujours une ou deux moulures placées à côté d'elles, soit au-dessus, soit au-dessous, et qui ont été terminées, comme lavis, dans l'opération précédente.

Fig. 299.

Entablement de la tribune des cariatides.



On sera donc fixé sur le ton, soit d'ombre, soit de couleur, qui convient à ces plans, en cherchant sur les moulures le ton de la zone de même orientation. Ici ce sera, pour tous les plans, la zone des plans de front ou zone α, soit dans la lumière soit dans l'ombre; mais s'il y avait eu des plans inclinés on aurait trouvé, comme analogues, d'autres zones sur les moulures. Une fois l'analogie d'orientation reconnue, on place sur les plans les teintes voulues pour qu'il y ait concordance d'intensité.

Ces teintes sont passées en réserve, c'est-à-dire en ménageant les filets de reflets sur les arêtes qui regardent le rayon aéro-terrestre.

(e) *Contre-ombres.* – On se rappelle que ce sont les ombres portées dans les ombres par le rayon aéro-terrestre. –

On les voit, à gauche des modillons, où elles s'accusent par des lignes à 45°, issues des angles inférieurs tels que a, a..... Nous avons recommandé de les faire à teintes rapidement fondues, en plaçant la partie la plus noire immédiatement à côté de la partie qui porte contre-ombre.

(d) Retouches. – Le lavis général une fois fini il est utile, pour augmenter l'effet produit, de revenir avec de la teinte de couleur ou de la teinte d'ombre sur certaines parties soit pour les faire tourner davantage soit pour les faire avancer ou reculer.

On fait avancer les parties en lumière en y plaçant quelques tons plus chauds, c'est-à-dire plus jaunes ou plus rouges; on fait avancer les parties dans l'ombre en forçant la teinte d'ombre et même en la colorant en bistre (Sépia et terre de Sienne brûlée).

On fait reculer les plans en y passant des teintes très légères, bleuâtres ou neutres. On nomme ces teintes des *glacis*.

On fait également avancer une partie de l'édifice en la faisant davantage c'est-à-dire en y plaçant plus de détails et rendant avec plus de recherche l'effet de ces détails. On la fait reculer en la laissant dans le vague comme dessin et comme lavis.

Dessin de Machines.

§241. – Un verin à vis.

Cet appareil sert à soulever de lourds fardeaux. On l'emploie assez souvent pour supporter les cintres des ponts.

La figure 300 donne à droite une demi-élévation et à gauche une demi-coupe. On remarquera cependant que, suivant un usage adopté en dessin de machines, la vis centrale n'est pas coupée, parce qu'elle est pleine. Cependant, on a coupé par arrachement la tête de la vis pour montrer la forme exacte des cavités cylindriques dans lesquelles on introduit les barres de fer qui servent à la manœuvre.

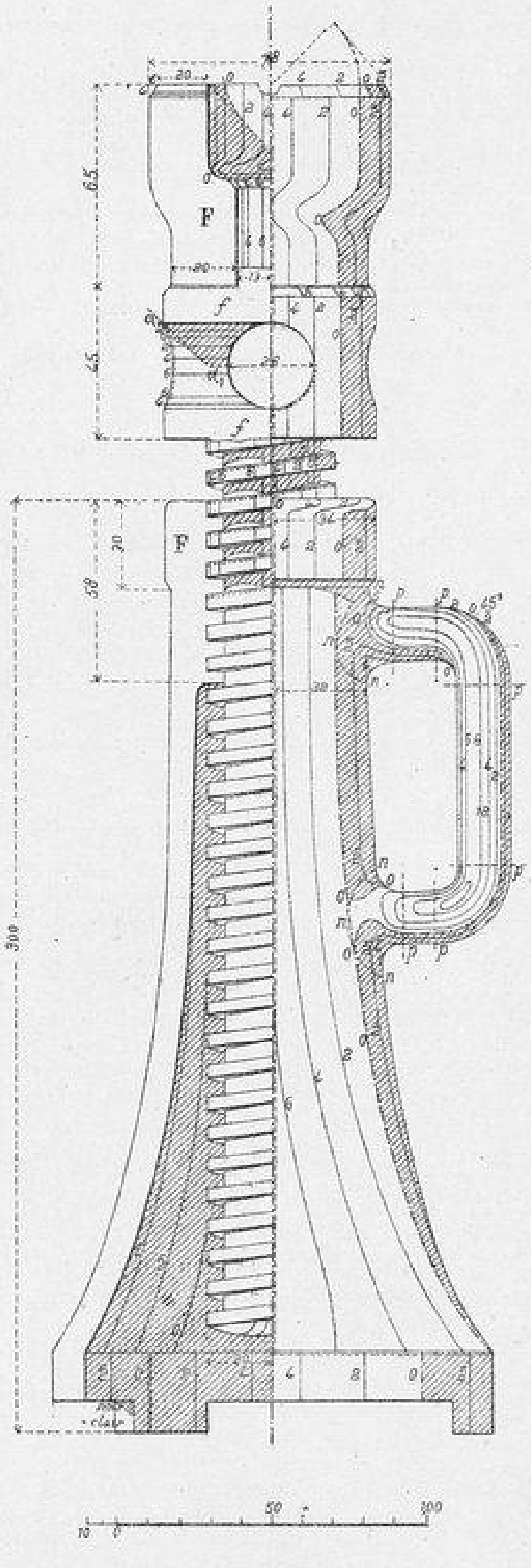
Il est inutile d'indiquer le tracé des lignes de teintes; ce qui a été dit précédemment pour l'emploi des échelles doit suffire.

Observations: 1° Le croquis d'autre part étant à petite échelle nous n'avons indiqué les lignes de teintes que de deux en deux (Teintes 0, 2, 4, 6) c'est même pour cela que nous avons été amenés à placer sur les cylindres une ligne N° 6 tandis que l'échelle A' des corps mi-polis ne s'étend que jusqu'au N° 5. Cela prouve combien il y a de latitude dans l'emploi de ces échelles.

Le dessinateur qui aura d'abord exécuté quelques lavis en appliquant strictement les échelles, devra plus tard, lorsqu'il sera familiarisé avec la position et avec la forme des zones claires ou brillantes, lorsqu'il connaîtra le mouvement des lignes de teintes ne plus en faire usage. C'est alors seulement qu'il fera bien d'exécuter les lavis à teintes fondues parce que ce n'est qu'à ce moment qu'il connaîtra les effets à produire et le sens dans lequel il doit fondre les teintes.

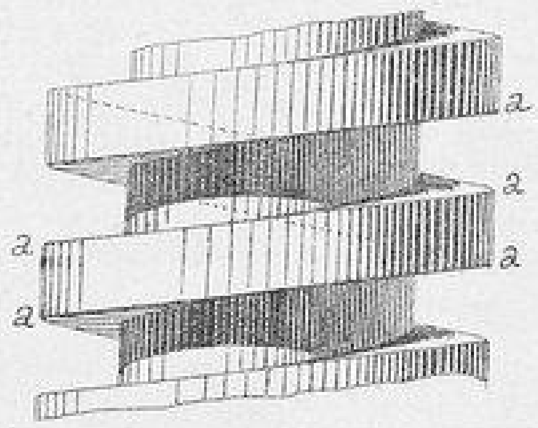
2° Les ombres n'ont été indiquées que sur les quatre premiers filets de la vis; il faut les tracer de la même manière sur tous les autres.

Fig. 300.



f indique du fer.
F indique de la fonte.

Fig. 301.

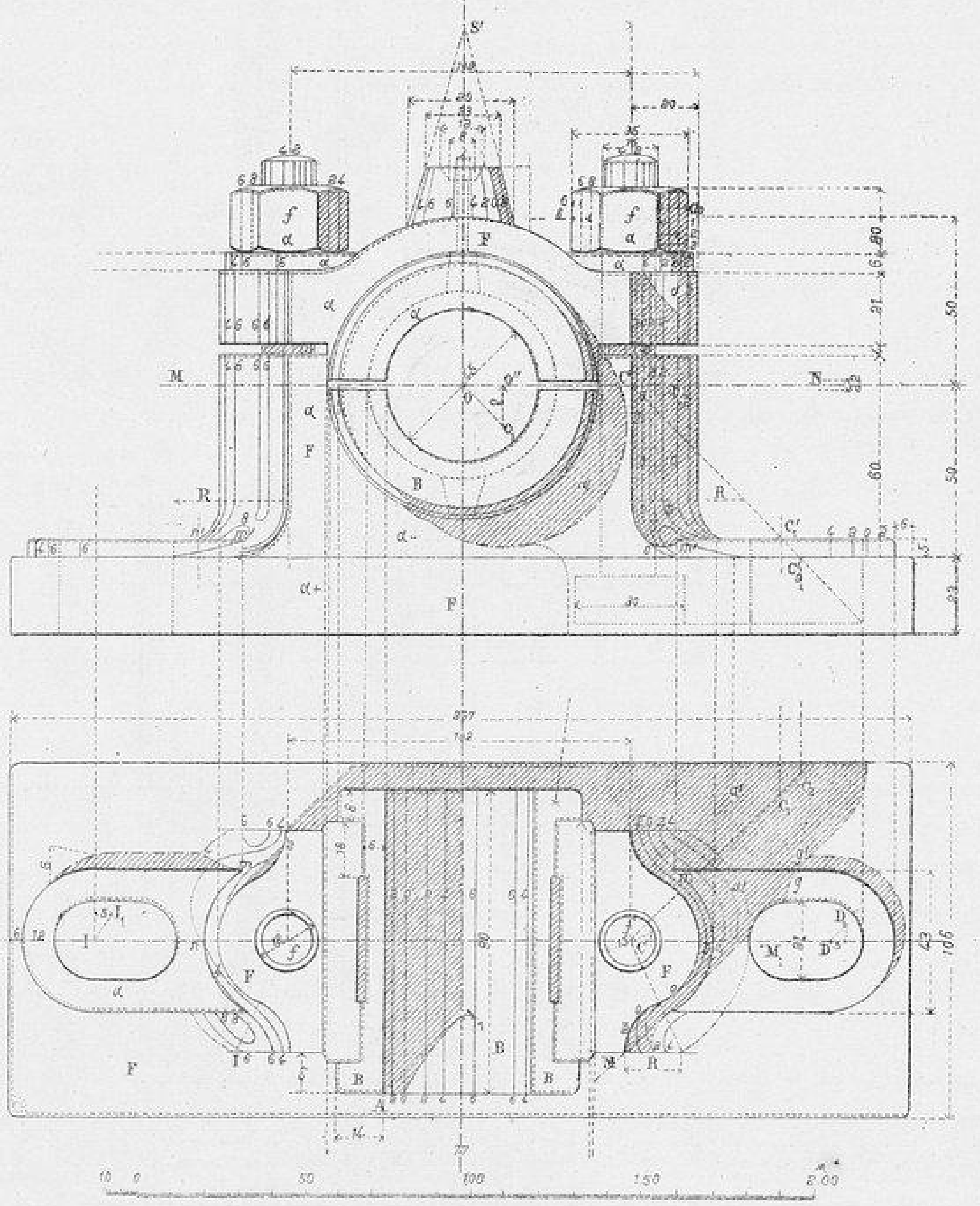


On voit ci-contre figure 301, l'effet à produire sur la vis. Les lignes telles que a a, d d ...... sont des projections d'hélices. En réalité ces courbes devraient être des sinusoïdes arrondies aux angles a a ....

Dans un dessin à petite échelle on se contente de les faire en ligne droite, cela est plus facile à dessiner et l'effet est

suffisant. Dans un dessin à plus grande échelle on devra dessiner des sinusoïdes véritables.

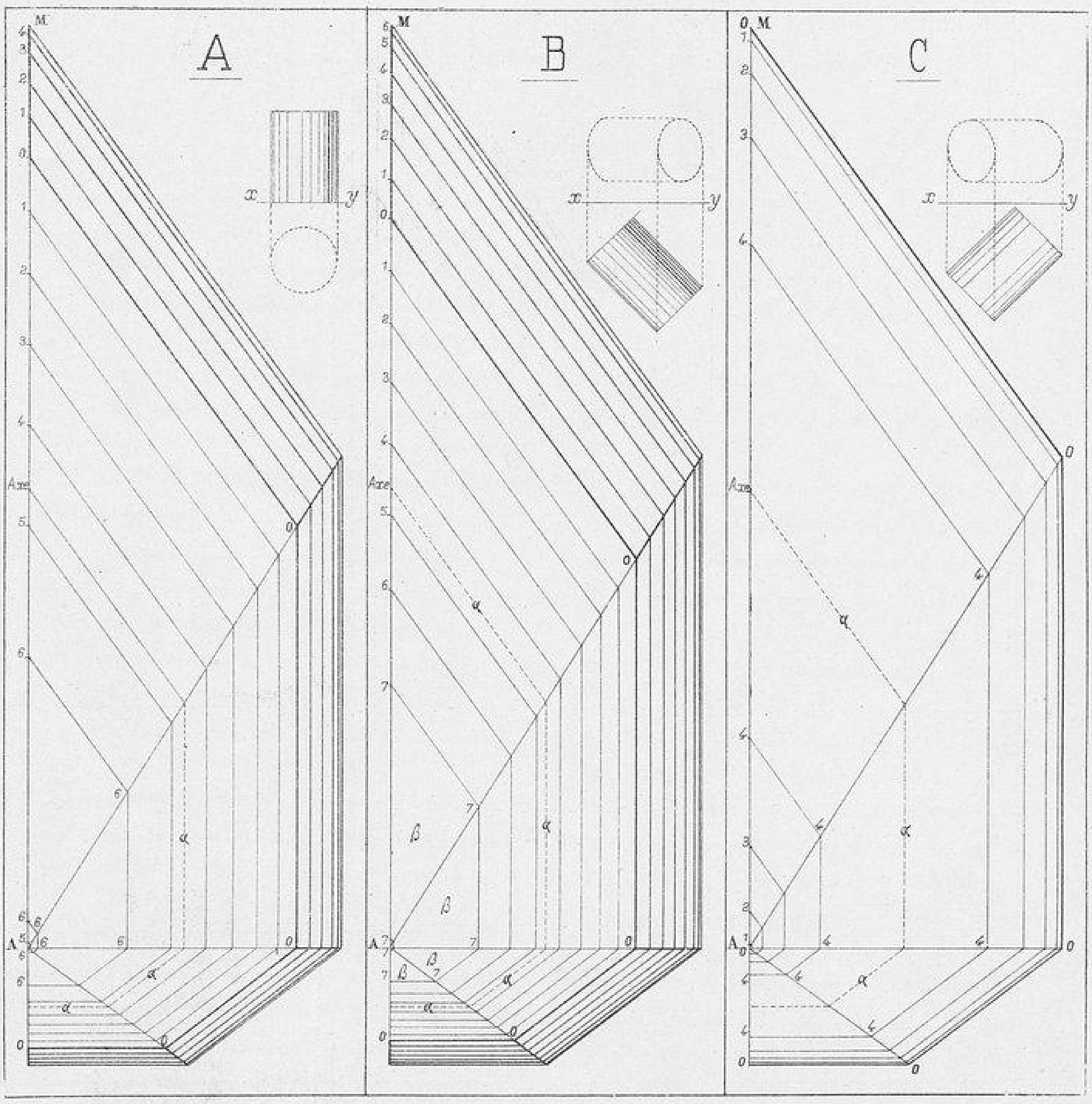
Fig. 302.



§ 242. – Un palier pour arbre horizontal.

Nous donnons ce croquis (fig. 302) sans autres explications. On remarquera seulement que pour raccorder entre elles les deux colonnes et la semelle, on a employé deux fractions de tores en creux terminées en I et R (voir le plan) par des portions de sphères. On fera bien d'étudier à part ce double raccordement avant de tracer les lignes de teintés.

Fin du Rendu.



Echelles de teintes. – Corps dépolis.

Fig. 263.
Cylindre vertical.

1° Le point N° 0 d'ombre propre est sensiblement aux 7/10 du rayon (1) à partir de l'axe ou aux 3/10 à partir du contour apparent.

2° La 1ère division $\overline{01}$, est à peu près les 2/5 de la distance 0M (largeur de l'ombre).

3° L'axe α est situé entre les points 4 et 5, un peu plus près de 5 que de 4.

4° Du côté du contour A on trouve les N°s 6 près de A et 5 presque confondu avec A.

5° Les écartements $\overline{01}$ - $\overline{12}$ - $\overline{23}$, etc.... vont en augmentant progressivement.

6° La zone claire 66 a une largeur à peu près égale au double de la largeur de l'ombre.

(1) Exactement à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Fig. 264.
Cylindre à 45°, en lumière.

1° Le point N° 0 d'ombre propre est sensiblement aux 6/10 du rayon (1) à partir de l'axe ou aux 4/10 à partir du contour apparent.

2° La 1ère division 01 est, à peu près, le 1/4 de la distance 0M.

3° L'axe I est situé entre les points 4 et 5, un peu plus près de 5 que de 4.

4° Du côté du contour A on trouve le N° 7 presque confondu avec lui. Il n'y a de ce côté, ni 6, ni 5.

5° Les écartements $\overline{01}$ - $\overline{12}$ - $\overline{23}$.... vont en augmentant progressivement.

6° La zone claire 7,7 a une largeur plus grande que celle de l'ombre, 1/6 en plus environ.

(1) Exactement à $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Fig. 265.
Cylindre à 45°, en demi-teinte.

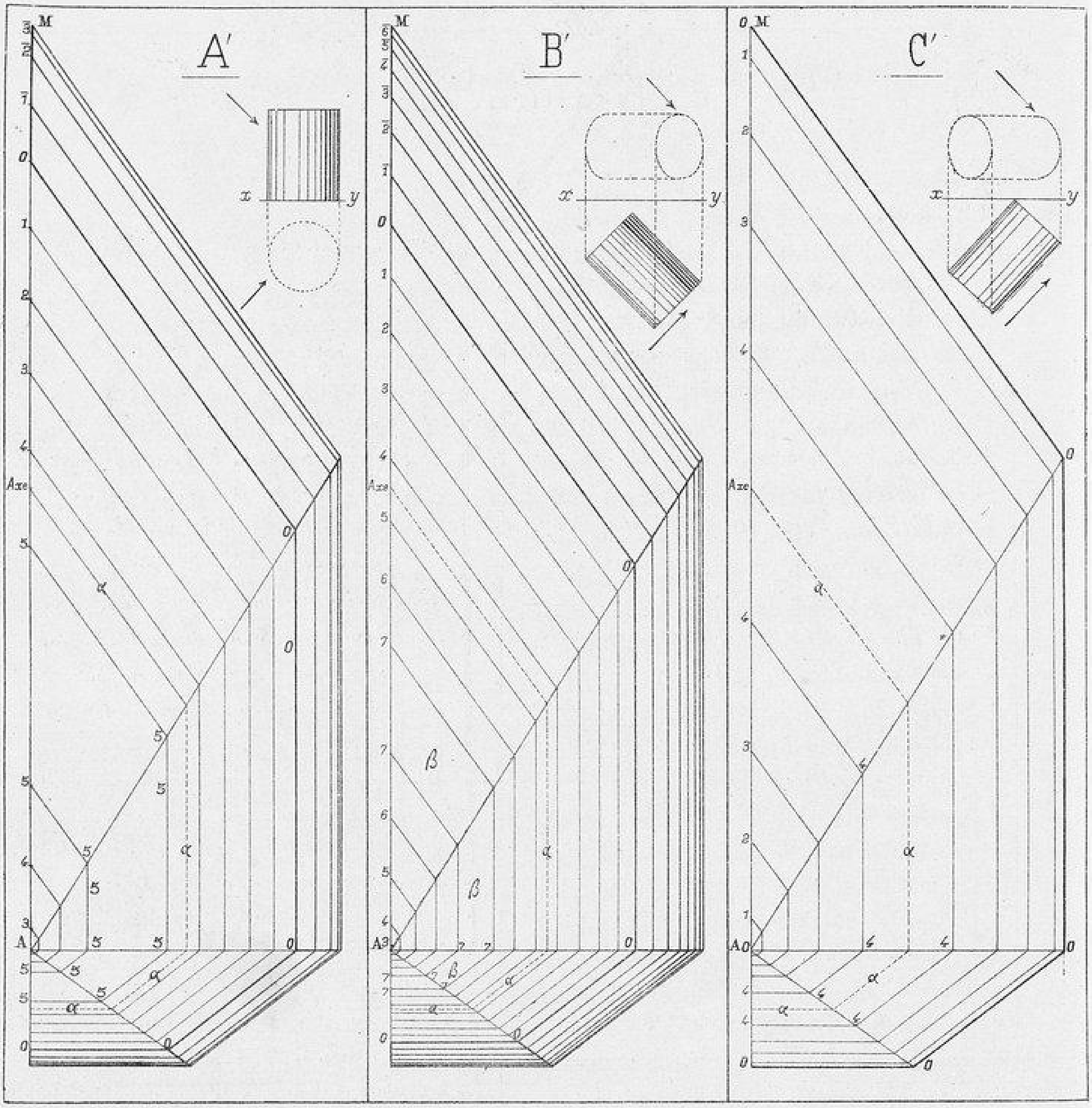
1° Les points N° 0 d'ombre propre sont confondus avec les extrémités du diamètre. Les lignes d'ombre propre sont donc les lignes de contour apparent.

2° L'axe α est situé entre les deux points 4,4 et à égale distance de chacun d'eux.
La zone 4,4, où α est la plus claire sur ce cylindre.

3° La largeur de la zone 4,4 est un peu plus grande que le rayon (1/15 en plus environ).

4° Les divisions sont exactement symétriques par rapport à l'axe.

Voir au verso, Echelles des corps mi-polis.



Échelles de teintes. _ Corps mi-polis.

Fig. 266.
Cylindre vertical.

1° Le point N° 0 d'ombre propre est sensiblement aux 7/10 du rayon (1) à partir de l'axe, ou aux 3/10 à partir du contour apparent.

2° L'axe α, est situé entre les points 4 et 5 un peu plus près de 4 que de 5.

3° Du côté négatif les numéros s'arrêtent à $\bar{3}$. Du côté positif ils s'arrêtent à +3.

4° La zone la plus claire est située entre les numéros 5 et 5. _ Sa largeur est un peu moindre que le double de la largeur de l'ombre propre.

(1) Exactement à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Fig. 267.
Cylindre à 45°, en lumière.

1° Le point N° 0 d'ombre propre est sensiblement aux 6/10 du rayon (1) à partir de l'axe ou aux 4/10 à partir du contour apparent.

2° L'axe α est situé entre les points 4 et 5, un peu plus près de 4 que de 5.

3° Du côté négatif les numéros s'arrêtent à $\bar{6}$. Du côté positif ils s'arrêtent à +3.

4° La zone la plus claire est comprise entre les N°s les plus élevés 7 et 7; elle sera donc très claire. _ Sa largeur est un peu plus grande que la moitié de la largeur de l'ombre propre.

(1) Exactement $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Fig. 268.
Cylindre à 45°, en demi-teinte.

1° Les points N°s 0 d'ombre propre sont confondus avec les extrémités du diamètre; les lignes d'ombre propre sont donc les lignes de contour apparent.

2° L'axe α est situé entre les deux points 4 et 4 et à égale distance de chacun d'eux. _ La zone 4.4 est la plus claire.

3° La largeur de la zone 4.4 est environ les 2/3 du diamètre.

4° Les divisions sont exactement symétriques par rapport à l'axe.

Table des matières.

I. Ombres usuelles (Rayon à 45°).

Généralités.

Paragraphes.		Pages.
1.	Lumière au soleil, lumière au flambeau	1
2.	Les trois méthodes générales pour la recherche des ombres. Méthode des plans sécants, des surfaces circonscrites, des projections obliques	2
3.	Les trois théorèmes généraux. Théorème des contours apparents, des points de perte, des surfaces qui se coupent	4
4.	Le rayon à 45° et son rabattement à l'angle φ	5
	Ombres portées sur un plan de front.	
5.	Ombres portées par un point, par une droite, par une figure de front	5
6.	Ombres portées par un cube et par un cercle dans ses trois positions principales, de front, de niveau et de profil	6
7.	Applications: Ombres d'un fût de colonne. Ombres d'une arcade	7
	Ressaut des ombres.	
8.	Ressaut de l'ombre d'un larmier sur une série de murs de front. Ombres d'un larmier sur des moulures verticales. Ombres d'un pilastre sur des moulures horizontales; Décrochement et ressaut des ombres	9
9.	Ombre portée par une droite verticale sur un plan parallèle à la ligne de terre	10
10.	Applications: Ombres d'un escalier. Ombres d'une cheminée et d'une lucarne sur un toit	10
11.	Ombre d'un cercle horizontal sur un mur fuyant à 45°	11
	Ombres des surfaces de révolution.	
12.	Ombre propre du cône; deux méthodes	12
13.	Cône à 45°. Cône à l'angle φ. Cônes sans ombres	13
14.	Ombre propre du cylindre	13
15.	Ombre propre de la sphère et ombre portée sur le plan horizontal. (Le rayon lumineux étant de front et projeté à l'angle φ)	13
16.	Ombres de la sphère; le rayon lumineux étant à 45°	14
17.	Ombre propre du tore	15
	Ombres portées sur les cylindres en relief.	
18.	Ombre dite: du Tailloir	16
19.	Ombre dite: du Listel saillant	16
20.	Différents cas particuliers de l'ombre précédente	17
21.	Ombre du Listel avec congé circulaire	17
22 et 22 bis.	Ombre dite: de l'astragale (Tore portant ombre sur un cylindre)	18
	Ombres portées sur les cylindres en creux.	
23.	Ombres d'un cylindre de machine à vapeur en coupe avec son piston en saillie	19
24.	Ombre d'un cylindre ouvert dite: Ombre du pont	19
25.	Ombre du Listel rentrant en coupe; arc doubleau	20
25 bis.	Même problème. Autre méthode	20
	Application aux voûtes et à l'architecture.	
26.	Ombres d'une voûte en berceau	21
27.	Ombres d'un berceau avec arcs doubleaux	21
28.	Ombres des gouttes et de leur bandeau dans l'ordre dorique	22
29.	Ombres d'une voûte d'arêtes sur un plan barlong	22
30.	Ombres d'une lunette cylindrique droite	23
	Ombres portées sur les sphères en creux et voûtes sphériques.	
31.	Ombre dite: de l'Ecuelle	24
32.	La même Ecuelle en coupe	25
33.	Ombre de la niche sphérique	25
34.	Berceau terminé par un cul de four	25
35.	Voûte sphérique précédant un berceau plein cintre avec arc doubleau intermédiaire	25
36.	Même voûte; l'arc doubleau précédant la voûte sphérique	26

Paragraphes — Pages

37. – Ombres d'une voûte sphérique sur pendentifs avec arcs doubleaux — 27

Colonnes, chapiteaux, frontons.

38. – Ombres du chapiteau dorique — 29
39. – Ombres d'une colonne dorique engagée dans un mur — 31
40. Ombres d'un fronton — 32
41. – Ombres d'une base attique — 33
42. – Ombres d'un chapiteau ionique grec. – Tracé du chapiteau — 34
43. – Tracé des ombres — 36
44. – Chapiteau corinthien. – Ombres de son épannelage — 38

II. – Projections cotées.

45. – Généralités. – Échelles. — 41

Ligne droite.

46. – Équidistance. – Graduation. – Intervalle. – Pente — 41
47. – Connaissant la distance projetée de deux points calculer l'intervalle et la pente de la droite qui les joint — 42
48. – Une droite étant graduée, donner la cote d'un de ses points — 43
49. – Placer, sur une droite graduée, un point de cote donnée — 43
50. – Graduer la droite passant par deux points — 43

Plan.

51. – Échelle de pente. Trouver la cote d'un point du plan — 44
52. – Reconnaître si deux droites se coupent et dans ce cas, graduer leur plan — 44
53. – Construire et graduer le plan passant par trois points — 45
54. – Intersection de deux plans — 45
55. – Intersection d'une droite et d'un plan — 46
56. – Par un point donné mener un plan parallèle à un plan donné — 46
57. – Mener par un point coté, une droite perpendiculaire sur un plan et trouver son intersection avec ce plan — 46
58. – Par une droite donnée mener un plan ayant une pente donnée — 47
59. – Par un point d'un plan mener dans ce plan, une droite ayant une pente donnée — 48
60. – Angle de deux droites — 49
61. – Angle de deux plans — 49
62. – Cône. – Ombre d'un cône — 50
63. – Cylindre — 50

Épures.

64. – Épure relative au tracé d'un saillant de fortification — 50
65. – Détails d'exécution — 54
67. – Autre énoncé d'épure. – Intersections de plans. – Plate forme avec rampe — 55

III. – Perspective.

Généralités.

68. – Introduction. – Plan des leçons — 57
69. – Objet de la perspective — 57
70. – Esprit des méthodes constituant le trait de la perspective — 58

Paragraphes. Pages.

71. – Définitions. — 59

72. – Coordonnées perspectives d'un point de l'espace — 59

73. – Perspective d'une ligne droite. – Point de fuite d'une direction. – Point de fuite principal — 60

74. – Figures situées dans les plans de front. – Échelle d'un plan de front — 61

75. – L'Épure géométrale et le tableau — 63

A. – Perspective des Plans.

Méthode générale de perspective.

76. – Perspective d'une droite du géométral — 64

77. – Droites occupant des positions particulières. Droites de resection $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ ..... $\frac{m}{n}$. – Points principaux de distance réduite ou non réduite — 64

78. – Points de fuite accidentels et points de distance correspondants — 66

79. – Perspective d'un quadrilatère du géométral. Tableau non amplifié — 67

80. – Même problème en amplifiant le tableau (tableau triplé) — 68

81. – Perspective d'un plan régulier ne se présentant pas de front. – Amplification dans un rapport incommensurable. – Emploi des dominantes du plan — 70

82. – Résumé. – Méthode dite: des trois échelles — 71

B. Perspective directe sur le géométral.

Objet de la perspective directe — 72

83. – Partager une droite de front en parties égales ou qui soient entre elles dans un rapport donné — 72

84. – Même problème: la droite n'est pas de front, elle est fuyante — 72

85. – Prolonger sur une droite une division amorcée — 72

86. – 1ère application: continuer sur une route un tracé d'arbres — 73

2ème application: continuer sur un mur un tracé de fenêtres et de trumeaux — 73

Paragraphes. Pages.

Points de fuite inaccessibles.

(a) Méthodes géométriques.

87. – Mener des fuyantes dont le point de fuite est inaccessible. – Position de la question — 73

88. – Procédé approximatif; Méthode dite: des Réseaux — 74

89. – Procédé par lignes proportionnelles — 75

(b) Emploi du Té brisé ou règle à trois branches.

90. – Description de l'instrument. – Position des épingles — 76

91. – Placer les épingles de manière à utiliser un Té brisé d'angle déterminé α — 77

92. – Position à donner aux épingles sur le chassis d'une toile (utile pour les peintres) — 78

93. – Emploi du Té brisé pour les tracés d'ombres — 79

94. – Changer la position des épingles dans le courant d'une opération — 79

Problèmes de perspective directe exigeant la connaissance des points principaux.

95. – Construire un carré sur une droite de front comme côté — 80

96. – Perspective d'un cercle dont on donne un diamètre de front. – 1ère méthode dite: par recoupements — 80

97. – Même problème. – 2e méthode dite: des huit points — 81

98. – Même problème. – 3e méthode dite: par les échelles circulaires — 82

Relèvement du géométral.

99. – Relèvement d'un point — 83

100. – Même problème: Lorsque le point de distance est réduit dans un rapport incommensurable — 84

101. – 1ère application. – Restitution perspective d'un triangle du géométral — 85

102. – 2e application. – Recherche de points

Paragraphes. Pages

accidentels de fuite et de leurs points de distance — 86

103. – 3e application. Trouver le point de distance d'une direction dont le point de fuite est inaccessible — 87

Perspective des cercles horizontaux.

104. – Perspective d'un cercle dont on donne un diamètre fuyant — 87

105. – Architecture. Perspective du plan d'une colonne cannelée — 87

106. – Perspective d'une série de cercles concentriques. Emploi d'échelles divergentes — 89

107 et 108. – Application au plan d'un escalier circulaire (Sujet d'une épure de perspective) — 90

109. – Cas particuliers de la perspective d'un cercle horizontal. Ellipse. hyperbole. parabole — 92

110. – Perspective des bancs d'un cirque — 93

111. – Remarque sur la perspective de la ligne neutre quand on relève le géométral. — 93

Perspective par craticulage.

112. – Mise au carreau d'un plan irrégulier. craticulage du plan – Mise en perspective du réseau – Mise en perspective du plan — 94

113. – Généralisation de la méthode par la mise au carreau — 96

C. – Perspective des Élévations ou mise en hauteur.

114. – Mise en hauteur d'un point, connaissant ses trois coordonnées perspectives — 98

115. – Emploi d'un mur fuyant auxiliaire: Échelle des hauteurs — 98

116. – Application à la perspective d'une croix — 99

Perspective directe dans l'espace.

117. – Cas divers de la représentation perspective d'un point du géométral. – Espace réel. – Espace intermédiaire – plan neutre. – Espace virtuel — 101

118. – Cas divers de la perspective d'un point de l'espace — 102

Paragraphes. Pages.

119. – Perspective d'une droite. Recherche de sa trace géométrale — 102

120. – Intersection d'une droite et d'un mur vertical — 103

121. – Intersection d'une droite et d'un plan quelconque défini par trois points — 103

122. – Intersection de deux plans — 103

123. – Partager une droite de l'espace dans un rapport donné — 103

Perspective directe des moulures.

124. – Marche générale à suivre — 104

125. – Moulures d'un piédestal isolé — 104

126. – Moulures d'un fronton — 106

127. – Moulures circulaires: archivolte — 106

128. – Perspective des surfaces de révolution — 108

129. – Application à un vase — 108

Mise de front d'un plan. Méthode de la corde de l'arc.

130. – Remarque préliminaire — 111

131. – Un plan est perpendiculaire au géométral l'amener de front. – Perspective d'une arcade — 111

132. – Même problème pour un plan quelconque — 112

133. – Changement de géométral — 113

134. – Prendre un nouveau géométral perpendiculaire à un plan donné — 113

135. – Application: Trouver la vraie forme d'un triangle défini par trois points quelconques — 113

Images par réflexion dans des miroirs plans.

136. – Lois de la réflexion — 115

137. – Champ d'un miroir — 116

138. – Problème: abaisser d'un point une perpendiculaire sur un plan horizontal et la prolonger d'une longueur égale. Réflexion dans une nappe d'eau — 116

139. – Image d'un astre dans une nappe d'eau — 117

140. – Image dans un miroir vertical perpendiculaire ou parallèle au plan du tableau — 117

Paragraphes. — Pages.

141. – Image dans un miroir vertical quelconque — 117
142. – Image dans un miroir plan quelconque: généralités. Emploi du symétrique de l'œil par rapport au miroir — 118
143. – Application: Image d'un point dans un miroir plan quelconque — 119

Des ombres en perspective.

145. – Lumière au flambeau. – Positions diverses du flambeau — 120
146. – Lumière au Soleil. – Positions diverses du Soleil — 121
147. – Ombres portées sur des plans horizontaux — 121
148. – Ombres portées et reçues par un cône — 122
149. – Ombres portées dans l'intérieur d'un berceau — 123

Restitutions perspectives.

150. – Utilité des restitutions perspectives — 125

(a) Restitutions précises.

151. – Restitution de la ligne d'horizon — 126
152. – Restitution des points principaux: 1° Par deux angles droits; 2° Par un cercle perspectif — 126
153. – Restitution des données en utilisant un carré perspectif — 128.

(b) Restitutions visuelles.

154. – En quoi consiste la restitution visuelle — 128
155. – Déplacement horizontal du spectateur — 129
156. – Changement de hauteur du spectateur — 130
157. – Dérogations aux règles de la perspective — 131

Dessin d'après nature.

(a) Relevé géométral.

158. – En quoi consiste un relevé géométral — 132
159. – Mise en feuille du croquis — 133
160. – Esquisse du croquis — 133
161. – Croquis définitif — 134
162. – Traits de force — 134
163. – Hachures et teintes conventionnelles — 134
164. – Préparation des cotes — 135
165. – Mesure des cotes dans un relevé d'architecture; Instruments de mesure: fil à plomb, règle divisée, etc. — 136

Paragraphes. — Pages.

166. – Mesure des cotes dans un levé de machines; Instruments de mesure: compas d'épaisseur, etc. — 138

(b) Dessin perspectif d'après nature.

167. – Exercices préalables. – Appréciation des rapports et des pentes — 140
168. – Appréciation de la hauteur d'horizon — 141
169. – Dessin d'un cube (à vue). 1er cas: l'horizon est dans la feuille — 141
170. – 2e cas: l'horizon est en dehors de la feuille — 143
171. – Application au dessin d'un paysage avec monuments. 144
172. – Remarque relative aux lignes fuyantes dans le dessin d'un objet isolé — 146
173. – Dessin, à vue, de cercles horizontaux superposés — 147
174. – Diviser (à vue) en parties égales un cercle perspectif — 148
175. – Dans un dessin d'après nature retrouver, expérimentalement, la distance — 149.

Perspectives de convention.

(a) Perspective cavalière et projections obliques.

176. – Généralités. – fuyantes. – rapport de réduction — 150
177. – Rabattement d'une projetante sur un plan de front — 151
178 et 179. – Perspective cavalière d'une circonférence horizontale — 151
180. – Perspective cavalière d'un assemblage de charpente (un tenon sur l'arête) — 152
181. – Perspective cavalière d'une sphère. – Ombres portées — 153
182. – Remarque générale sur la perspective cavalière cas particuliers où elle peut être employée — 156

(b) Perspective axonométrique et isométrique.

183. – Principe de la perspective axonométrique. – C'est une projection orthogonale. – Échelles des trois axes de coordonnées — 156
184. – Perspective isométrique — 157
185. – Perspective d'une circonférence isométrique — 158
186. – Rapporteur isométrique — 159
187. – Application: Perspective axonométrique d'un fragment de voûte des arènes d'Arles (Emprunté à l'ouvrage de Mr Choisy: L'art de bâtir chez les Romains) — 159

IV. –

Paragraphes. Pages.

IV. – Théorie du Lavis.[1]

Le Rendu dans le dessin d'Architecture et dans le dessin de Machines.

Les trois principes.

(a) Généralités.

188. – Rayons lumineux directs. – Rayons visuels — 161
189. – Corps dépolis. – Corps polis. – Corps mi-polis — 161
190. – Expérience sur l'éclairement des corps dépolis — 162
191. – Conséquences relatives à la lumière émise par une surface dépolie — 162
192. – Éclairement total. – Éclairement unitaire d'une surface plane — 163
193. – Rayons indirects ou de reflets. – Reflets atmosphériques. – Le Ciel source de reflets. – Reflets terrestres — 164

(b) Principe des orientations et ses conséquences.

194. – Variations dans l'éclairement des différents points d'un objet noyé dans l'atmosphère. Ombres propres. – Ombres portées. Principe des ombres portées — 166

(c) Principe des couleurs et ses conséquences.

195. – Tons simples et purs. – Rabattus ou éclaircis — 167
196. – Tons composites de 1er, 2e ou 3e ordre. – Rosace des couleurs — 168
197. – Couleurs complémentaires — 169
198. – Couleurs usuelles. – Composition d'une boîte de couleurs — 169
199. – Teintes conventionnelles — 170
200. – Lavis en Camaïeu — 171
201. – Causes de la couleur des objets. – Orientation saturée. – Orientation sous-saturée. – Orientation sur-saturée — 171

(d) Principe des distances et ses conséquences.

202. – Effets de l'éloignement — 171
203. – Des différents plans en peinture — 172
204. – Manière de rendre en Camaïeu, à l'encre de Chine, les effets de la distance — 173

(e) Effets physiologiques.

205. – Effets de contraste. – Effets d'irradiation. Conséquences — 174

Les trois sphères types.

(a) Sphère dépolie.

206. – Lignes d'égales teintes sur une sphère dépolie — 175
207. – Les trois zones caractéristiques de toute surface. – Zone zéro (d'ombre propre). – Zone α (zone de teinte locale de couleur ou d'éclairage à saturation). – Zone β (zone claire ou d'éclairage à sursaturation maxima) — 176
208. – Zones intermédiaires dites : Zones de demi-teintes — 178
209. – Lavis d'une sphère type, à teintes fondues — 178
210. – Résumé. – Rendu de la couleur. – Rendu de l'ombre propre. – Rendu des demi-teintes d'ombre. – Rendu des ombres portées — 179

(b) Sphère parfaitement polie.

211. – Lois de la réflexion. – Intensité du rayon réfléchi — 180

[1] Les leçons sur la théorie du lavis sont données en dehors des leçons proprement dites du cours de Géométrie appliquée, à l'occasion des exercices de lavis que les Élèves ont à exécuter.

Paragraphes. Pages.

212. – Aspects divers d'un plan poli —— 180
213. – Aspects divers d'une sphère polie. - Tracé du point brillant. - Méthode dite : par la bissectrice —— 181
214. – Lignes d'égales teintes sur une sphère parfaitement polie. - Recherche théorique des lignes. - Épure. - Équation des lignes en projection horizontale —— 181

(c) Sphère mi-polie.

215. – Conventions pour les corps mi-polis —— 185
216. – Épure des lignes de teintes sur une sphère mi-polie —— 185

Échelles de teintes.

217. – Usage des sphères-types —— 187
218. – Échelles de teintes les plus usuelles. - Cylindres dans les trois positions principales. (Les échelles sont à la fin du cours) —— 187
219. – Application des échelles aux surfaces en creux. - Cylindre en creux. - Sphère en creux —— 188

Pratique du Lavis.

220. – Des teintes. - Transparence et intensité d'une teinte. - Définitions. - Effet de deux teintes superposées. - Réaliser une teinte de transparence donnée —— 189
221. – Classification des teintes. - Teinte d'ébauche. Teintes d'ombre propre et de demi-teintes. - Teintes de couleur. - Teintes d'ombres portées —— 190
222. – Conseils pratiques —— 191
223. – Rendu des ombres portées : à teintes plates —— 191
224. – Lavis à teintes fondues —— 192
225. – Des filets de lumière et des filets de reflets. - Justification des traits de force —— 193
226. – Exécution des teintes fondues sur un grand espace —— 194
227. – Exécution des teintes adoucies, c'est-à-dire fondues sur un petit espace —— 195

Paragraphes. Pages.

Application au rendu des surfaces géométriques.

(a) Surfaces de révolution.

228. – Lignes de teintes sur un tore à profil circulaire. - Ces lignes sont des conchoïdes d'ellipses —— 195
229. – Tores dont le cercle générateur est très petit. - Tracé approché exécuté au compas. - Traits de force et filets de lumière sur un contour circulaire —— 197
230. – Surfaces planes travaillées au tour —— 198

(b) Raccordement des surfaces.

231. – Congé entre deux surfaces —— 198
232. – Raccordement d'un cylindre et d'un plan. - Tracé simplifié par arcs de cercle —— 199
233. – Raccordement de deux cylindres de diamètres différents —— 200
234. – Raccordements d'un tore et de huit cylindres (Volant avec huit bras cylindriques) —— 200
235. – Raccordement de tores entre eux. - Application à un crochet de poulie —— 202

Applications au dessin d'Architecture.

236. – Des reflets dans le dessin d'architecture. - Rayon terrestre principal. - Combinaison des reflets du sol et des rayons atmosphériques. - Rayon aéro-terrestre principal. - Conséquences. - Contre-ombres —— 203
237. – Application au rendu d'un porche (Plans de front à des distances différentes) —— 205
238. – Application au rendu des moulures cylindriques —— 206
239. – Application au rendu des moulures annulaires —— 209
240. – Rendu, à l'effet, d'un fragment d'architecture, à teintes plates et à teintes fondues (Entablement de la Tribune des Cariatides, à Athènes) —— 210

Applications au dessin de Machines.

241. – Rendu d'un verin à vis —— 212
242. – Rendu d'un palier pour arbre horizontal —— 214

Échelles de teintes.

— Échelles de teintes pour les corps dépolis —— 215
— Échelles de teintes pour les corps mi-polis —— 216
— Table des matières —— 217

Fin de la table des matières.

École Nationale des Ponts et Chaussées.

Cours Préparatoires.

Cours de Géométrie Appliquée

de

Mr Pillet

Chef des Travaux Graphiques, Professeur du Cours.

ÉCOLE NATIONALE
BIBLIOTHÈQUE
DES PONTS ET CHAUSSÉES

2e Partie.

La Géométrie appliquée à la Construction.

I. Compléments de Géométrie Descriptive
et Théorie des Surfaces.

II. Charpente

III. Coupe des pierres.

1885.

Cours de Géométrie appliquée.

2ème PARTIE.

Géométrie appliquée à la construction.

I. _ Complément de géométrie descriptive et théorie des surfaces. _ II. _ Charpente. _ III. _ Coupe des pierres.

I. _ Complément de géométrie descriptive et théorie des surfaces.

Des infiniment petits dans les courbes.

1ère Leçon. §1. _ *Rappel de théorèmes démontrés en analyse.* _ On sait que l'on fait entrer les quantités infiniment petites dans les calculs en vue d'obtenir soit la limite du rapport de deux de ces quantités, (c'est le problème de la dérivation), soit la limite d'une somme de quantités infiniment petites dont le nombre croît indéfiniment à mesure qu'elles tendent vers zéro. C'est le problème de l'intégration.

On choisit en général un infiniment petit comme principal et on lui compare tous les autres: l'infiniment petit principal est dit du 1er ordre. Nous le désignerons par la lettre θ. Les autres peuvent être du 1er ou 2e, ou du ne ordre.

On dit qu'un infiniment petit est du ne ordre, lorsque son rapport à la ne puissance de l'infiniment petit principal tend vers une limite finie. De telle sorte que si N est un infiniment petit du ne ordre, on pourra écrire:

$$(1)\quad \frac{N}{\theta^n} = K + \varepsilon.$$

formule dans laquelle K est une quantité finie et ε un résidu infiniment petit.

Cette formule (1) est équivalente à celle-ci:

$$(2)\quad \lim.\frac{N}{\theta^n} = K.$$

Elle peut encore s'écrire en chassant le dénominateur:

$$(3)\quad N = K\theta^n + \varepsilon\theta^n.$$

Nous rappellerons les théorèmes suivants démontrés en analyse:

Théorème 1. – Le produit de deux infiniment petits, l'un de l'ordre n, l'autre de l'ordre m, est de l'ordre n + m.

Théorème 2. – Le quotient de deux infiniment petits l'un de l'ordre n et l'autre de l'ordre m est de l'ordre n – m.

On étend ces deux théorèmes aux puissances et aux racines d'infiniment petits.

Théorème 3, ou Théorème fondamental sur la substitution des infiniment petits. Dans la recherche d'une limite de rapport, ou d'une limite de somme d'infiniment petits, on peut substituer aux infiniment petits qui entrent dans les calculs d'autres infiniment petits qui ne diffèrent d'eux que d'infiniment petits d'ordre supérieur.

Autre énoncé. – Dans tout problème de dérivation (limite d'un rapport) ou d'intégration (limite d'une somme) on peut négliger les infiniment petits d'ordre supérieur à l'ordre de ceux qui entrent dans les calculs.

Conséquence : Reprenons la formule (3) qui donne l'expression d'un infiniment petit de l'ordre n.

$N = K\theta^n + \varepsilon\theta^n$; le résidu $\varepsilon\theta^n$ est le produit de θ^n qui est du n^e ordre par ε, qui est au moins du 1^{er} ordre ; ce résidu est donc au moins du $n+1^e$ ordre et peut être négligé dans les calculs. Nous pouvons donc dire que N (du n^e ordre) a pour expression $N = K\theta^n$.

Rappelons encore que deux infiniment petits sont dits égaux, lorsque la limite de leur rapport tend vers l'unité. Cela revient à dire qu'ils ne diffèrent entre eux que par un infiniment petit d'ordre supérieur au leur. Ils peuvent donc être substitués l'un à l'autre dans les calculs.

Nous donnons ci-contre un tableau des principaux infiniment petits qui se rencontrent dans les courbes planes.

Nous rappellerons quelques notions données et démontrées dans le cours d'analyse.

§ 2. – De la courbure et du rayon de courbure.

Courbure totale d'un arc. – C'est l'angle ω, dit angle de contingence, que font entre elles les tangentes aux extrémités de l'arc.

Si l'arc est infiniment petit cet angle est aussi infiniment petit et, en général du premier ordre (Tableau 4^e)

La courbure moyenne de l'arc AB, est le quotient de la courbure totale par la longueur de l'arc, c'est $\frac{\omega}{\theta}$.

La courbure en un point, est la limite vers laquelle tend la courbure moyenne lorsque l'arc tend vers zéro.

c désignant la limite de la courbure moyenne on aura :

$$c = \lim. \frac{\omega}{\text{arc } \theta}.$$

Rayon de courbure : Dans une circonférence la courbure est constante et égale à l'inverse du rayon du cercle.

$$c = \frac{1}{R} \quad \text{d'où} \quad R = \frac{1}{c}.$$

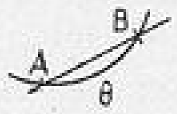
On nomme, dans une courbe, rayon de courbure ρ, le rayon d'un cercle qui aurait

Courbes planes.

Tableau des infiniment petits de divers ordres.

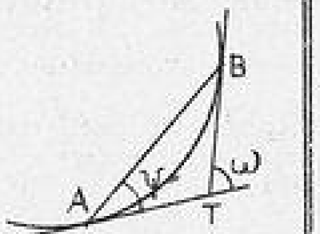
1er Ordre.

1°. Infiniment petit principal l'arc $AB = \theta$, réunissant deux points infiniment voisins

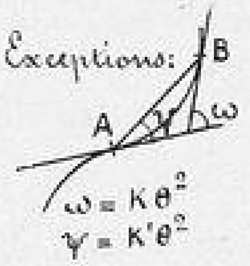


2°. Corde AB. (Corde $AB = K\theta$), et $K = 1$.

3°. L'angle ψ que fait la tangente AT avec la sécante AB. ($\psi = K\theta$).
Exception : S'il y a en A un point d'inflexion, ψ est du 2e ordre.

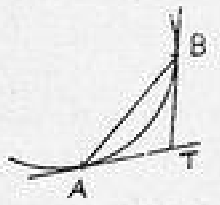


4°. L'angle de contingence ω que font entre elles les deux tangentes AT et TB ($\omega = K\theta$)
Exception : S'il y a en A un point d'inflexion, ω est du 2e ordre.

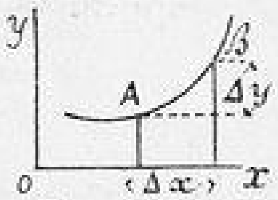


5°. Somme de deux tangentes ($AT + TB = K\theta$).

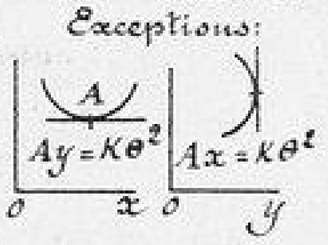
6°. Une seule des deux tangentes ($AT = K'\theta$ ..... $TB = K'\theta$).



7°. L'accroissement Δy de l'ordonnée $\Delta y = K\theta$.
Exception : Si la tangente en A est parallèle à l'axe 0x, alors Δy est du 2e ordre.

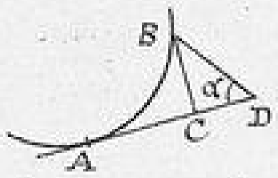


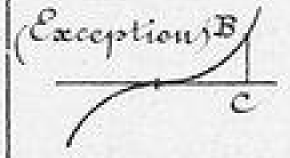
8°. L'accroissement Δx de l'abscisse ($\Delta x = K\theta$).
Exception : Si la tangente en A est parallèle à l'axe 0y, alors Δx est du 2e ordre.



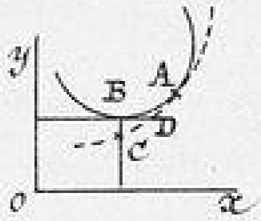
2ème Ordre.

9°. Distance orthogonale BC, ou distance oblique BD, d'un point à la tangente, pourvu que l'angle α de la distance oblique ne tende pas vers zéro.
$BC = K\theta^2$; $BD = K'\theta^2$
Exception : S'il y a inflexion, les distances sont du 3e ordre.

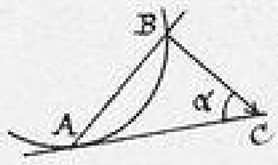




10°. La différence BC des ordonnées ou BD des abscisses de deux courbes simplement tangentes
$BC = K\theta^2$. $BD = K'\theta^2$.
Exception : Si les courbes sont osculatrices, cette différence est au moins du 3e ordre.

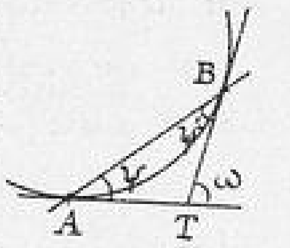


11°. La différence entre l'arc (ou sa corde) et sa projection oblique sur la tangente.
Arc $AB - AC = K\theta^2$
Nota : Si la projection est orthogonale cette différence est du 3e ordre.



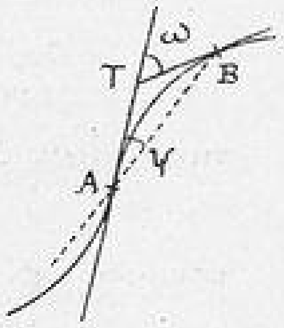
12°. La différence $TA - TB$ entre les longueurs de deux tangentes infiniment voisines.
$TA - TB = K\theta^2$

13°. La différence $\psi - \psi'$ entre les angles que la sécante AB fait avec les deux tangentes AT et TB.
$\psi - \psi' = K\theta^2$.



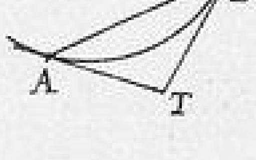
14°. L'angle ψ que la tangente en un point d'inflexion, fait avec la sécante
$\psi = K\theta^2$

15°. L'angle ω, que la tangente en un point d'inflexion, fait avec la tangente infiniment voisine.
$\omega = K\theta^2$.



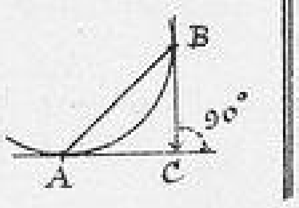
3ème Ordre.

16°. La différence entre l'arc et la corde.
Arc AB − corde $AB = K\theta^3$.

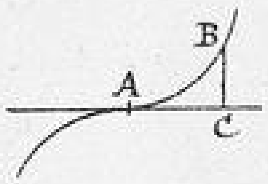


17°. La différence entre la somme des tangentes et l'arc (ou la corde)
$AT + TB$ − arc $AB = K\theta^3$).

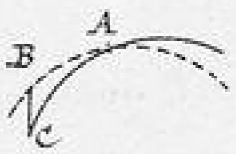
18°. La différence entre l'arc (ou la corde) et sa projection orthogonale sur la tangente.
Arc $AB - AC = K\theta^3$.
Nota : S'il y a inflexion, cette différence est du 4e ordre.



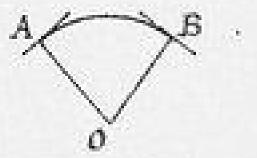
19°. La distance d'un point à la tangente lorsqu'il y a inflexion.
$BC = K\theta^3$.



20°. La différence entre les ordonnées de deux courbes osculatrices.
$BC = K\theta^3$.



21°. La différence entre les longueurs de deux normales infiniment voisines.
$AO - BO = K\theta^3$.



même courbure que la courbe au point considéré. On aura donc :

$$\rho = \lim. \frac{\text{arc } \theta}{\omega}.$$

Dans ces expressions de c ou de ρ, les quantités qui entrent au numérateur et au dénominateur sont, en général, du 1er ordre.

Nota : 1° A la place de l'arc θ, on peut prendre la corde qui n'en diffère que d'un infiniment petit du 3e ordre. (Tableau 16°)

2° A la place de l'angle ω, on peut prendre le double de l'angle ψ que font entre elles la tangente et la corde : En effet (voir Tableau 13°) on a $\omega = \psi + \psi'$. Mais $\psi = \psi'$ à un infiniment petit près du 3e ordre : Donc on peut écrire :

$\omega = 2\psi$. On aura :

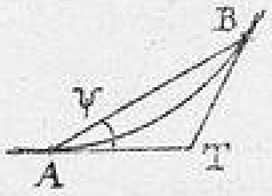
$$c = \lim. \frac{2\psi}{\text{arc } \theta}, \quad \text{et} \quad \rho = \lim. \frac{\text{arc } \theta}{2\psi}$$

3° On a (Tableau 16°) $AT + TB = \text{arc } AB$ à un infiniment petit près du 3e ordre. D'autre part $AT = TB$ à un infiniment petit près du 3e ordre (Tableau 12°). On peut donc écrire :

$$\text{arc } AB = 2AT \quad \text{et par suite}$$

$$\rho = \lim. \frac{AT}{\psi}.$$

Fig. 1.



Cercle de courbure en un point. – C'est le cercle qui passant par le point aurait pour centre la position limite de l'intersection de la normale en ce point et de la normale infiniment voisine.

On démontre : 1° Que le cercle est tangent à la courbe au point considéré ; qu'il a même courbure qu'elle et que sa concavité est tournée du même côté.

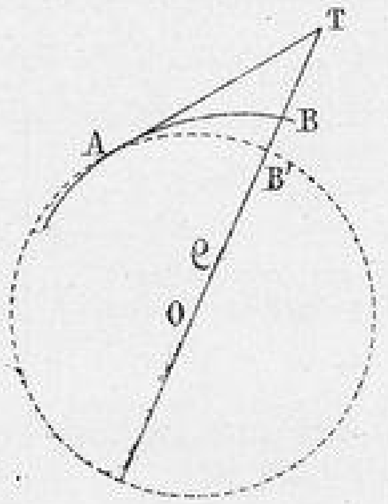
2° Qu'il se confond avec la position limite du cercle qui tangent à la courbe au point considéré, passerait en outre par le point infiniment voisin. On en conclut que le cercle de courbure traverse en général la courbe.

3° Qu'il se confond avec la limite du cercle qui passant par le point considéré, passerait aussi par les deux points infiniment voisins. C'est donc la limite du cercle passant par trois points infiniment voisins.

4° Que la différence des ordonnées ou des abscisses, de la courbe et du cercle de courbure est du 3e ordre.

Nota. – Lorsqu'une courbe présente un point d'inflexion, en ce point le cercle de courbure a un rayon infini. Il se réduit à une droite qui est précisément la tangente au point d'inflexion.

Fig. 2.



§ 3. – Expressions du rayon de courbure.

Nous allons donner plusieurs expressions du rayon de courbure dont nous aurons à faire usage par la suite.

1ère expression : Soit AB la courbe et AB' son cercle de courbure de centre O.

Prenons sur la courbe le point B, infiniment voisin de A ; joignons OB et prolongeons jusqu'à la tangente, en T. On a par rapport au cercle :

$\overline{TA}^2 = TB' \times (2\rho + B'T)$. Dans cette expression, négligeant

B'T qui est infiniment petit, en presence de 2ρ qui ne l'est pas et nous aurons:

$$TA^2 = TB' \times 2\rho \text{, d'où}$$

$$\rho = \frac{TA^2}{2TB'}$$

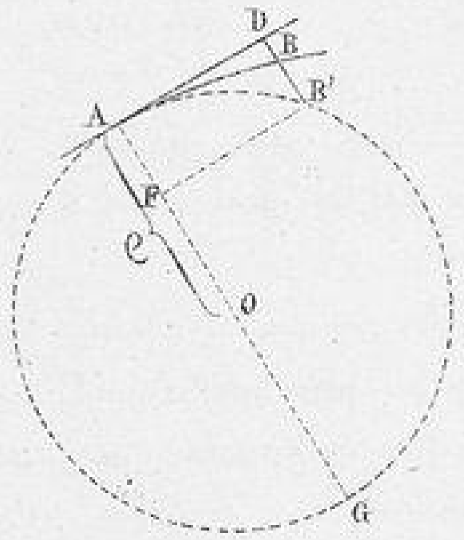
mais TB' qui est du 2e ordre, diffère de TB, de la quantité BB' qui est du 3e ordre comme différence de deux normales infiniment voisines. (Tableau 21e). On peut donc substituer TB à TB' et écrire:

$$\text{(A)} \quad \rho = \lim. \frac{TA^2}{2TB}\text{, telle est la 1}^{\text{ère}}\text{ expression.}$$

D'où l'énoncé suivant: D'un point infiniment voisin pris sur la tangente on abaisse une normale sur la courbe et le rayon de courbure a pour expression la limite du quotient obtenu en divisant le carré de la tangente par deux fois la portion de la normale comprise entre la tangente et la courbe.

2e expression du rayon de courbure. - Au lieu d'abaisser une normale sur la courbe ce qui n'est pas commode, prenons le point B infiniment voisin sur la courbe et abaissons la perpendiculaire BD sur la tangente: Prenons le point B' où elle rencontre le cercle de courbure. On a dans ce dernier:

Fig. 3.



$$\overline{AD}^2 = AF \times FG \quad \text{ou}$$

$$\overline{AD}^2 = B'D\,(2\rho - B'D)$$

négligeons B'D qui est infiniment petit en présence de 2ρ qui ne l'est pas, cela donne:

$$\lim. \overline{AD}^2 = BD \times 2\rho \quad \text{et}$$

$$\rho = \lim. \frac{\overline{AD}^2}{2\,B'D}$$

B'D est du 2e ordre et diffère de BD de la quantité BB' qui est du 3e ordre, puisque le cercle de courbure est osculateur; on peut donc prendre BD à la place de B'D et écrire

$$\text{(B)} \quad \rho = \lim. \frac{\overline{AD}^2}{2\,BD} \text{ qui est la 2}^{\text{e}}\text{ expression.}$$

D'où l'énoncé suivant: D'un point infiniment voisin pris sur la courbe on abaisse une perpendiculaire sur la tangente et le rayon de courbure a pour expression la limite du quotient obtenu en divisant le carré de la tangente par deux fois la longueur de la perpendiculaire.

§ 4. - *Rayon de courbure des sections coniques.*

Ellipse et Hyperbole.

Soit M un point de l'ellipse; MO le diamètre passant par ce point, et ON son conjugué. Soit b' le demi-diamètre OM, a' le demi-diamètre ON et θ leur angle.

Rapportons l'ellipse à ses deux diamètres conjugués, son équation est:

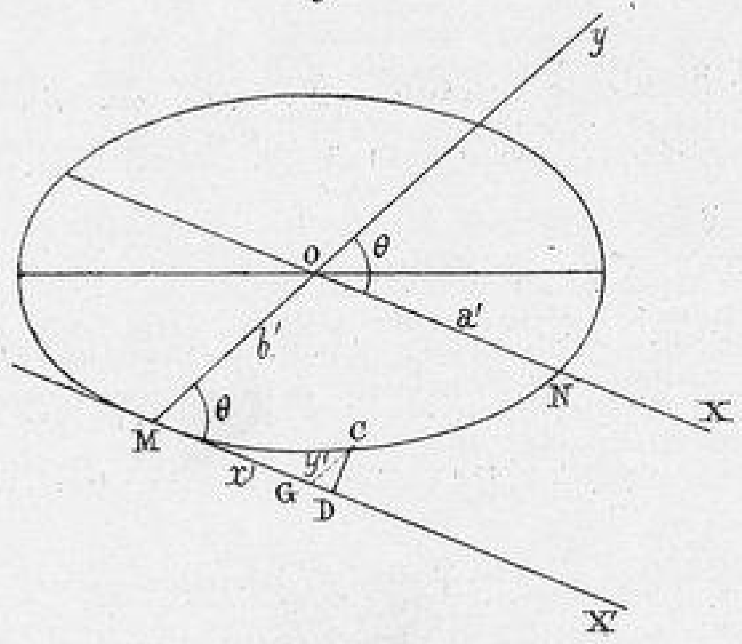
$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Transportons l'origine au point M. A cet effet, changeons dans l'équation y en $(y-b')$; l'équation devient:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{2b'y}{b'^2} = 0.$$

Prenons le point C infiniment voisin du point M qui est actuellement l'origine.

Fig. 4.



Soient x' et y' ses coordonnées. Abaissons la perpendiculaire CD sur la tangente qui est l'axe des x, on aura :

$$CD = y' \sin.\theta,$$

et le rayon de courbure a pour expression :

$$\rho = \frac{\overline{MD}^2}{2CD}. \text{ (2}^e\text{ expression)}$$

Mais, à la place de MD, on peut prendre MG, c'est-à-dire x' qui n'en diffère que de la quantité du 2^e ordre GD. On a en effet :

$$GD = GC \cos\theta, \text{ et GC est du 2}^e\text{ ordre.}$$

On aura donc :

$$(2)\quad \rho = \frac{x'^2}{2y'\sin.\theta}.$$

De l'équation (1) on tirera :

$$\frac{x'^2}{2y'\sin\theta} = \frac{2b'a'^2}{2b'^2\sin\theta} - \frac{y'a'^2}{2b'^2\sin\theta}$$

Supprimant le terme $\frac{y'a'^2}{2b'^2\sin\theta}$, qui tend vers zéro avec y', il vient :

$$(3)\quad \rho = \frac{a'^2}{b'\sin\theta}$$

D'après le théorème d'Apollonius, on a $a'b'\sin\theta = ab$, et par suite, $b'\sin.\theta = \frac{ab}{a'}$.

Donc en substituant

$$(4)\quad \rho = \frac{a'^3}{ab}$$

Le rayon de courbure d'une ellipse en un point a pour expression, le cube du demi-diamètre conjugué de celui qui passe par le point, divisé par le produit des demi-axes.

Remarque : Cette formule s'applique à l'hyperbole.

Rayons de courbure aux sommets.

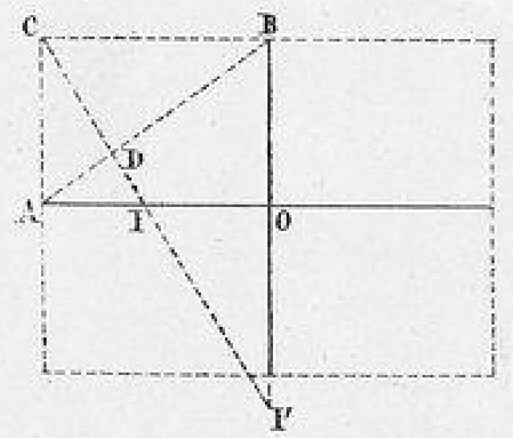
A l'extrémité du grand axe, on aura :

$$r = \frac{b^3}{ab} = \frac{b^2}{a}$$

A l'extrémité du petit axe, on aura :

$$R = \frac{a^2}{b}.$$

Fig. 5.



Ce qui conduit à la construction graphique suivante :

On mène la diagonale AB du rectangle construit sur les demi-axes et, en abaissant du sommet C du rectangle une perpendiculaire CD, sur cette diagonale, on a, par recoupement avec les axes, en I et I' les deux centres de courbure.

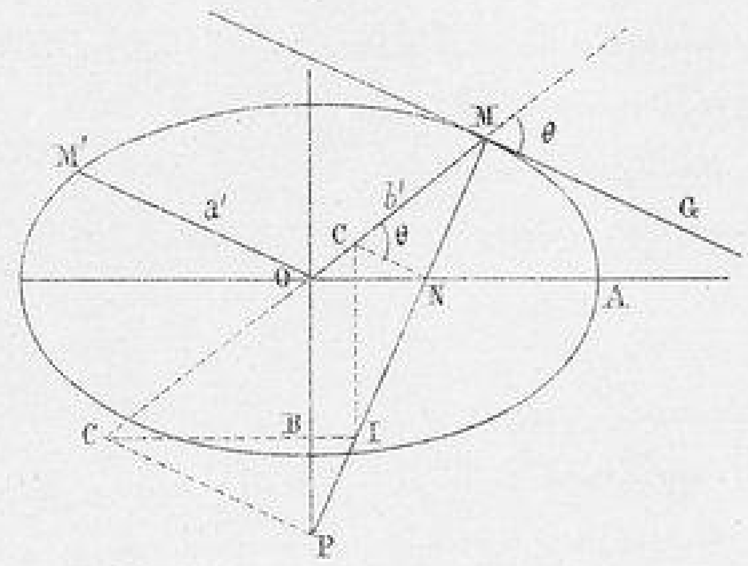
§ 5. – Construction graphique du rayon de courbure de l'Ellipse ou de l'hyperbole pour un point quelconque.

Supposons maintenant l'ellipse rapportée à ses demi-axes a et b. Soit M un point quelconque, et MN la normale recoupant les axes en N et P. Soit I le centre de courbure du point M ; b' le demi-diamètre OM et a' son conjugué OM' ; θ leur angle.

Par le point N, où la normale rencontre le grand axe, élevons une perpendiculaire NC,

à cette normale, c'est-à-dire une parallèle à la tangente MG et par conséquent aussi au diamètre conjugué OM'.

Fig. 6.



Par le point C où elle rencontre le diamètre du point M élevons une perpendiculaire CI sur le grand axe. Je dis que le point I où cette droite rencontre la normale est le centre de courbure.

En effet : nous avons (1) $MC = \frac{MN}{\sin\theta}$.

D'autre part les triangles semblables MCI et MOP donnent $\frac{MI}{MC} = \frac{MP}{MO}$ d'où :

(2) $MI = \frac{MP \times MC}{MO}$; remplaçons MC par sa valeur tirée de (1) et faisons $MO = b'$ il vient :

(3) $MI = \frac{MN \times MP}{b' \sin\theta}$

Mais on sait que le produit des segments MN et MP de la normale est égal au carré du ½ diamètre a', conjugué de celui du point M, on aura donc :

(4) $MI = \frac{a'^2}{b' \sin\theta}$, ce qui est l'expression de ρ trouvée en (3) au paragraphe 4.

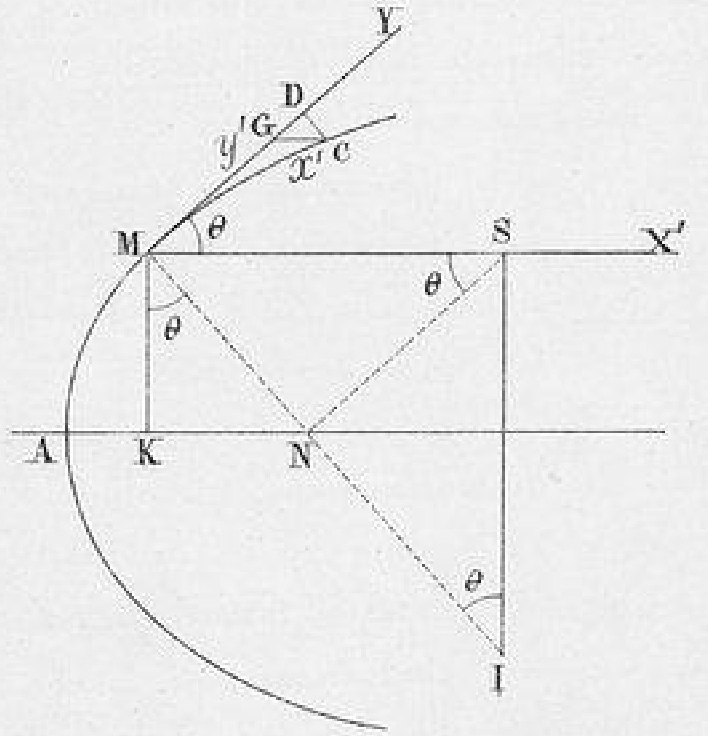
Remarque. – On aurait pu se servir du petit axe ; prolonger la normale en P sur le petit axe ; élever PC' perpendiculaire sur la normale et abaisser C'I perpendiculaire sur le petit axe.

Cette construction s'applique à l'hyperbole et même à la parabole, puisque cette dernière courbe peut être considérée comme la limite d'une ellipse dont le centre s'éloigne indéfiniment, tandis que le paramètre reste constant.

§6. – Rayon de courbure de la parabole.

Soit M un point de la parabole. Cette dernière, rapportée au diamètre Mx' et à la tangente My' en M, a pour équation : $y'^2 = 2p'x'$.

Fig. 7.



et l'on sait que le paramètre p' est égal à $\frac{p}{\sin^2\theta}$, θ étant l'angle de la tangente en M avec l'axe de la parabole.

Soit C un point infiniment voisin de M, x' et y' ses coordonnées, on aura, comme ci-dessus :

(1) $\rho = \lim.\frac{\overline{MG}^2}{2CD} = \lim.\frac{y'^2}{2x'\sin\theta}$,

De l'équation de la courbe, on tire :

$$\frac{y'^2}{2x'\sin\theta} = \frac{p'}{\sin\theta} = \frac{p}{\sin^3\theta},$$

donc : (2) $\rho = \frac{p}{\sin^3\theta}$

Construction graphique. – Soit N le point où la normale rencontre l'axe ; la sous-normale KN est constante et égale à p. On aura donc :

$$MN = \frac{p}{\sin\theta}.$$

Menons NS perpendiculaire sur la normale, on aura : $MS = \frac{MN}{\sin\theta} = \frac{p}{\sin^2\theta}$.

Enfin, élevons ST perpendiculaire sur l'axe, et prenons la rencontre, en I avec la normale. On aura : $SI = \frac{M\rho}{\sin\theta} = \frac{p}{\sin^3\theta}$

donc $\rho = MI = \frac{p}{\sin^3\theta}$.

On retrouve ainsi la construction indiquée pour l'ellipse et l'hyperbole.

Rayon de courbure au sommet.

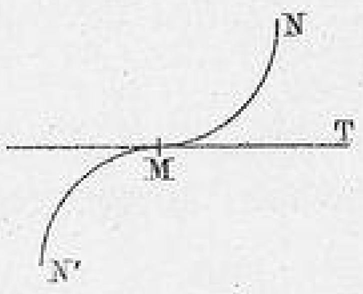
On aura $\theta = 90°$ et $\sin.\theta = 1$ et par suite $R = p$.

Le centre de courbure au sommet se trouve à une distance de ce sommet qui est le double de la distance du foyer.

2e Leçon.

§7. – Points singuliers des courbes planes.

Fig. 8.



1° Point d'inflexion. – En un pareil point, le rayon de courbure est infini ; le cercle de courbure se réduit à une droite. Aux points d'inflexion, la tangente a 3 points infiniment voisins de commun avec la courbe (fig. 8).

2° Point de rebroussement de 1ère espèce (fig. 9). – En un pareil point, la courbe est située de part et d'autre de sa tangente : De plus, elle reste toute entière d'un même côté de la normale AN.

Fig. 9.

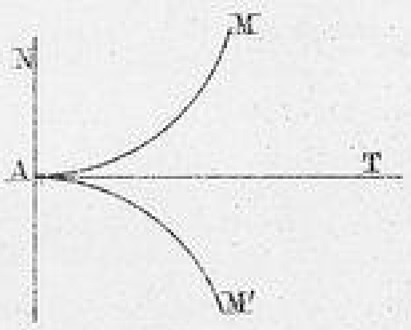
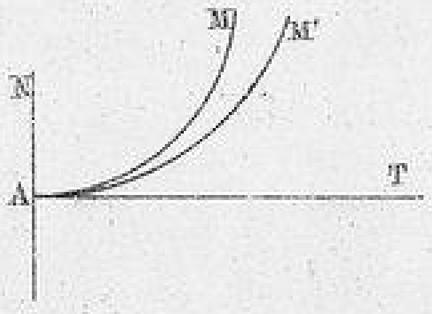


Fig. 10.



3° Point de rebroussement de 2e espèce (fig. 10). – En un pareil point, la courbe est située d'un même côté de sa tangente : De plus, elle reste d'un même côté de sa normale AN.

§8. – Enveloppes et enveloppées.

Le point qui sert à engendrer la courbe peut être lui-même défini par l'intersection de 2 courbes infiniment voisines se coupant en m, et, si l'on définit ainsi tous les points de la courbe, elle devient le lieu des intersections successives m, n, p, d'une suite de courbes infiniment voisines. Elle prend alors le nom d'<u>Enveloppe</u> : Les courbes qui servent à l'engendrer s'appellent : <u>Enveloppées</u>.

Fig. 11.

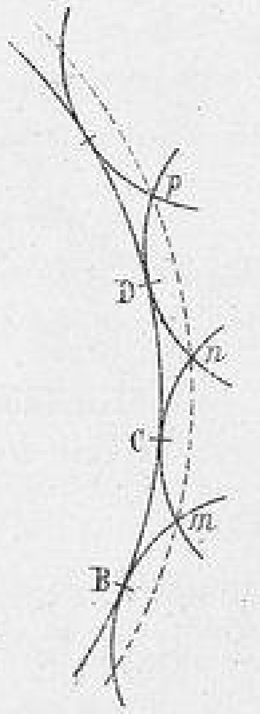
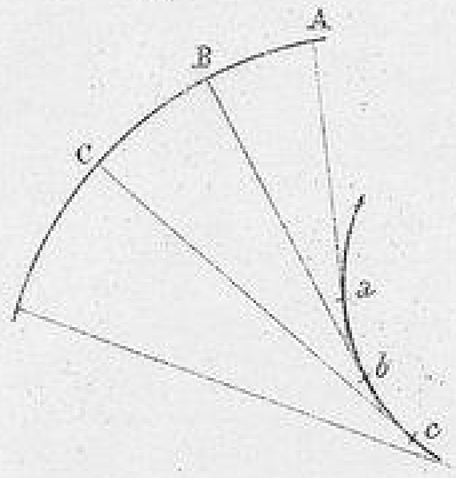


Fig. 12.



L'enveloppe est tangente à chaque enveloppée aux différents points dont elle est le lieu. (Voir la démonstration dans le cours d'analyse).

Une courbe est toujours l'enveloppe de ses tangentes.

§9. – Développée d'une courbe.

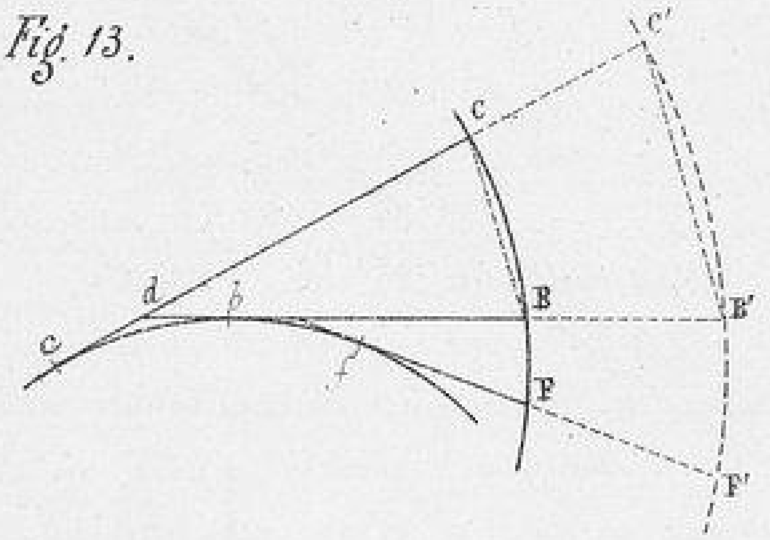
Considérons une courbe ABC et les normales en chaque point de cette courbe. Ces normales ont une enveloppe a b c, qui s'appelle

la Développée de la première courbe.

Nous savons que deux normales infiniment voisines se coupent au centre de courbure. La développée d'une courbe est donc le lieu de ses centres de courbure.

Théorème. – L'accroissement infiniment petit de longueur (bc) de la développée d'une courbe est égal à l'accroissement infiniment petit de longueur – (Cc — Bb) du rayon de courbure (fig. 13).

Fig. 13.



En effet, pour le démontrer, prouvons (fig. 13) que le rapport $\frac{Cc - Bb}{\text{arc } cb}$ a pour limite l'unité.

Les deux termes de ce rapport sont infiniment petits, et nous pouvons leur substituer des quantités qui n'en diffèrent que d'infiniment petits par rapport à eux.

A la place de (arc cb), on prendra $cd + db$ qui en diffère d'une quantité du 3^e^ ordre. (Tableau 17°). De plus on a:

$$Cc = Cd + dc \quad \text{et} \quad Bb = Bd - db$$

et, par suite, $Cc - Bb = Cd - Bd + cd + db$.

Mais Cd et Bd sont 2 normales infiniment voisines de la courbe CBF, et elles diffèrent d'une quantité du 3^e^ ordre, et peuvent être prises égales sans erreur pour la limite cherchée.

Nous ferons donc: $Cd - Bd = 0$

et nous aurons finalement: $Cc - Bb = cd + db$ et

$$\lim \frac{Cc - Bb}{\text{arc } cb} = \lim \frac{cd + db}{cd + db} = 1$$

C. Q. F. D.

Il résulte de ce théorème que, puisque le rayon de courbure s'accroît de quantités infiniment petites, toujours égales aux accroissements de la développée, il en sera de même pour des accroissements finis, qui seront la somme intégrale des précédents.

§ 10. – Développante d'une courbe. (même figure).

Imaginons que la tangente cC à la développée roule sans glisser sur cette dernière, c'est-à-dire se déplace de telle sorte que tous ses éléments infiniment petits viennent successivement s'appliquer sur des éléments d'égale longueur de la développée cbf; d'après ce qui précède, le point C engendrera précisément la courbe CBF donnée primitivement. On dit alors que la courbe CBF est une <u>développante</u> de la courbe cbf.

Prenons sur la tangente qui roule un autre point C'. Dans le mouvement, il engendrera une courbe C'B'F', qui sera une autre développante de cbf. Joignons CB et C'B'. Le triangle CdB est isocèle, à un infiniment petit près du 3^e^ ordre. Il en est donc de même du triangle C'dB', puisque CC' = BB'. Mais, à la limite, l'angle dCB est droit, puisque dC est une normale; il en est donc de même de l'angle dC'B', ce qui conduit aux principes suivants:

Une courbe (dbf) a une infinité de développantes. Ces dernières sont les trajectoires orthogonales de ses tangentes. Elle est la développée de toutes ses développantes.

Correspondance entre les points singuliers sur les courbes et sur leurs développantes. – Au point de rencontre d'une développante et de sa développée, la développante présente un rebroussement de 1ère espèce, avec un rayon de courbure nul. (fig. 14).

Fig. 14.

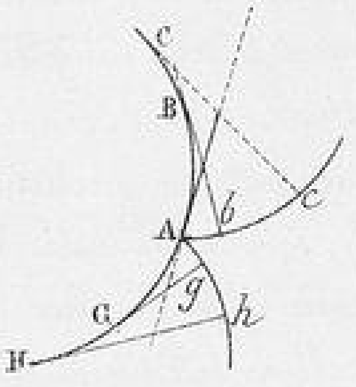


Fig. 15.

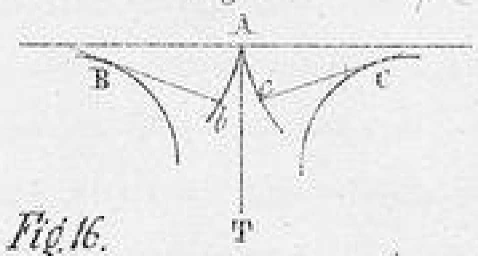
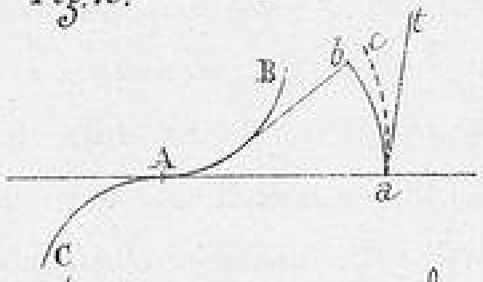


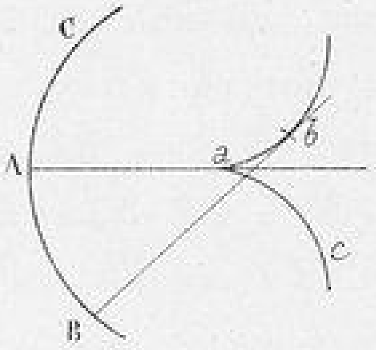
Fig. 16.



Si la développée présente deux branches infinies asymptotes à une même droite et d'un même côté, la développante présente un rebroussement de 1ère espèce et un rayon de courbure infini, avec tangente AT perpendiculaire à l'asymptote (fig. 15).

Si la développée présente en A une inflexion, la développante présente en a un rebroussement de 2e espèce (fig. 16).

Fig. 17.

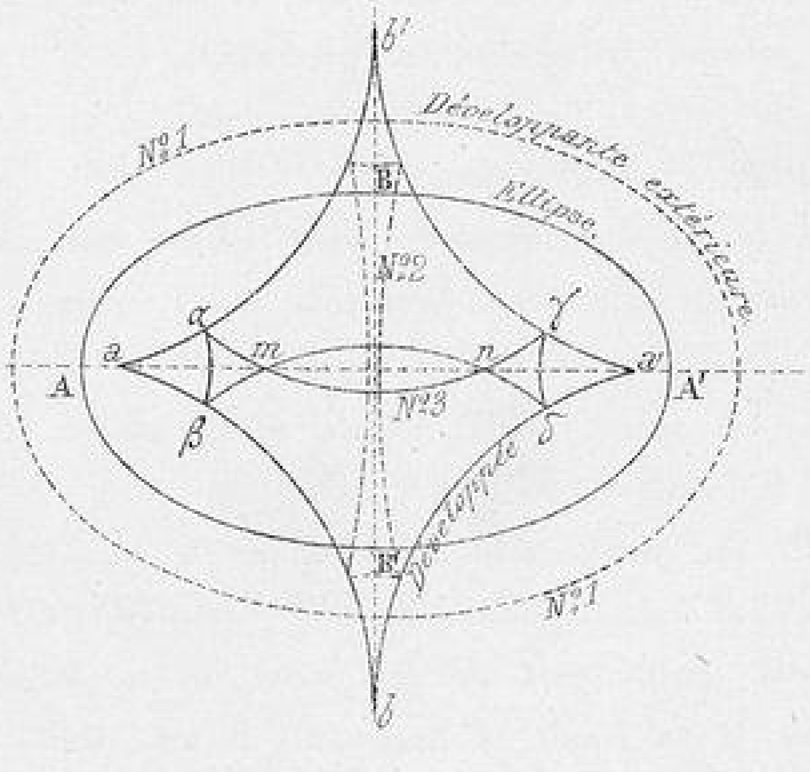


On nomme *sommet* d'une courbe un point pour lequel le rayon de courbure est maximum ou minimum. Le cercle de courbure y a 4 points communs avec la courbe au lieu de 3.

Si la développée présente en a un rebroussement de 1ère espèce, la développante présente en A un sommet et réciproquement (fig. 17). On voit, en effet, que le rayon de courbure bB de la développante décroît jusqu'en aA pour recroître ensuite. Donc A est un sommet de la développante. Réciproquement à tout sommet A d'une courbe BAC, répond un rebroussement pour la développée bac.

§ 11. – Application à l'ellipse (fig. 18).

Fig. 18.



La développée de l'ellipse présente en a a' b et b', quatre rebroussements de 1ère espèce, situés sur les axes et correspondant aux 4 sommets. Nous avons vu (fig. 5) comment on obtenait exactement ces 4 points, centres de courbure aux 4 sommets.

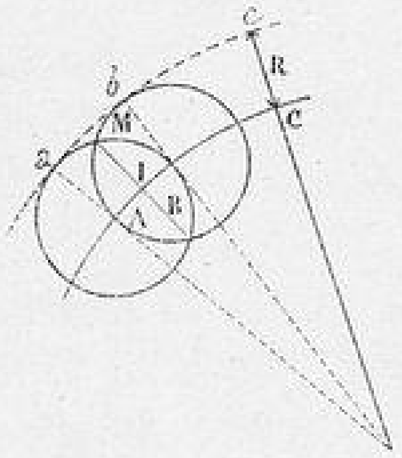
En cherchant des développantes de cette développée, on obtiendra l'ellipse et autant d'autres courbes que l'on voudra, les unes intérieures, les autres extérieures à l'ellipse. Ces formes sont très variables. Les unes, comme la courbe N° 1, sont des développantes extérieures à l'ellipse. Elles lui ressemblent et n'ont pas de rebroussements. Les autres, comme la courbe N° 2, ont 4 rebroussements situés sur la développée. Enfin d'autres, telles que la courbe N° 3, ont des rebroussements et des points doubles, tels que m et n.

§ 12. –

§ 12. – *Courbe enveloppe d'un cercle mobile, de rayon constant R.*

Soit ABC (fig. 19) la courbe décrite par le centre du cercle. Le point d'intersection M de deux cercles infiniment voisins est sur la perpendiculaire MI élevée sur la ligne des centres AB, laquelle devient, à la limite, tangente à la trajectoire ABC du centre.

Fig. 19.



Donc les points a, b, c ...... de l'enveloppe sont sur des normales à la trajectoire du centre et à une distance constante R, de cette dernière. Cette enveloppe est donc une développante de la développée de la courbe des centres.

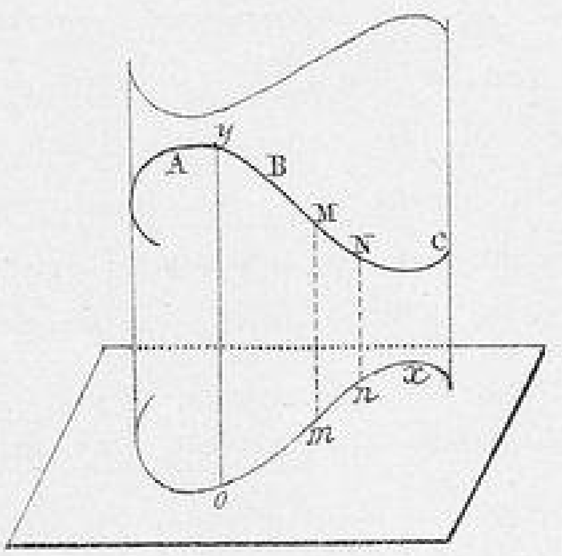
Ainsi, par exemple, un cercle mobile dont le centre se déplace sur une ellipse a pour enveloppe les courbes que nous venons d'étudier ci-dessus. Les rebroussements, tels que α, β, γ, δ, répondent aux points pour lesquels le rayon de courbure de l'ellipse est égal au rayon du cercle mobile.

Courbes gauches.

§ 13. – *Cylindre continu – Courbe gauche continue.*

Nous définirons un cylindre continu celui dont la directrice, supposée plane, est continue. Cela posé, soit ABC (fig. 20) une courbe gauche, c'est-à-dire ayant ses points non situés dans un même plan, nous dirons que cette courbe est continue : 1° Si elle est située sur un cylindre continu, et 2° Si, prenant pour axe des x la directrice courbe Ox du cylindre et, pour axe des y une des génératrices Oy, l'ordonnée ainsi définie, est une fonction continue de l'abscisse. On voit que la continuité ainsi définie sera bien réelle. Si l'on développait le cylindre sur un plan, la courbe gauche ABC deviendrait une courbe plane continue, telle que nous les avons définies.

Fig. 20.



Si une courbe gauche est à la fois sur deux cylindres continus, elle est elle-même continue.

Par conséquent, si une courbe gauche se projette à la fois, sur les deux plans de projection, suivant deux courbes planes continues, elle est elle-même continue dans l'espace. La réciproque est vraie.

§ 14. – *Tangente. – Plans tangents. – Plan osculateur. – Normales. – plan normal. – Normale principale.*

La tangente en un point se définit comme pour les courbes planes. C'est la limite MT d'une sécante MN, dont le point voisin N, tend à se confondre avec le point M.

Théorème. – *La tangente de la projection d'une courbe de l'espace est la projection de la tangente à cette courbe dans l'espace.*

Fig. 21.

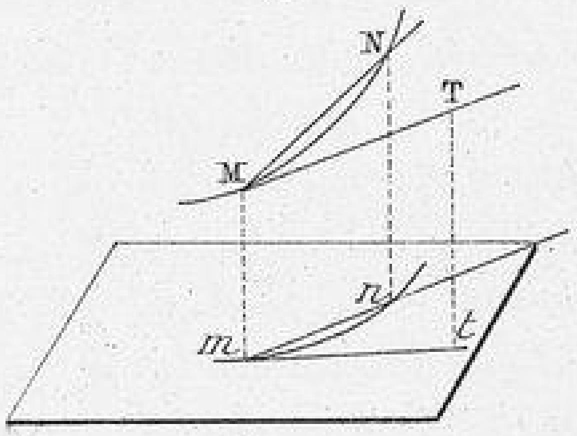
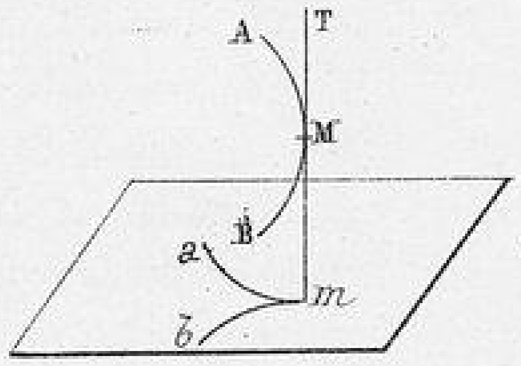
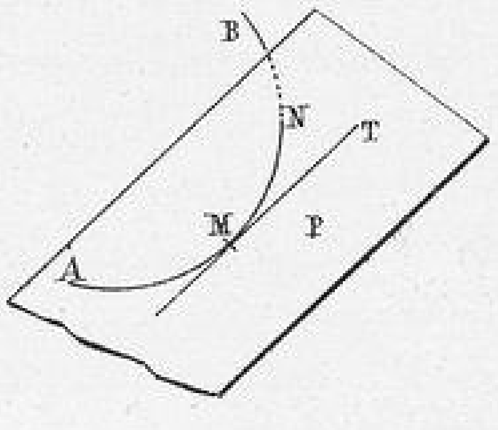


Fig. 22.



En effet MN se projette toujours suivant la sécante mn, et, lorsque le point N de l'espace se confond avec M, le point n se confond avec m, et, par suite, la ligne mn, a pour limite la tangente mt, projection de MT. Il y a exception lorsque la tangente MT est une projetante, parceque, alors, elle se projette toute entière en un point m. Nous verrons, dans ce cas, fig. 22, que la projection amb présente en m un rebroussement de 1ère espèce et nous apprendrons à trouver la direction de la tangente au point de rebroussement.

Fig. 23.



On nomme *plan tangent* à une courbe un plan quelconque P (fig. 23) mené par la tangente. Il y en a une infinité. Chacun d'eux, puisque la courbe est gauche, recoupera cette courbe en un autre point N. Imaginons que l'on fasse tourner le plan tangent autour de sa tangente jusqu'à ce que le point N se confonde avec M. A cet instant le plan tangent sera dit osculateur.

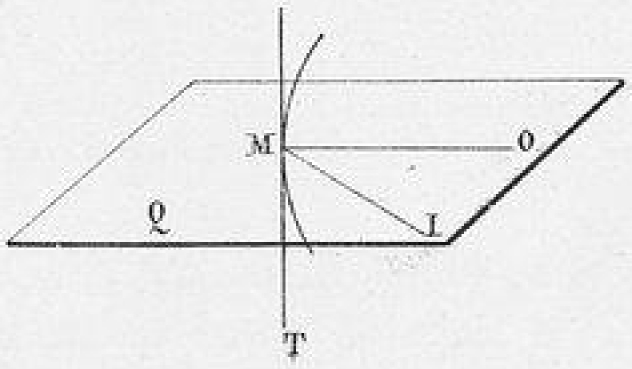
Le plan osculateur en un point est donc la limite d'un plan passant par la tangente à la courbe en ce point et par le point infiniment voisin.

Le plan osculateur est traversé par la courbe: En effet, prenons le plan lorsqu'il n'est encore que tangent en M; aux environs de M, la courbe est d'un certain côté du plan, au-dessus, par exemple; (Sur la fig. 23 on voit cette partie en trait plein) mais à partir du point N, où elle recoupe, elle passe au-dessous. (on la voit en ponctué). Lorsque N se rapproche de M, la portion MN diminue de plus en plus et, à la limite, la courbe passe en M d'un côté à l'autre du plan P, qui est devenu osculateur.

La réciproque est vraie: Si un plan tangent est traversé par la courbe, il est le plan osculateur.

La tangente en M étant déjà la limite d'un droite passant par 2 points infiniment voisins, on peut donc dire que *le plan osculateur est la limite d'un plan passant par 3 points infiniment voisins.*

Fig. 24.



La normale à une courbe gauche (fig. 24) est une perpendiculaire MI menée sur sa tangente. Il y en a une infinité. Elles forment un plan Q, qui est le *Plan normal.*

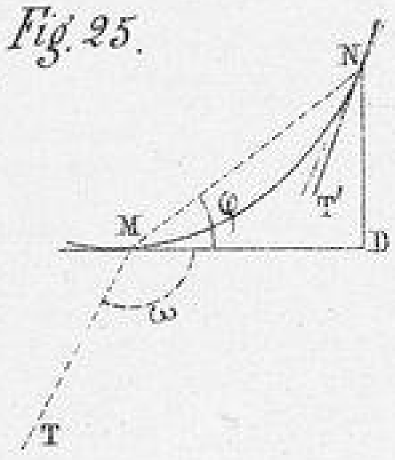
Parmi toutes les normales, celle qui est contenue dans le plan osculateur se nomme *la normale principale*.

§ 15. – Des infiniment petits dans une courbe gauche.

(a) Prenons également comme infiniment petit principal θ l'arc de courbe MN reliant deux points infiniment voisins; On prouve, comme pour les courbes planes:

1° Que l'angle ω des 2 tangentes en M et N est du 1er ordre. (On remarquera que ces 2 tangentes ne se coupent pas, puisque la courbe est gauche). Cet angle s'obtient en menant par M la droite MT parallèle à la tangente NT', et mesurant l'angle TMD;

Fig. 25.



2° Que l'angle φ de la tangente MT et de la sécante MN est du 1er ordre;

3° Que la distance ND du point N de la courbe à la tangente est du 2e ordre;

En effet, nous aurons, fig. 25, $ND = MN \sin\varphi$.

Or $MN = K\theta$, $\sin\varphi = K'\theta$, donc $ND = K''\theta^2$.

La réciproque de cette dernière proportion est vraie, c'est-à-dire que: Si une droite MD, passant par un point M d'une courbe gauche est à une distance du point N infiniment voisin, qui soit du 2e ordre, cette droite est tangente: Il suffit, pour le prouver de démontrer qu'elle est la limite de la sécante MN ou, ce qui revient au même, que l'angle $NMD = \varphi$ a pour limite zéro.

Or, par hypothèse ND est de la forme $K''\theta^2$ et MN de la forme $K'\theta$, et l'on a:

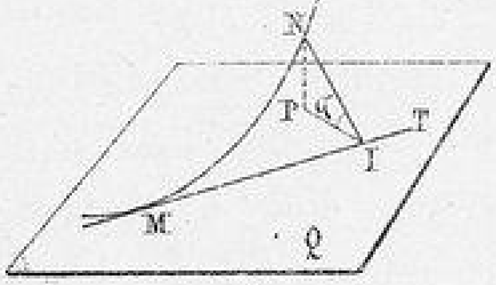
$$\sin\varphi = \frac{ND}{MN} = \frac{K''\theta^2}{K\theta} = K'\theta \text{ qui a pour limite zéro.}$$ C.Q.F.D.

En dehors de ces infiniments petits qui sont analogues à ceux des courbes planes, nous en avons d'autres spéciaux aux courbes gauches.

(b) *La distance d'un point d'une courbe gauche au plan tangent infiniment voisin est du 2e ordre.*

Soit Q un plan quelconque passant par la tangente MT c'est un plan tangent; soit N le point infiniment voisin et NP la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan. Menons NI perpendiculaire sur la tangente, et joignons IP. On aura, en désignant par α l'angle NIP (fig. 26),

Fig. 26.



$$NP = NI \sin\alpha;$$

Or NI est de la forme $K\theta^2$; l'angle α a une limite finie. Par suite NP est de la forme $K'\theta'^2$, et, par suite, du 2e ordre.

Mais, si l'angle α avait pour limite zéro, ce qui voudrait dire que le plan tangent Q se confond, à la limite, avec le plan MIN, c'est-à-dire avec le plan de la tangente MT et du point voisin N, autrement dit avec le plan osculateur, dans ce cas $\sin.\alpha$ serait au moins du 1er ordre et NP serait au moins du 3e ordre; Donc:

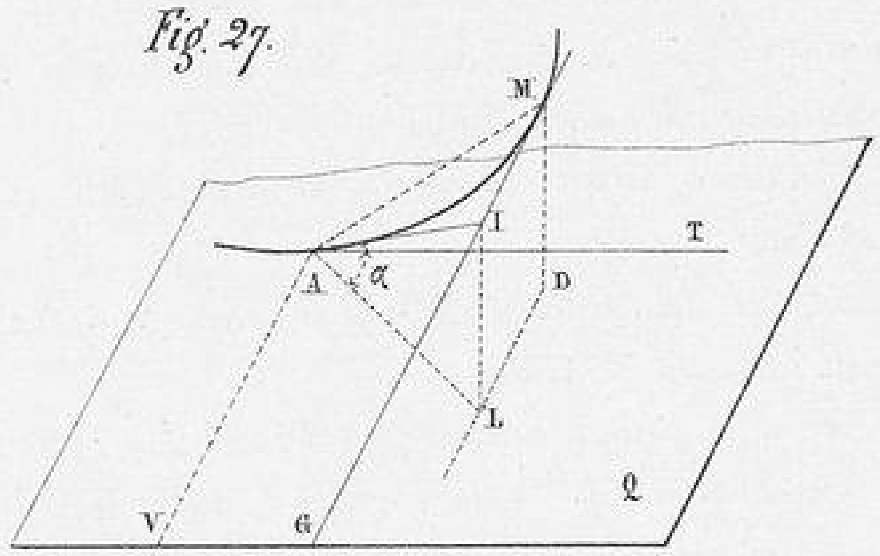
(c) *La distance d'un point d'une courbe gauche au plan osculateur mené par le point infiniment voisin est au moins du 3e ordre.*

La réciproque est vraie et nous permet de donner une autre définition du plan osculateur qui est la suivante:

(d). Le plan osculateur est la limite d'un plan mené par la tangente AT, en un point A parallèlement à la tangente MI au point infiniment voisin.

En effet : (fig. 27) Soit AT la tangente en A et MI la tangente en M ; menons AV parallèle à MI et considérons le plan Q mené par MV et par AT. Je dis que, à la limite, il est osculateur, et je le démontrerai si je prouve que la distance MD du point M à ce plan est du 3e ordre, c'est-à-dire si l'on a $MD = K''\theta^3$.

Fig. 27.



Menons AI perpendiculaire sur MG et, par suite sur AV ; on sait que AI est du 2e ordre et de la forme $K\theta^2$. Abaissons la perpendiculaire IL sur le plan Q ; elle est égale et parallèle à MD. Joignons AL. On aura :

$$IL = AI \sin\alpha.$$

Mais α est l'angle des 2 plans MAV et VAT passant tous deux par AV. Comme à la limite, la sécante AM se confond avec la tangente AT, ces deux plans tendent à se confondre et forment entre eux un angle α infiniment petit de la forme $K\theta$. Par suite, on aura :

$$MD = IL = AI \sin\alpha = K\theta \times K'\theta = K''\theta^3. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

§ 16. – (a) *Théorème. – La plus courte distance de deux tangentes menées à une courbe gauche, en deux points infiniment voisins est au moins du 3e ordre* (même figure).

On sait en effet que la plus courte distance de deux droites s'obtient, en grandeur, en abaissant d'un point I ou M de l'une d'elles, une perpendiculaire MD sur un plan Q mené par la première parallèlement à la seconde. Nous venons de voir que cette distance est du 3e ordre ; Donc le théorème est démontré.

(b) *Théorème réciproque.* (Voir plus loin son énoncé et sa démonstration au § 26).

§ 17. – Cercle et rayon de courbure d'une courbe gauche.

Le cercle de courbure en un point est la limite du cercle qui passe par ce point et par les deux points infiniment voisins. Ce cercle est donc contenu dans le plan osculateur. Son rayon est le rayon de courbure. Son centre est situé sur la normale principale du point considéré.

§ 18. – Projections diverses d'une courbe gauche.

(a) Lorsque la projetante d'un point M est contenue dans le plan osculateur de la courbe en ce point, la courbe présente une inflexion au point m, projection du point M.

Soit fig. 28, la projetante, que nous supposons dans le plan osculateur MXY. Soit XY la trace de ce plan osculateur sur le plan de projection Q. Nous savons que la courbe traverse le plan osculateur, et, par conséquent, sa projection amb passera d'un côté à l'autre de XY. Je dis de plus qu'elle est tangente à XY, puisque la tangente en M étant contenue dans le plan osculateur a pour projection mt ; la trace XY de ce plan.

(b). Lorsque la projetante d'un point M se confond avec la tangente, la courbe, en projection, présente un rebroussement de 1ère espèce.

Fig. 28.

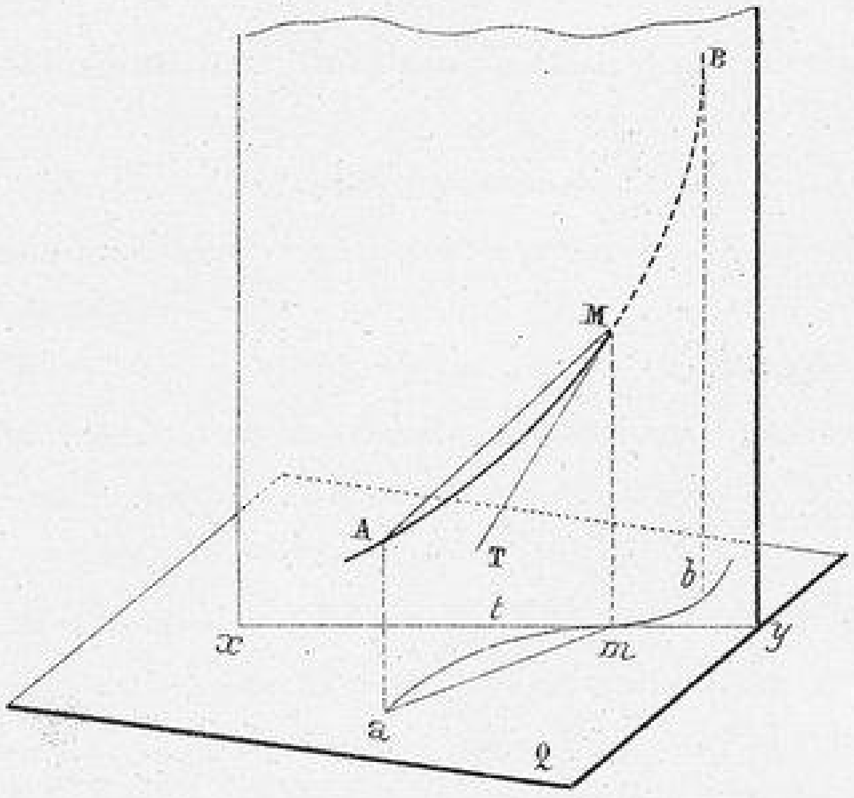
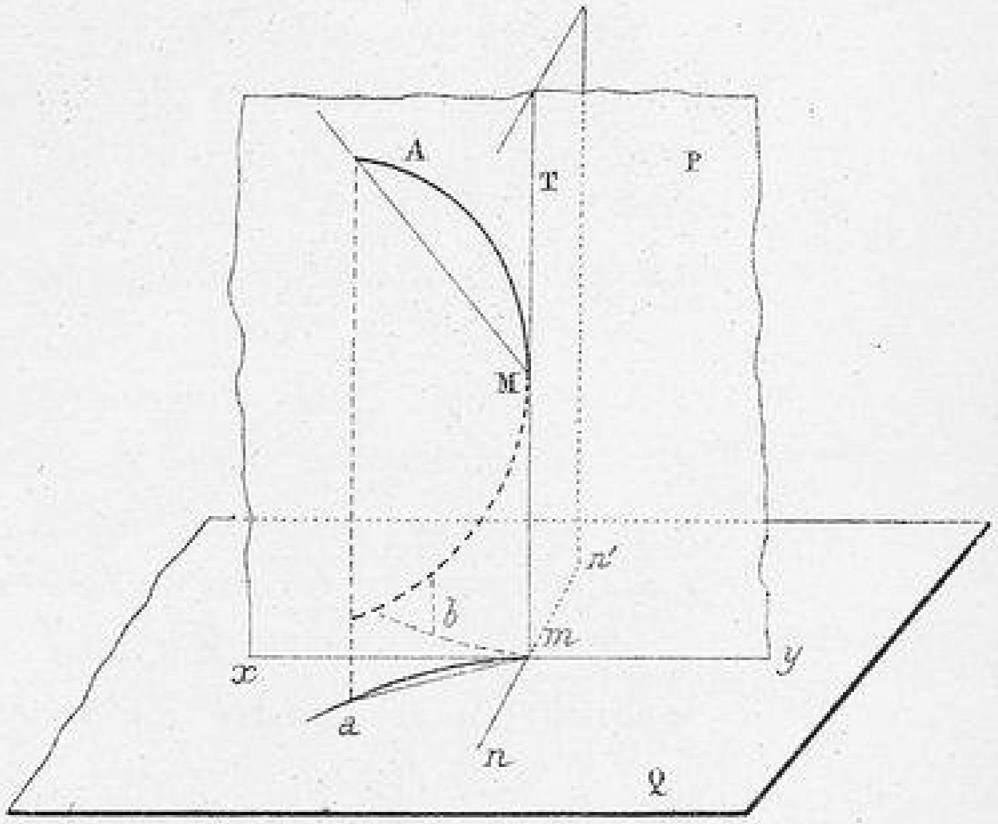


Fig. 29.



Soit M fig. 29, le point pour lequel la tangente TM est aussi la projetante Mm.

Menons le plan osculateur Mxy et soit xy sa trace sur le plan de projection.

Je dis: 1° Que xy est la tangente à la projection. En effet la sécante MA de l'espace a pour projection la sécante ma: à la limite elle devient projetée en un point unique m, ce qui ne prouverait rien; mais le plan amMA, dont la sécante am est la trace, est un plan qui passant par la tangente mM, contient le point voisin A; à la limite, c'est le plan osculateur; donc ma a pour limite xy; le 1er point est démontré.

2° La courbe amb, passe d'un côté à l'autre de sa tangente xy.

Cela résulte de ce que le plan osculateur est traversé par la courbe.

3° La courbe reste d'un même côté d'une droite telle que nn' différente de xy.

En effet considérons le plan nn'T. Il est tangent à la courbe; mais il n'est pas osculateur; il n'est donc pas traversé par la courbe et par suite amb est d'un même côté de nn'.

En résumé en m, la courbe est tangente à xy; elle passe d'un côté à l'autre de xy, et elle reste d'un même côté de nn'. Donc il y a en m un rebroussement de 1ère espèce. C.Q.F.D.

Remarques. – On peut concevoir que, pour certains points de la courbe, le plan osculateur ait 4 points communs au lieu de trois. Dans ce cas, le plan osculateur ne serait plus traversé par la courbe, et le rebroussement deviendrait de 2e espèce.

Surfaces. – Leur génération. – Leur classification.

§19. – *Génération d'une surface continue.*

Nous avons défini une courbe comme lieu d'un point mobile; nous définirons une

surface comme le lieu d'une courbe qui se déplace et qui même peut, tout en se déplaçant, se déformer suivant une loi déterminée.

La surface sera continue si la courbe mobile, que l'on nomme *génératrice*, est continue et si les courbes assujetties à diriger son mouvement, et que l'on nomme *directrices* sont également continues.

Nous donnerons de la continuité d'une surface une autre définition dont il nous sera plus facile de tirer les conséquences; et nous dirons:

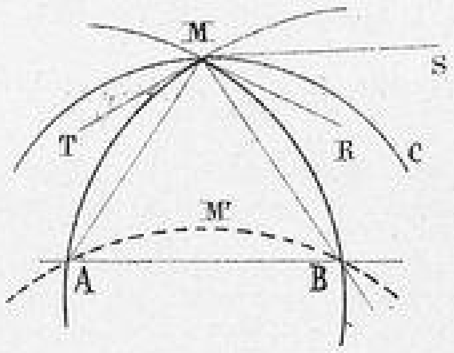
Une surface est continue lorsque son intersection par un cylindre continu quelconque est toujours une courbe continue, telle que nous les avons définies plus haut.

§20. – Plan tangent. – Normale.

(a) *Théorème. – Le lieu géométrique des tangentes à toutes les courbes continues que l'on peut tracer par un point sur une surface continue est un plan que l'on nomme le plan tangent à la surface en ce point.*

Soient MA et MB deux courbes passant par le point M. Soient MT et MR les tangentes à ces courbes au point M. Le théorème sera démontré si l'on prouve que la tangente MS à toute autre courbe MC passant aussi par le point M est comprise dans le plan des deux premières.

Fig. 30.



Par hypothèse, les 3 courbes MA, MB, MC sont continues. Imaginons un cylindre continu qui passerait par la 3ème courbe MC, et déplaçons-le parallèlement à lui-même, mais sans en changer la forme. Il coupera la surface suivant une courbe continue AM'B qui aura forcément pour limite, lorsque en repassant par le même chemin nous ferons revenir le cylindre à sa position première, la courbe MC. La courbe AM'B coupe les courbes MA et MB aux deux points A et B. Menons les sécantes MA, MB et AB, elles sont dans un même plan et y resteront toujours. Mais, à la limite, les droites MA et MB deviennent les tangentes MT et MR.

La sécante AB devient la tangente MS à la 3e courbe MC, puisque les deux points A et B tendent à se réunir en un seul au point M. Donc les trois tangentes sont dans un même plan. C. Q. F. D.

(b) *Conséquences*: 1° Le plan tangent en un point d'une surface sera déterminé par les deux tangentes à deux courbes tracées par ce point sur la surface: Dans la pratique, il convient de choisir convenablement ces courbes, de façon à pouvoir construire facilement leurs tangentes;

2° Si la surface admet des génératrices rectilignes, une droite étant à elle-même sa tangente, ces génératrices feront partie du plan tangent;

3° Si on coupe une surface et son plan tangent par un plan passant par le point de contact, la courbe et la droite d'intersection seront tangentes;

4° Si deux surfaces se coupent, la tangente en un point M de la courbe d'intersection est la droite d'intersection des deux plans tangents menés aux deux surfaces par le point considéré.

(c). *Normale*. – La normale en un point d'une surface est la perpendiculaire élevée par ce point sur le plan tangent.

Lorsque deux surfaces se coupent, la tangente en un point est perpendiculaire au plan des deux normales menées par ce point à chacune des surfaces.

§ 21. – Surface enveloppe d'une surface mobile.

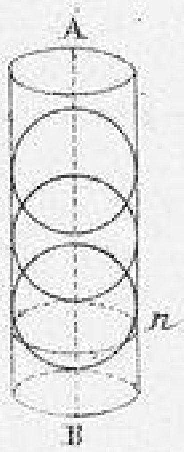
(a) *Définition*. – On peut considérer la courbe mobile qui est la génératrice de la surface, comme l'intersection de deux surfaces infiniment voisines, et, si l'on imagine ainsi une série de surfaces S, S', S'' infiniment voisines les unes des autres, leurs intersections successives forment une surface Σ qui est dite *l'enveloppe* des surfaces S, S'...... Ces dernières sont les enveloppées et les courbes d'intersection successives, dont la surface Σ est le lien se nomment les *caractéristiques*.

On démontre en analyse le théorème suivant :

(b) *Théorème*. – L'enveloppe Σ est tangente à l'enveloppée S tout le long d'une caractéristique.

§ 22. – Exemples de surfaces enveloppes.

Fig. 31.

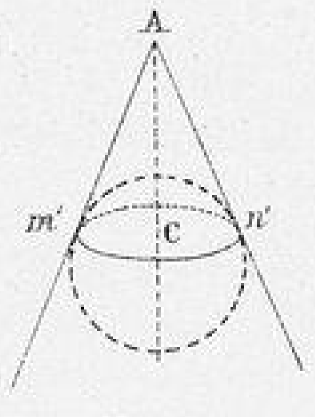


(a) *Cylindre*. – Une sphère dont le rayon reste constant et dont le centre se déplace sur une ligne droite AB a pour enveloppe un cylindre de révolution. (fig. 31).

(b) *Cône*. – Si le rayon varie, mais reste toujours proportionnel à la distance AC, parcourue par le centre, l'enveloppe est un cône de révolution. (fig. 32).

Dans le premier cas, les caractéristiques mn, sont des grands cercles de la sphère ; dans le second cas, les caractéristiques m'n', sont des petits cercles.

Fig. 32.



(c) *Surfaces développables*. – Si un plan mobile se déplace de manière à posséder une enveloppe, la surface enveloppe ainsi engendrée est dite développable.

Dans ce cas les caractéristiques étant les intersections de deux plans infiniment voisins, sont des lignes droites. La surface est donc réglée.

De plus l'enveloppée, c'est-à-dire le plan mobile, étant tangent à l'enveloppe c'est-à-dire à la développable tout le long de la caractéristique (qui est une génératrice rectiligne), il en résulte qu'une développable, ainsi définie, est une surface réglée qui admet un même plan tangent tout le long d'une même génératrice.

§ 23. – Classification des surfaces.

Les surfaces se divisent en deux grandes classes : les surfaces réglées, c'est-à-dire qui peuvent être engendrées par le mouvement continu d'une ligne droite ; et les surfaces non réglées.

Les surfaces réglées, elles-mêmes, se divisent :

1° En *surfaces développables* c'est-à-dire pouvant être déroulées de manière à s'appliquer sur un plan sans déchirure, ni duplicature ;

Et 2° En *surfaces gauches*, ne jouissant pas de cette propriété.

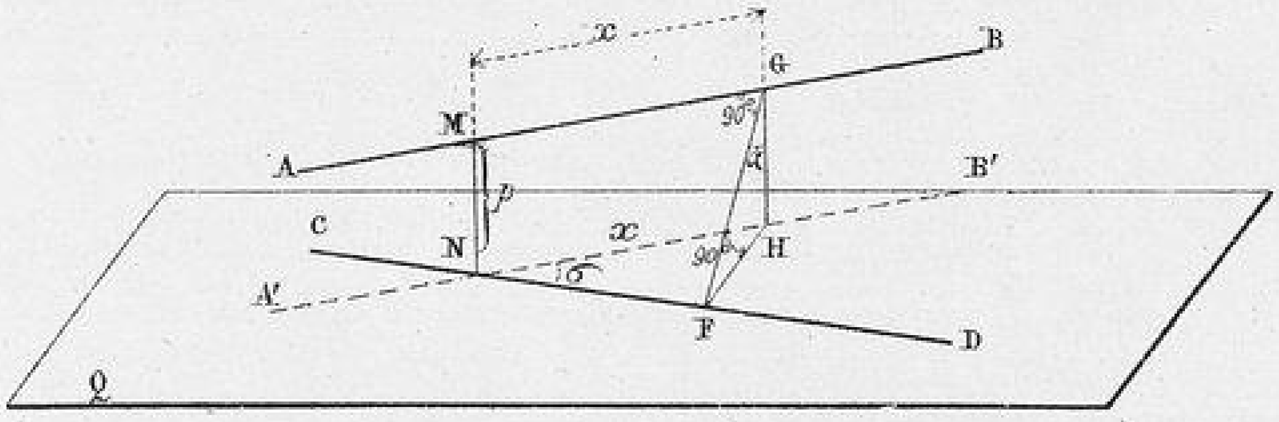
Étudions d'abord les surfaces réglées, et voyons quelles sont les conditions qu'elles doivent remplir pour être développables.

§ 24. – Loi de variation du plan tangent dans une surface réglée.

(a) Théorème de M. Chasles. – Paramètre de distribution. – Ligne de striction.

Soient, fig. 33, dans une surface réglée, AB et CD deux génératrices infiniment voisines et MN leur plus courte distance, que nous représenterons par la lettre p.

Fig. 33.



Pour obtenir cette plus courte distance, on sait que l'on mène, par la génératrice CD, un plan Q parallèle à l'autre génératrice. On projette cette dernière en A'B' sur le plan Q, et la plus courte distance NM = p passe par le point N d'intersection de CD et de A'B'.

Soit σ l'angle infiniment petit des deux droites CD et A'B'. Les deux quantités p et σ sont des infiniment petits qui peuvent être de même ordre. Dans ce cas, leur rapport $\frac{p}{\sigma}$ a une limite finie que nous désignerons par la lettre K et qui se nomme le *paramètre de distribution* de la surface, relatif à la génératrice AB. Si les quantités p et σ ne sont pas de même ordre, le rapport $\frac{p}{\sigma}$ a une limite nulle ou infinie.

Le point M, pied de la plus courte distance tend vers une position limite que l'on nomme le *point central* de la génératrice AB, et le plan tangent en ce point se nomme le *Plan central*.

C'est au point central que les génératrices AB et CD sont pour ainsi dire le plus près l'une de l'autre. Le lieu des points centraux des diverses génératrices se nommera la *ligne de striction de la surface*.

Cela posé, soit G un point quelconque de la génératrice AB. Prenons le point central M comme origine, et soit x la distance MG du point G au point central.

Abaissons GH perpendiculaire sur A'B', et menons GF perpendiculaire sur AB et rencontrant CD.

Par M et N on pourrait sur la surface faire passer une courbe à laquelle M.N serait tangente à la limite : Donc le plan tangent en M, c'est-à-dire le *plan central*, est défini par les deux droites MG et MN. Le plan tangent en G peut de la même façon l'être par les deux

droites MG et GF.

La ligne MG est donc l'arête du dièdre formé par les plans tangents en M et en G et, de plus, comme les deux droites HG et GF sont perpendiculaires sur cette arête, le rectiligne de ce dièdre est mesuré, en α par l'angle FGH.

Cela posé, on a :

$$\operatorname{tg}.\alpha = \frac{FH}{GH} = \frac{FH}{p}$$

$FH = x \operatorname{tg}.\sigma$; ou $FH = x \times \sigma$, puisque l'angle σ étant infiniment petit peut être pris au lieu de $\operatorname{tg}.\sigma$. On a donc :

$$\operatorname{tg}.\alpha = \lim. \frac{x\sigma}{p} = \lim. \frac{x}{\frac{p}{\sigma}} = \frac{x}{\lim.\frac{p}{\sigma}} = \frac{x}{K}.$$

$\operatorname{tg}.\alpha = \frac{x}{K}$; telle est la formule de Chasles.

Elle peut s'énoncer ainsi : *la tangente trigonométrique de l'angle formé par un plan tangent en un point avec le plan central est proportionnelle à la distance de ce point au point central et a pour expression le quotient de cette distance par le paramètre de distribution de la génératrice.*

Remarque : Le paramètre de distribution K est une longueur et non pas un rapport.

(b). *Discussion de la formule de Chasles. – Classification des surfaces réglées en surfaces gauches et surfaces développables, en cônes et en cylindres.*

1ère hypothèse : p et σ sont des infiniment petits de même ordre. Le paramètre de distribution $K = \lim.\frac{p}{\sigma}$ est fini, et le plan tangent varie en chaque point de la génératrice en obéissant à la formule : $\operatorname{tg}.\alpha = \frac{x}{K}$. La surface est gauche ; son plan tangent varie en tous les points d'une même génératrice.

2e hypothèse : p est infiniment petit par rapport à σ.

σ étant de la forme $M\theta$, p est de la forme $M'\theta^2$ et même $M'\theta^3$. (*)

Alors $K = \lim.\frac{M'\theta^3}{M\theta} = 0$. Le paramètre de distribution est nul.

Alors $\operatorname{tg}.\alpha = \frac{x}{K}$ est constamment infinie. Le plan tangent est toujours perpendiculaire au plan central, il est donc le même tout le long de la génératrice, et la surface est *développable*.

Pour $x = 0$, on a $\operatorname{tg}.\alpha = \frac{0}{0}$ forme indéterminée ; ce qui veut dire que, pour le point central sur les surfaces développables, le plan tangent est indéterminé. Le lieu des points centraux, ou la ligne de striction dans les surfaces développables portera le nom d'arête de rebroussement ; nous justifierons cette appellation.

3e Comme cas particulier du précédent, on peut avoir $p = 0$. Ce qui veut dire que les génératrices sont à des distances nulles les unes des autres. La surface est un cône. Le plan tangent est le même tout le long de la génératrice, sauf au sommet, pour lequel il est indéterminé.

4e σ est infiniment petit par rapport à p. On a $K = \infty$ et $\operatorname{tg}.\alpha = \frac{x}{K} = 0$. Le plan tangent est encore constant, comme étant partout confondu avec le plan central. Pour $x = \infty$ on a $\operatorname{tg}.\alpha = \frac{\infty}{\infty}$ forme indéterminée.

Mais une surface réglée dont les génératrices font entre elles des angles infiniment

---

(*) On démontre, en analyse, que σ étant du 1er ordre, si p n'est pas du 1er ordre, il ne peut être que du 3ème ordre, ou bien, s'il n'est pas du 3e ordre, il ne peut être ni du 4e, ni du 5e .... etc ; p est alors absolument nul.

petits, par rapport à leur distance est un cylindre qui est surface développable.

§25.- *Plan asymptotique d'une surface gauche.*

Faisons dans la formule $x = \infty$, il vient $\operatorname{tg.} x = \infty$.

Le plan asymptotique est donc perpendiculaire au plan central. Mais, en se reportant à la figure précédente, on voit que le plan Q est perpendiculaire au plan central NMG. On peut donc dire que le *plan asymptotique d'une génératrice est le plan mené par cette droite parallèlement à la génératrice infiniment voisine.*

Conséquences: 1° Dans les surfaces à plan directeur,[1] comme les génératrices sont toutes parallèles à un même plan, tous les plans asymptotiques sont parallèles à ce plan directeur;

2° Dans les surfaces à cône directeur[2], comme deux génératrices infiniment voisines de ce cône définissent son plan tangent, on voit que le plan asymptotique d'une génératrice de la surface est parallèle au plan tangent au cône directeur, le long de la génératrice parallèle de ce cône;

3° Si une surface gauche a un cône asymptote, c'est-à-dire un cône enveloppe de ses plans asymptotiques, ce cône est aussi un cône directeur, c'est-à-dire a ses génératrices parallèles à celles de la surface.

Surfaces développables.

3ème Leçon.

§26.- *Génération des surfaces développables.*

(a) La discussion du théorème de Chasles nous a conduit à appeler surfaces développables les surfaces réglées qui ont le même plan tangent en tous les points d'une même génératrice. Elles sont caractérisées par cette condition analytique que p (plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines) est infiniment petit par rapport à σ (angle de ces deux génératrices). Le paramètre de distribution $K = \lim. \frac{p}{\sigma}$ est donc nul.

Réciproquement, toujours d'après la formule de Chasles, si le plan tangent est invariable, puisque l'on a $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{K}$ et que α est variable, il faut que K soit nul ou infini.

Or K n'est infini que pour les cylindres; si donc la surface n'est pas cylindrique il faut que K soit nul, c'est-à-dire que p soit infiniment petit par rapport à σ.

Nous avons vu (§22 - c) que l'enveloppe d'un plan mobile était une surface réglée à plan tangent invariable, c'est-à-dire développable. Donc, réciproquement, toute surface développable peut être considérée comme l'enveloppe d'un plan mobile.

Nous allons donner un autre mode de génération d'une développable, basé sur le théorème suivant:

---

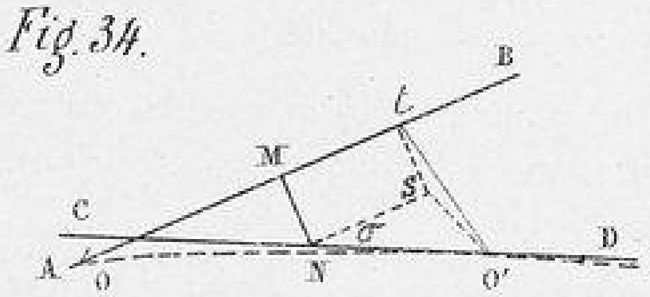
(1) On nomme surfaces réglées à plan directeur, celles dont toutes les génératrices sont parallèles à un même plan.

(2) Le cône directeur d'une surface réglée s'obtient en menant par un point quelconque S, de l'espace, des parallèles à toutes les génératrices de la surface.

(b). *Théorème* : (Réciproque du théorème sur les tangentes aux courbes gauches. (§ 16).

Lorsque, dans une surface réglée, la plus courte distance, p, de deux génératrices infiniment voisines, est infiniment petite par rapport à leur angle σ, la surface est le lieu des tangentes à la courbe des points centraux, c'est-à-dire à la ligne de striction.

Fig. 34.



Soient AB et CD les deux génératrices infiniment voisines et MN = p leur plus courte distance.

Soit O le point central de AB et O' le point central de CD. On remarquera que les longueurs OM et O'N sont infiniment petites puisque le point central O ou O' d'une génératrice est la position limite du pied M ou du pied N de la perpendiculaire commune MN.

Imaginons menée en OO' la courbe, lieu des points centraux.

Si du point O' nous abaissons une perpendiculaire O't sur AB et si nous prouvons que O't est du second ordre, cela démontrera (Tableau 9.) que AB est tangente à la courbe OO' et le théorème sera prouvé.

Or, menons NS parallèle à AB et tS perpendiculaire sur NS et par conséquent égale à la plus courte distance MN = p.

Le triangle NO'S est rectangle, et l'on a :

$$SO' = NO' \sin. \sigma.$$

NO' est du 1.er ordre, nous venons de le faire remarquer, σ est du 1.er ordre par hypothèse, donc le produit $NO'. \sin.\sigma$, ou O'S est du 2.e ordre.

D'autre part, St est, par hypothèse, d'ordre supérieur à σ, et par suite au moins du 2.e ordre.

Donc, dans le triangle O'St, un côté O't étant plus petit que la somme des deux autres, si ces deux autres sont au moins du 2.e ordre, il en est de même pour lui.

Par conséquent O't est du 2.e ordre et le théorème est démontré.

Remarques : 1.° Il résulte de ce théorème que dans une surface développable les génératrices sont tangentes à une courbe gauche. Or, nous avons vu (§ 16) que la plus courte distance de deux tangentes infiniment voisines dans une courbe gauche est du 3.e ordre. Nous justifions donc ainsi la remarque du § 24, savoir que si p n'est pas du 1.er ordre, il est, au moins, du 3.e ordre.

2.° Le plan tangent d'une développable est le plan osculateur de son arête de rebroussement. En effet (voir fig. 34) le plan tangent en t, contient, d'une part, la droite tO qui est la génératrice, et d'autre part la position limite de la droite tO'. C'est donc le plan qui passant par une tangente tO, à l'arête de rebroussement, contient aussi le point infiniment voisin O'; c'est donc le plan osculateur.

Résumé : En résumé, nous prendrons pour définir une surface développable l'une des trois définitions suivantes équivalentes entre elles :

1.ère définition : Une surface développable est l'enveloppe d'un plan mobile.

2.e définition : (Analytique) C'est une surface réglée dans laquelle la plus courte distance entre deux génératrices infiniment voisines est infiniment petite par rapport à leur angle, ou

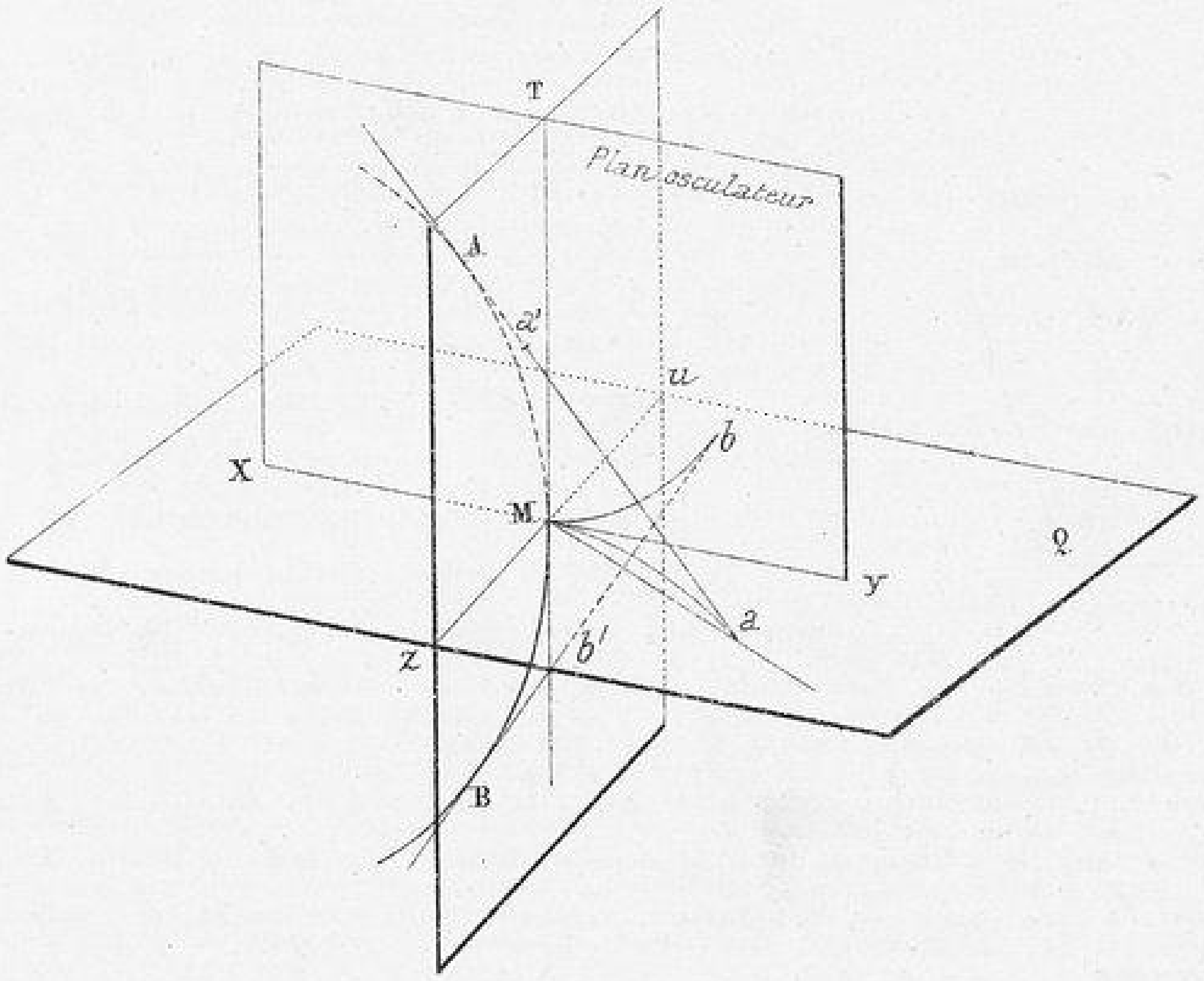
bien encore, dont le paramètre de distribution est nul pour toutes les génératrices[1]

3e définition: C'est la surface, lieu géométrique des tangentes à une courbe gauche, nommée arête de rebroussement de la surface.

§ 27. Théorème. Toute section plane faite dans une développable présente un rebroussement au point où elle rencontre l'arête de rebroussement.

Soit Q ce plan sécant rencontrant en M l'arête de rebroussement, et soit XY la trace du plan osculateur sur le plan sécant. Soient A et B deux points de l'arête de rebroussement situés de part et d'autre du point M et Aa, Bb, les tangentes à cette arête. Ce sont des génératrices de la développable, perçant en a et b le plan sécant. La courbe de section bMa est le lieu des points a et b.

Fig. 35.



Je dis: 1° que les deux branches bM et aM sont tangentes à la ligne XY et situées de part et d'autre de cette droite. En effet, menons la corde aM. Cette ligne est la trace d'un plan passant par les tangentes Aa et par le point voisin M; à la limite, ce plan est osculateur, et sa trace Ma, a pour limite la droite XY trace du plan osculateur. De plus, on sait que la courbe traverse son plan osculateur. Si donc nous supposons que A est en arrière de ce plan, B sera en avant. La tangente Aa viendra d'arrière en avant du plan et, par suite, a, sera en avant de XY, tandis que b sera en arrière. La première partie est donc démontrée.

2° Considérons un plan ZuT mené par la tangente en M et perpendiculaire au plan osculateur; soit Zu sa trace sur le plan sécant. La courbe aux environs du point M est toute entière d'un même côté de ce plan, puisqu'il n'y a que son plan osculateur qu'elle traverse. Elle est à gauche, par exemple; par suite, la tangente supérieure Aa percera le plan ZuT en a', situé au-dessus de Zu, ce qui prouve que a est à droite de Zu. La tangente inférieure Bb le percera au-dessus de Zu, ce qui forcera b à être également à droite de Zu. Par suite les 2 branches bM et aM auront

---

(1) On dit quelquefois que dans une développable deux génératrices infiniment voisines sont dans un même plan; il faut sous-entendre « à un infiniment petit, près, du 3e ordre ».

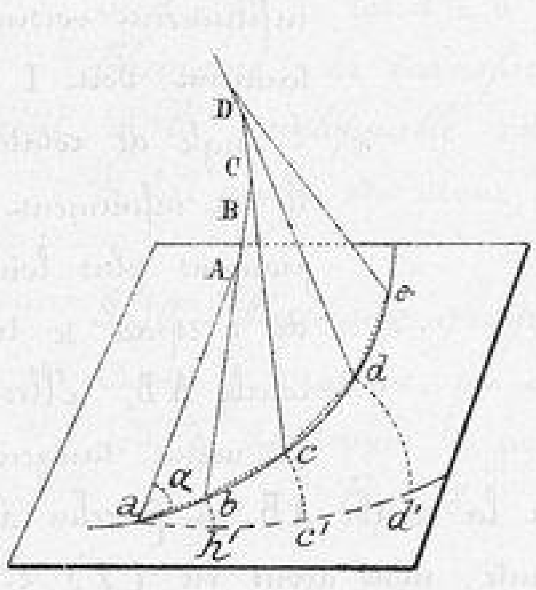
non seulement même tangente XY en M et seront situées de part et d'autre de cette droite, mais elles seront encore placées toutes deux d'un même côté de Zu. Il y aura donc en M un rebroussement de 1ère espèce. Ce théorème justifie le nom d'arête de rebroussement donné à la courbe gauche AMB.

L'arête de rebroussement divise la surface en deux parties, qui sont les 2 nappes de la développable.

§28. – Développement d'une surface développable.

Si nous considérons les plans tangents successifs infiniment voisins les uns des autres, ils forment un polyèdre circonscrit ou inscrit à la surface.

Fig. 36.



Pour exécuter le développement on prend un plan tangent P, (confondu ici avec une face Aab de ce polyèdre); on fait tourner la face suivant bCc autour de bB comme charnière jusqu'à ce qu'elle s'applique sur le plan abA prolongé. Dans ce mouvement elle entraîne tout le reste de la surface. Lorsque la génératrice Cc est venue s'appliquer sur le plan, c'est elle qui sert de charnière; puis ensuite dD.... etc....

Les triangles abA, bcC, etc...... vont donc successivement se reproduire en vraie grandeur sur le plan P. Ce qui nous permet de tirer les conséquences suivantes:

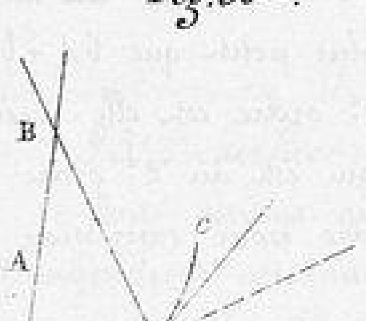
1° Un arc de courbe abcd (figure 36) se développera suivant une courbe plane ab'c', que l'on nomme sa transformée, et l'on aura ab = a'b', bc = b'c'...... Par suite, *la longueur de la transformée d'une courbe est la même que celle de la courbe avant le développement.*

2° Considérons la sécante infiniment petite ab. Elle fait avec la génératrice aA qui sert de charnière, un angle α qui se conservera dans le développement. Par suite: *l'angle sous lequel la tangente à une courbe rencontre la génératrice passant par le point de contact, se conserve dans le développement.*

Il en résulte que l'angle β sous lequel se rencontreraient deux courbes MA et MB, se conserve aussi dans le développement.

Remarque: Nous avions le droit pour trouver la longueur de la corde a,b,c.... de prendre la corde ab, au lieu de l'arc, car elle n'en diffère que d'une quantité du 3e ordre, négligeable pour l'intégration. Nous avions également le droit de prendre l'angle α que fait la corde avec la génératrice aA, car sa limite est bien l'angle TaA que fait la tangente. – L'angle α ne diffère de l'angle TaA que d'un infiniment petit du 1er ordre.

Fig. 36bis.

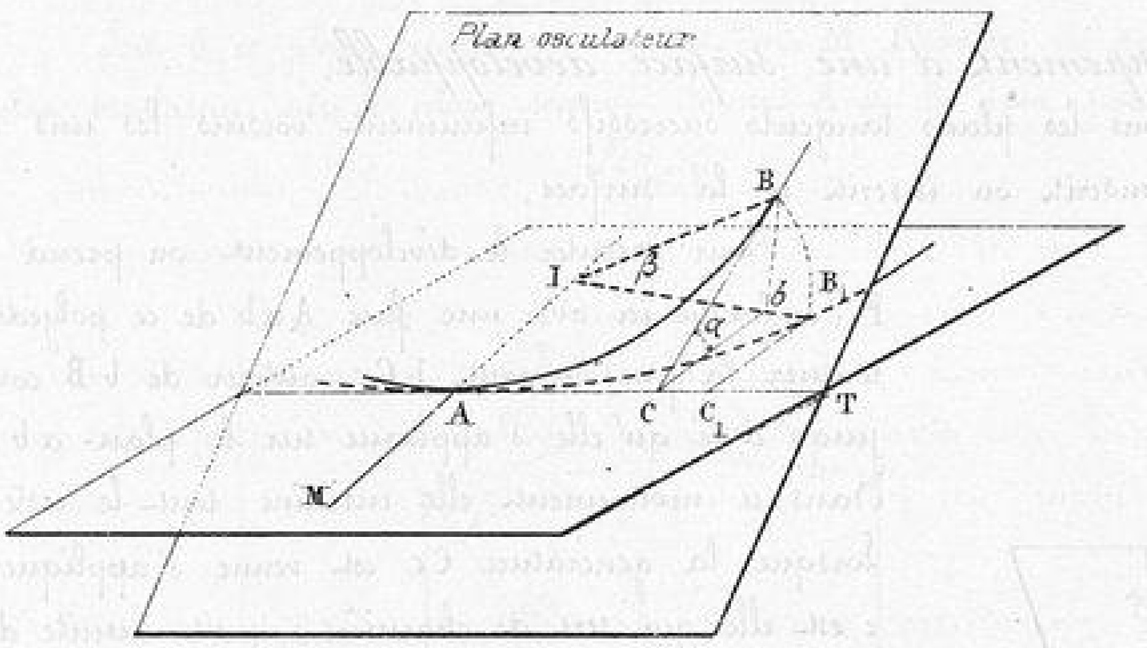


Mais s'il s'agit du rayon de courbure dont l'expression est $\rho = \lim. \frac{\text{arc } ab}{\omega}$, nous ne pouvons pas dire qu'il se conserve après le développement; cela nécessiterait que l'angle ω ne différât de l'angle ω' fait par les tangentes de la transformée, que d'une quantité du 2e ordre; or, nous n'avons prouvé l'égalité des angles qu'à un infiniment petit près du 1er ordre. Donc le rayon de courbure ne se conserve pas.

§ 29. — Rayon de courbure de la transformée d'une courbe tracée sur une développable.

Soit AB une courbe tracée sur une surface développable, AT la tangente au point A et B le point infiniment voisin. Le plan TAB est le plan osculateur de la courbe. Soit en outre

Fig. 37.



MAI la génératrice rectiligne de la surface qui passe par le point A. Le plan TAM est le plan tangent. Le développement de la surface se fait en prenant la génératrice MI pour charnière et rabattant par le procédé ordinaire le point B infiniment voisin en B_1 sur le plan tangent. Soit I le centre de rotation. L'angle de rotation δ, est l'angle BIB_1, il est infiniment petit, nous le prouvons plus loin. La courbe AB de l'espace se transforme en la courbe AB_1. Elles ont toutes deux la même tangente AT.

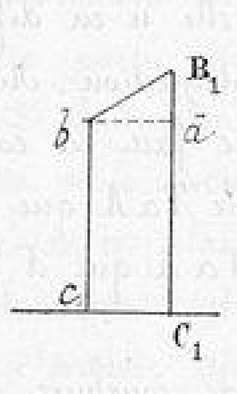
Cela posé : Soit ρ le rayon de courbure de la courbe AB et ρ' celui de AB_1. Si nous abaissons les perpendiculaires BC et B_1C_1 sur la tangente, nous avons vu (§ 3, 2ᵉ expression) que l'on avait : $\rho = \lim \frac{\overline{AC}^2}{2CB}$ et $\rho' = \lim \frac{\overline{AC_1}^2}{2C_1B_1}$.

Je dis que nous pouvons remplacer dans l'expression ρ' les longueurs AC_1 par AC et C_1B_1 par Cb.

En effet, BC est du 2ᵉ ordre et comme l'angle $Bcb = \alpha$, est l'angle du plan tangent et du plan osculateur et n'est pas infiniment petit, il en résulte que Bb, qui est égal à $\overline{BC} \sin\alpha$ est aussi du 2ᵉ ordre, cela prouve, en passant, que l'angle δ est infiniment petit du 1ᵉʳ ordre, car on a : $\sin \delta = \frac{Bb}{IB} = \frac{K\theta^2}{K'\theta}$.

Donc BB_1 est aussi du 2ᵉ ordre et bB_1 qui est du second ordre par rapport à l'arc BB_1 est donc du 4ᵉ ordre.

Il en est de même de cC_1 qui est compris entre deux lignes parallèles menées par b et B_1.



En effet, dans le trapèze cbB_1C_1 on a bB_1 qui est du 4ᵉ ordre ainsi que bd ; par conséquent dB_1 qui est plus petit que $bd + bB_1$, c'est-à-dire que la somme de deux quantités du 4ᵉ ordre est elle-même du 4ᵉ ordre, et est négligeable en présence de B_1C_1 qui est du 2ᵉ ordre.

Finalement, on peut donc prendre pour expression de ρ' :

$$\rho' = \lim \left(\frac{\overline{AC}^2}{Cb}\right).$$

Or, on avait :

$$\rho = \lim \frac{\overline{AC}^2}{2CB}$$, donc en prenant le quotient, on a :

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{BC}{bC} = \frac{1}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \rho' = \frac{\rho}{\cos\alpha}.$$

Le rayon de courbure de la transformée est égal au rayon de courbure de la courbe primitive

divisé par le cosinus de l'angle que fait le plan osculateur de la courbe avec le plan tangent à la développable.

Géométriquement, on peut exprimer ce théorème de la manière suivante: Si par le centre de courbure de la courbe primitive, on mène une perpendiculaire à son plan osculateur, elle perce le plan tangent au centre de courbure de la transformée.

Conséquences: Si $\alpha = 0$, c'est-à-dire si la courbe a pour plan osculateur le plan tangent à la surface, on aura: $\cos\alpha = 1$ et $\rho' = \rho$. Dans ce cas, le rayon de courbure sera le même avant et après le développement.

On sait que le plan tangent est osculateur à l'arête de rebroussement. Par conséquent, le rayon de courbure de l'arête de rebroussement se conserve dans son développement.

Si $\alpha = 90$, $\cos.\alpha = 0$ et $\rho' \frac{\rho}{0} = \infty$, donc:

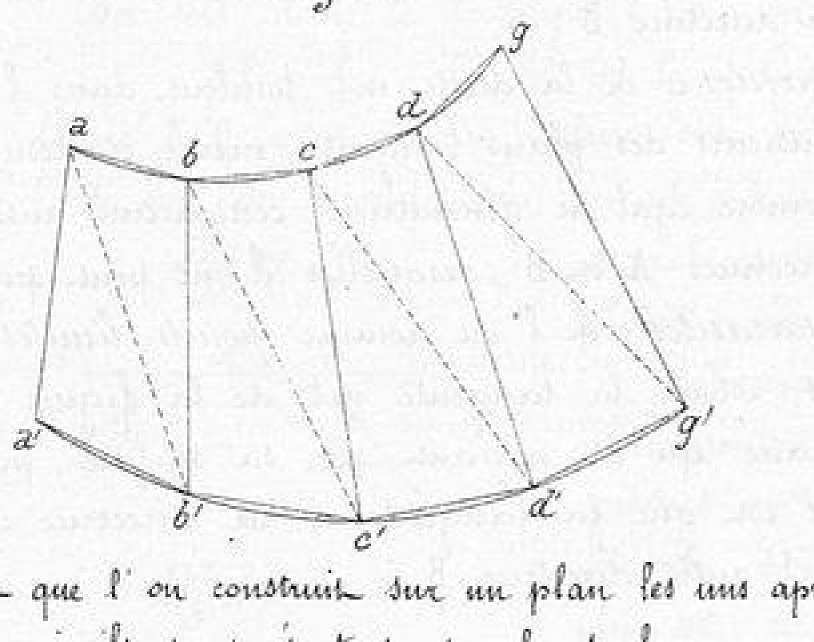
Théorème: La transformée présente une inflexion au point pour lequel le plan tangent à la développable est perpendiculaire au plan osculateur de la courbe de l'espace.

Si la courbe est plane, son plan est le plan osculateur.

§ 30. – Méthode graphique pour le développement des surfaces développables.

Dans la pratique, on opère approximativement le développement de la manière suivante: Soit à développer la portion de surface comprise entre deux arcs de courbe a b c d g - a'b'c'd'g' et deux génératrices a a' et g g'.

Fig. 38.



On inscrit dans la courbe a b c d un polygone dont les côtés sont assez petits pour que l'on puisse, sans erreur sensible, confondre l'arc avec la corde. On mène par les sommets a b c ..... les génératrices a a', b b', c c' ..... ce qui détermine un 2e polygone a'b'c'd' sur la 2e courbe. On joint les points de deux en deux, ce qui forme une série de triangles dont on cherche successivement les vraies longueurs des côtés, et que l'on construit sur un plan les uns après les autres, et à côté les uns des autres, dans l'ordre où ils se présentent sur la surface.

Si la surface est un cône ou un cylindre, cette méthode subit les simplifications qui sont connues.

§ 31. – Surface développable définie par deux directrices.

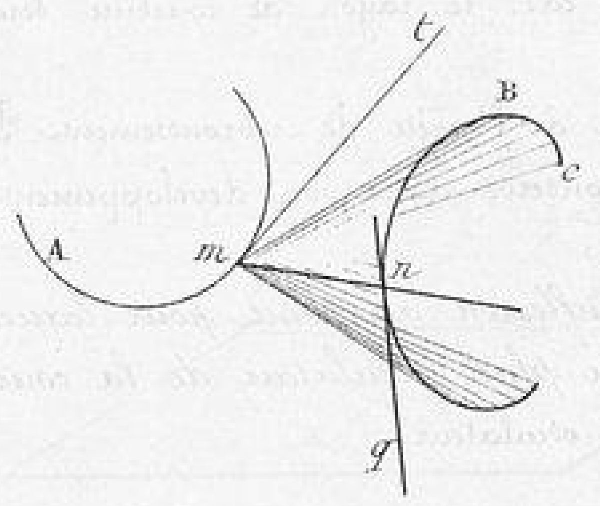
Nous verrons que pour définir le mouvement d'une droite il faut trois conditions. La droite engendrera ordinairement une surface gauche. Le fait d'être développable équivaut à une condition. Il suffira donc de deux conditions pour définir une développable. En général ces deux conditions se traduiront par l'existence, soit de deux courbes directrices, soit de deux surfaces directrices, nommées noyaux, soit d'un cône directeur et d'une courbe directrice, soit d'un cône directeur et d'une surface noyau.

Prenons le cas de deux courbes directrice: A et B et proposons-nous de trouver la

génératrice passant par un point m de l'une d'elles. Soit m n cette droite. Puisque la surface doit être développable le plan tangent doit être le même en tous les points et particulièrement aux points m et n.

Il faut donc que le point n soit choisi de telle sorte que la tangente n q, à la directrice B soit dans un même plan avec la tangente m t à la directrice A.

Fig. 39.



D'où nous déduirons la solution suivante :

1° On construit le cône qui ayant m pour sommet aurait B pour directrice.

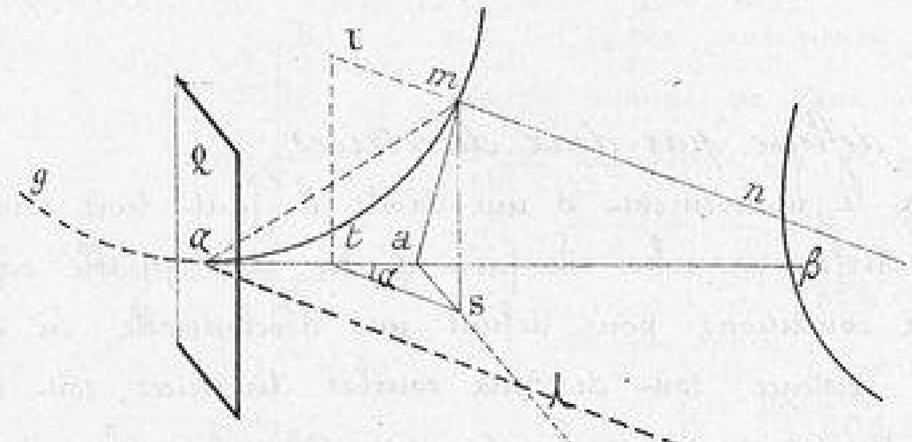
2° Par la tangente m t à la première directrice on mène un plan tangent à ce cône : il est tangent à la surface développable et la ligne de contact m n est la génératrice demandée.

En général, par la droite m t on pourra mener plusieurs plans tangents (deux, trois, etc.....) au cône, cela dépendra du degré de leur équation. Il y aura donc aussi plusieurs génératrices (deux, trois, etc....) distinctes, répondant à autant de nappes de la surface.

Ces génératrices se couperont deux à deux, ou trois à trois, etc..... suivant la courbe A, qui, à cause de cette particularité, se nommera une ligne multiple (double, triple, quadruple ......) de la surface. Il en sera de même de la directrice B.

Points limites - branches parasites. - Si la droite m t tombait dans l'intérieur du cône auxiliaire il pourrait se faire que plusieurs des plans tangents, menés ci-dessus au cône auxiliaire, cessassent d'exister, auquel cas un nombre égal de génératrices cesseraient aussi d'exister. Il peut donc y avoir des portions des directrices A et B, desquelles il ne peut partir aucune génératrice. On nomme ces portions des *branches parasites*, et l'on nomme *points limites* les extrémités α ou δ (fig. 40) de ces branches parasites. Mais la tangente m t de la figure 39 ne peut passer d'un côté à l'autre d'un cône auxiliaire qu'en passant par sa surface, par conséquent, ce qui caractérise un point limite α, c'est que la tangente à la directrice correspondante A rencontre (en γ, par exemple, fig. 40), l'autre directrice B.

Fig. 40.



§ 42. - Rebroussements de la ligne de striction.

Nous savons que la ligne de striction, dite aussi arête de rebroussement, est tangente à toutes les génératrices de la surface développable et qu'elle est le lieu des points centraux de ces génératrices.

Je dis que α est le point central de la génératrice limite α γ ; par conséquent que la ligne de striction

passe par le point α. Je dis aussi qu'elle y présente un rebroussement. Pour démontrer le premier point il suffit, par définition du point central, de prouver que le pied de la plus courte distance entre la génératrice $\alpha\,\gamma$ et la génératrice infiniment voisine $m\,n$, passe par α.

En effet, pour avoir la plus courte distance nous menons par α une droite αh parallèle à $m\,n$, ce qui avec $\alpha\,\beta$ définit un plan; nous abaissons $m\,s$ perpendiculaire sur ce plan et déplaçant ensuite $m\,s$ parallèlement à elle-même suivant la direction $m\,n$, nous obtenons en $t\,u$, la perpendiculaire commune mise en place.

Le point t, pied de cette perpendiculaire sur $\alpha\,\beta$ a pour position limite le point central de la ligne $\alpha\,\beta$; abaissons $m\,a$ perpendiculaire sur $\alpha\,\beta$; si je démontre que $a\,t$ est infiniment petit, comme a se confond à la limite avec α, j'aurai prouvé que le point central est le point α.

Or $\overline{ut}$ ou son égale $\overline{ms}$, est du 3^e ordre, comme plus courte distance de deux génératrices dans une développable; $\overline{ma}$ est du 2^e ordre comme distance d'un point m à la tangente infiniment voisine. Par conséquent, dans le triangle $a\,m\,s$, le côté $\overline{ms}$ étant plus grand que la différence des deux autres et étant lui-même du 3^e ordre, il faut que la différence entre $\overline{am}$ et $\overline{as}$ soit du 3^e ordre, ce qui revient à dire que $\overline{as}$ est aussi du 2^e ordre, c'est-à-dire de la forme $K\theta^2$: On peut ajouter que $\overline{as}$ est égal à $\overline{am}$, au point de vue infinitésimal.

Dès lors, dans le triangle $t\,a\,s$, on a:

$at = \frac{as}{tg\,\sigma}$, $\overline{as}$ est de la forme $K\theta^2$, σ est de la forme $K'\theta$, donc $\overline{at}$ est de la forme $K''\theta$, c'est-à-dire infiniment petit; le premier point est démontré.

Je dis, en second lieu, qu'au point limite α, la ligne de striction présente un rebroussement, autrement dit ne dépasse pas le plan normal Q.

Fig. 41.

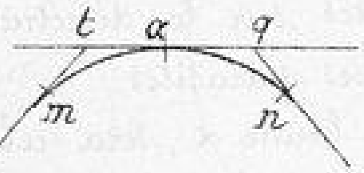
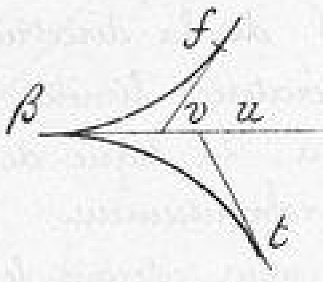


Fig. 42.



Remarquons d'abord que dans une courbe sans rebroussement (fig. 41) en α, deux tangentes infiniment voisines $m\,t$ et $n\,q$ recoupent la tangente $t\,q$ de chaque côté du point α, tandis que s'il y a rebroussement (fig. 42) en β, elles la recoupent d'un même côté et réciproquement.

Cela posé: Reportons-nous au mode de génération de la développable aux environs du point limite α.

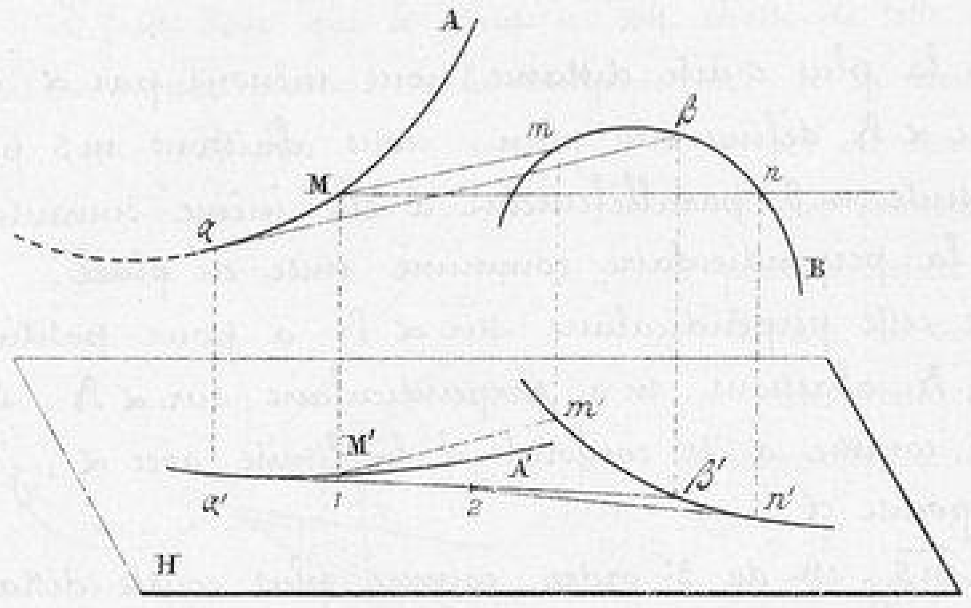
1° La tangente $\alpha\,\beta$ à la directrice A rencontre en β la directrice B. (fig. 43).

2° à un point M pris très voisin de α sur la partie non parasite de A, répond deux génératrices $M\,m$ et $M\,n$ dont les départs m et n, sur la directrice B sont de part et d'autre de β. Projetons le tout, fig. 43 sur un plan quelconque H. $\alpha'\beta'$ est la projection de la tangente en α à la ligne de striction; les deux génératrices infiniment voisines $M\,m$ et $M\,n$, se projettent en $M'm'$ et $M'n'$.

Il est évident sur la figure qu'elles rencontrent en 1 et 2 situé d'un même côté

de α', la tangente $\alpha'\beta'$.

Fig. 43.



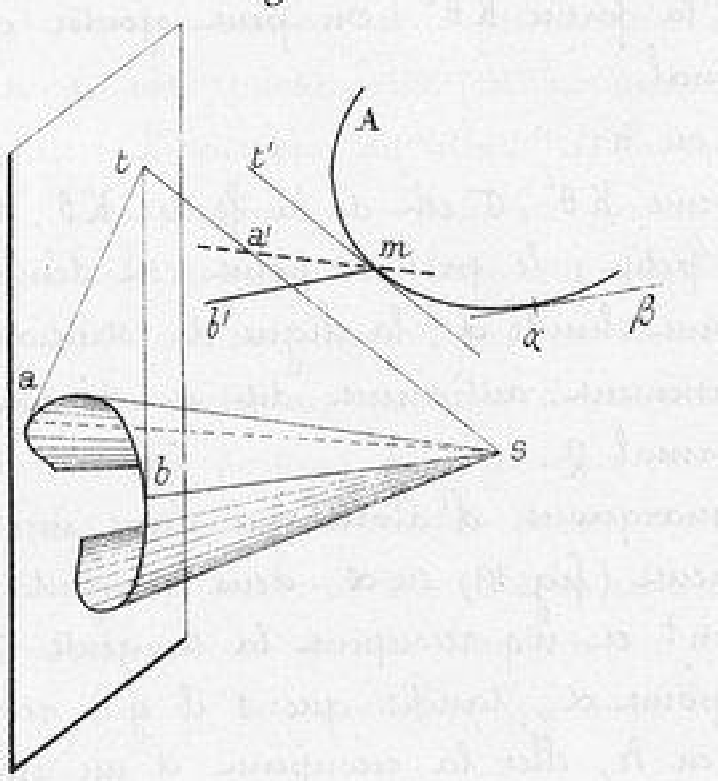
Donc, d'après la figure 42, il y a rebroussement en projection, et par suite dans l'espace, car le plan de projection H était quelconque.

§ 33. – Surface développable définie par une directrice et un cône directeur.

On nomme cône directeur d'une surface réglée, le cône obtenu en menant par un point S de l'espace, pris comme sommet, des droites parallèles aux génératrices de la surface.

Soit A la directrice et m un de ses points ; prenons la tangente mt et menons au cône, par le procédé connu, des plans tangents Stb, Sta ...... parallèles à cette droite.

Fig 44.



Les génératrices de la développable passant par m, seront les deux droites ma' et mb', parallèles à Sa et Sb. De plus le plan tangent à la développable tout le long de ces génératrices sera parallèle au plan tangent correspondant du cône.

Il y aura aussi dans ce mode de génération, des points limites sur la directrice et par conséquent aussi des branches parasites.

Un point limite α, sera celui pour lequel la tangente αβ à la directrice sera parallèle à une génératrice du cône directeur.

Si l'on construisait par le point S, un autre cône obtenu en menant des parallèles aux tangentes de la directrice A, les intersections des deux cônes donneraient les directions des génératrices limites.

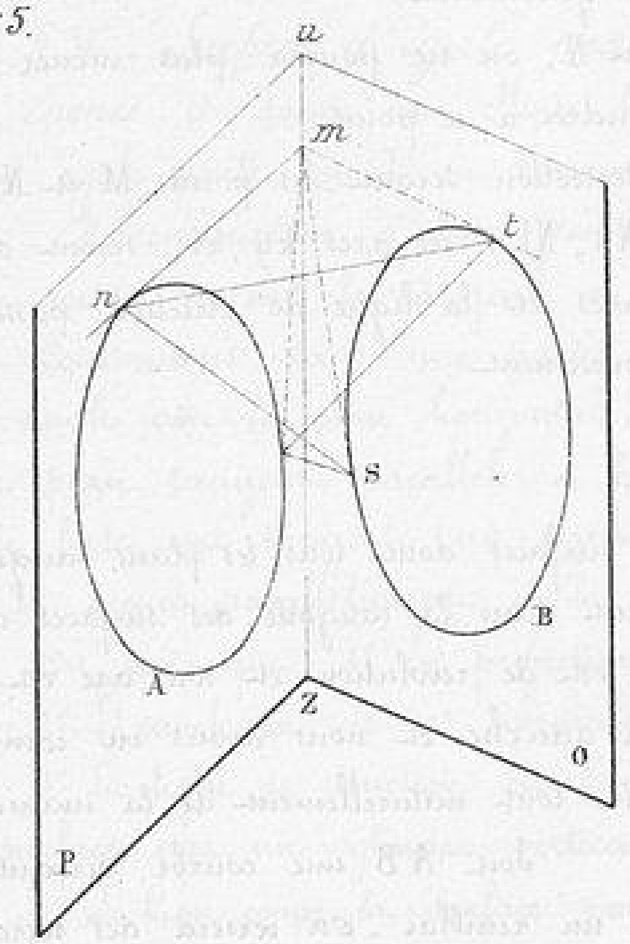
Tout ce que nous avons dit plus haut s'appliquera. La ligne de striction passera par les points limites de la directrice et y présentera un rebroussement.

Parmi les surfaces développables à cônes directeurs, nous citerons les surfaces d'égale pente. Dans ces surfaces la directrice est quelconque, et le cône est de révolution. Si cet axe est vertical on voit que les plans tangents à la surface font tous le même angle avec le plan horizontal ; ils ont donc la même pente, ce qui justifie la dénomination. Nous étudierons plus loin une surface d'égale pente dont la directrice est une ellipse horizontale.

Nous commencerons d'abord par faire quelques remarques sur les surfaces suivantes :

4^e^ Leçon. § 34. – Surface développable dont les deux directrices sont deux coniques A et B situées dans deux plans différents P et Q.

Fig. 45.



Soit ZU l'intersection des 2 plans. On prendra un point quelconque m sur ZU ; de ce point on mènera deux tangentes à chacune des coniques.

Soit mn, mp, les tangentes à la 1^re^ conique ; ms, mt, les tangentes à la 2^e^. En joignant les points deux à deux, on obtiendra quatre génératrices : nt, ns, tp, sp.

Remarque : On voit que les deux coniques sont deux lignes doubles de la surface, puisque chacun de leurs points sert de départ à deux génératrices.

Cette surface présentera quatre nappes, lieux géométriques de chacune des quatre génératrices trouvées plus haut.

Si l'une des coniques A est tangente au plan de l'autre B, deux des génératrices ps et pt sont dans le plan Q et y seront toujours.

La développable comprendra donc deux fois le plan Q, c'est-à-dire le plan de la conique qui n'est pas tangente. (fig. 46).

Fig. 46.

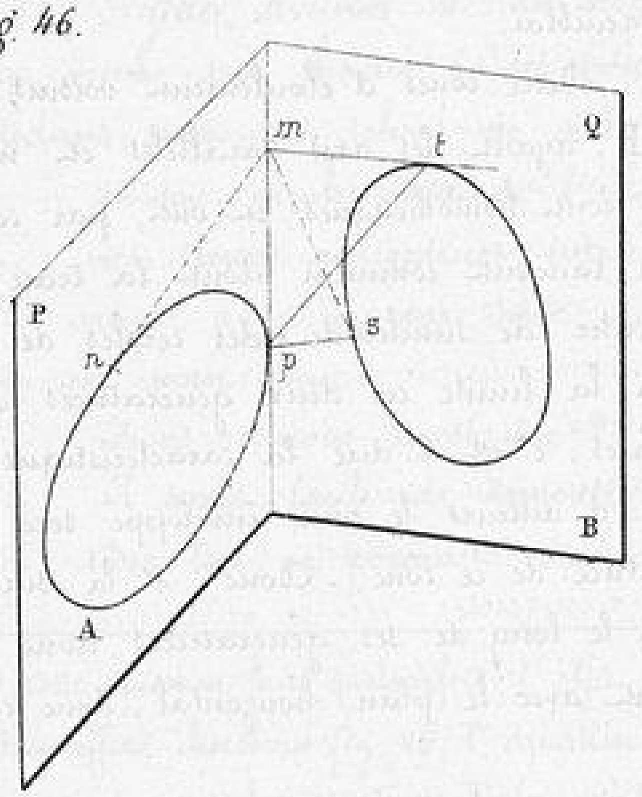
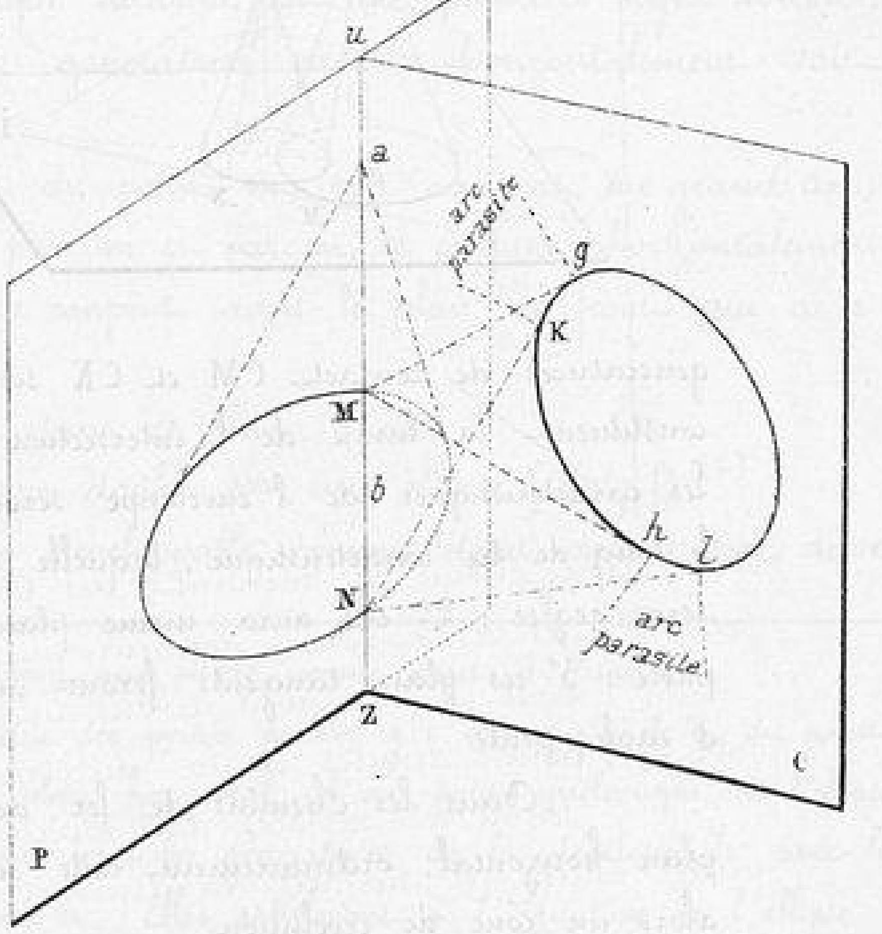


Fig. 47.



En dehors de ce plan la surface n'aura plus que deux nappes.

Enfin si l'une des deux coniques directrices coupe le plan de l'autre aux points M et N, la surface présentera les particularités de branches parasites indiquées plus haut.

En effet : prenons un point quelconque a, sur l'intersection ZU des deux plans. Si le point a

est en dehors des deux points M et N, on pourra mener de ce point deux tangentes à chacune des coniques, et l'on en déduira, comme ci-dessus 4 génératrices.

Si l'on prend le point b, entre M et N, on ne pourra plus mener de tangentes à la conique du plan P. – Aucune génératrice ne répondra à ce point.

Les derniers points utiles pris sur l'intersection seront les points M et N.

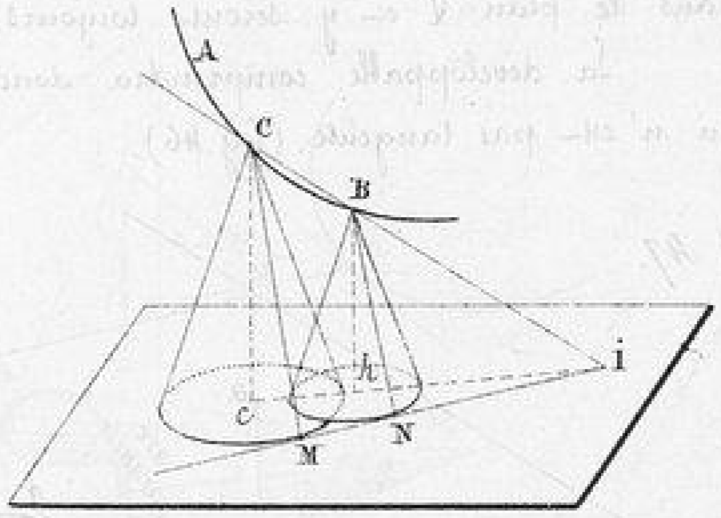
Menons les tangentes limites Mg, Mh, Nk, Nl; les arcs kg, hl, seront des arcs *parasites*; aucune génératrice ne pourra s'appuyer sur ces arcs et la ligne de striction passe par les points limites g. k h. l, et y présente, en chacun d'eux, un rebroussement.

§ 35. – Surfaces d'égale pente.

On nomme surfaces d'égale pente des surfaces dont tous les plans tangents font le même angle avec le plan horizontal: Ces surfaces rentrent dans la catégorie des surfaces développables à cône directeur. Seulement dans ce cas le cône directeur est de révolution et son axe est vertical. On devra, pour les définir, se donner une directrice plane ou gauche et nous avons vu comment on les engendrait.

Dans les travaux publics on les produit tout naturellement de la manière suivante: (fig 48).

Fig 48.



Soit AB une courbe servant de couronnement à un remblai. – On versera des terres des différents points C.B... de la courbe AB. En se répandant, cette terre formera des cônes d'éboulement d'angle à la base constant, accolés, dont l'enveloppe formera la surface du remblai.

Deux cônes d'éboulement voisins, de sommets C et B, ayant les axes parallèles et même angle à la base sont homothetiques et ont, par conséquent, un plan tangent commun dont la trace MN passe par le centre de similitude i des cercles de base. – Les deux génératrices de contact CM et CN sont parallèles; à la limite ces deux génératrices se confondent et constituent la limite de l'intersection des deux surfaces, c'est-à-dire la caractéristique de leur enveloppe. Les caractéristiques de l'enveloppe seront des droites: d'ailleurs le cône enveloppé sera tangent tout le long de la caractéristique, laquelle est une génératrice de ce cône. – Donc: 1° la surface du remblai sera réglée; 2° elle aura même plan tangent tout le long de ses génératrices, donc elle sera développable; 3° ces plans tangents feront un angle constant avec le plan horizontal, donc ce sera une surface d'égale pente.

Dans les chemins de fer, dans une partie en courbe, si la voie est en palier, c'est-à-dire sur plan horizontal, ordinairement cette courbe se fait sur plan circulaire et la surface de remblai forme alors un cône de révolution.

Mais si la voie est en pente, la courbe peut être une ellipse ou une hélice, et la surface rentre dans la classe précédente.

Enfin, si la voie, tout en étant horizontale, présente une courbe autre que le cercle, si elle est tracée suivant une ellipse ou, ce qui est assez fréquent, suivant une parabole, la surface du remblai sera une surface d'égale pente proprement dite.

Nous étudierons le cas où la directrice est une ellipse horizontale.

§ 36. – *Surface d'égale pente, à directrice elliptique horizontale.*[1] (fig. à la p. 34)

Énoncé: On donne une ellipse horizontale, a b c d. – On la prend comme directrice d'une surface d'égale pente que l'on demande d'étudier.

(a) – *Détermination d'une génératrice quelconque.* – Soit a b c d, a'b'c'd', l'ellipse directrice, m m' un point, et m t la tangente en ce point.

Construisons dans une partie libre de la feuille le cône directeur; il est de révolution et son angle avec le plan horizontal est α. – Soit S S' le sommet de ce cône. Menons à ce cône un plan tangent parallèle à la tangente mt. – Il suffira pour cela de mener à son cercle de base une tangente n q parallèle à m t. La génératrice de la surface sera la droite m p, m'p', menée parallèlement à la génératrice de contact s n, s'n', du cône.

On voit que: 1° En projection horizontale les génératrices sont normales à l'ellipse.

2° L'enveloppe de ces normales sera la développée de l'ellipse.

3° La ligne de striction ou arête de rebroussement sera dans l'espace l'intersection de la surface par un cylindre vertical qui aurait cette développée pour base.

4° Si l'on coupe la surface par un plan horizontal, les génératrices ayant une pente constante seront coupées toutes à une même distance de l'ellipse directrice. – On aura donc cette section en augmentant ou en diminuant les normales à l'ellipse d'une quantité constante, ce qui donnera les diverses développantes de la développée de l'ellipse. (§ 11)

(b) *Lignes doubles de la surface.* – 1° L'ellipse directrice est une première ligne double, car on peut, par chacun de ses points, mener une génératrice projetée horizontalement soit en dedans, soit en dehors de cette ellipse.

2° Soit m_1 le point de l'ellipse symétrique du point m, par rapport au grand axe; Les deux génératrices intérieures, menées par m et par m_1 se coupent horizontalement sur le grand axe, et par suite, dans l'espace, se coupent dans le plan de front qui a ce grand axe pour trace.

Nous aurons ainsi une 2e ligne double dans ce plan.

Il serait facile de démontrer que cette ligne double est une ellipse $f'_1 g' g_2 f_1$.[2]

Dès lors, on pourrait considérer la surface développable comme étant définie par deux

---

(1) Cette question fait quelquefois l'objet d'une épure donnée aux élèves comme sujet d'étude.

(2) En effet, cherchons fig. 49, l'équation de la courbe, lieu des points doubles g': Soient g'g'' le z du point g' et g''0' son y. Soient X_1 et Y_1 les coordonnées, dans le plan horizontal, d'un point quelconque de l'ellipse directrice; a et b ses demi-axes, et α l'angle constant que font les génératrices de la développable avec le plan horizontal: Soient X_1 et Y_1 les coordonnées du point m. Elles satisferont à l'équation de l'ellipse.

$$(1) \quad \frac{X_1^2}{a^2} + \frac{Y_1^2}{b^2} = 1.$$

La normale m g a pour équation en appelant X et Y un point courant de cette normale:

$$(2) \quad Y - Y_1 = \frac{a_2 Y_1}{b_2 X_1}(X - X_1).$$

L'abscisse du point g situé sur l'axe des x s'obtient en faisant dans l'équation (2) Y = 0 ce qui donne 0g, c'est-à-dire l'x du point g' (fig. 49).

(Voir la fin de la note, page 35).

Fig. 52. Cône Directeur

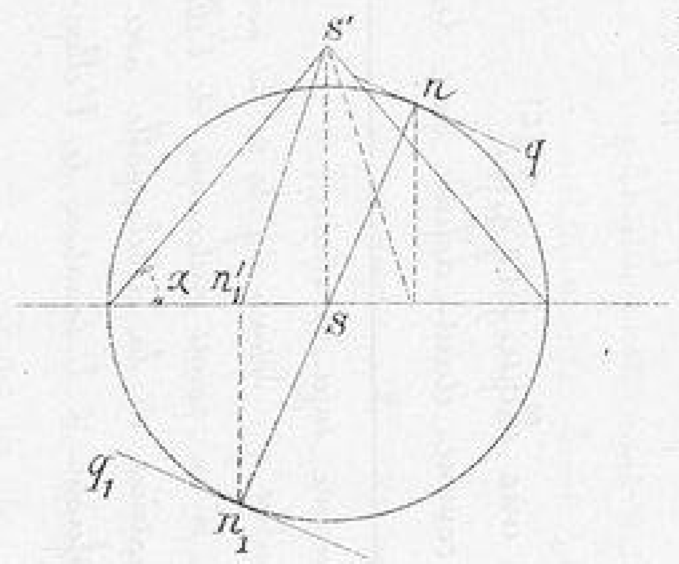


Fig. 49

Demi-Élévation

Demi-coupe de front OZ

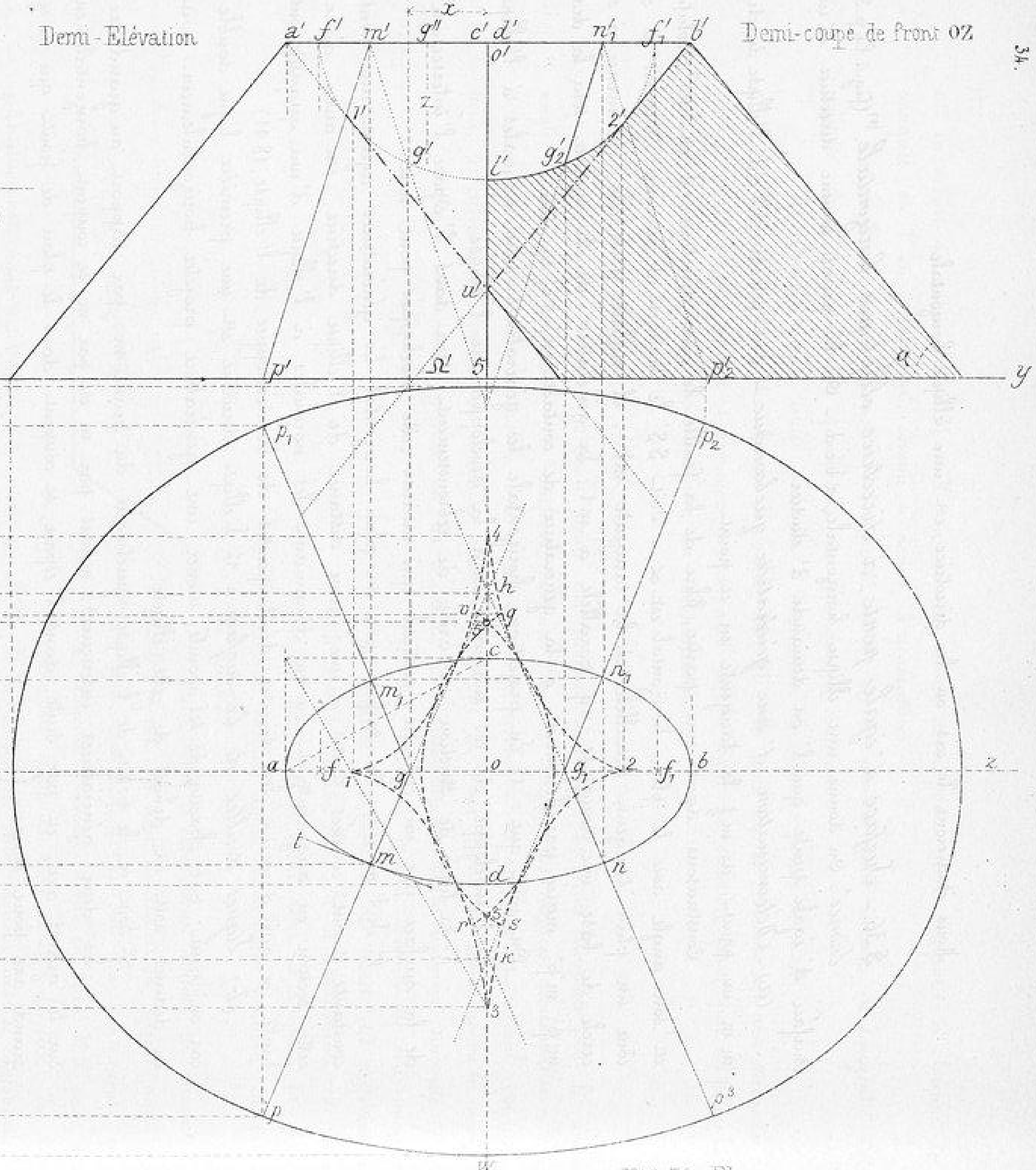


Fig. 50 Plan

Demi-Élévation latérale

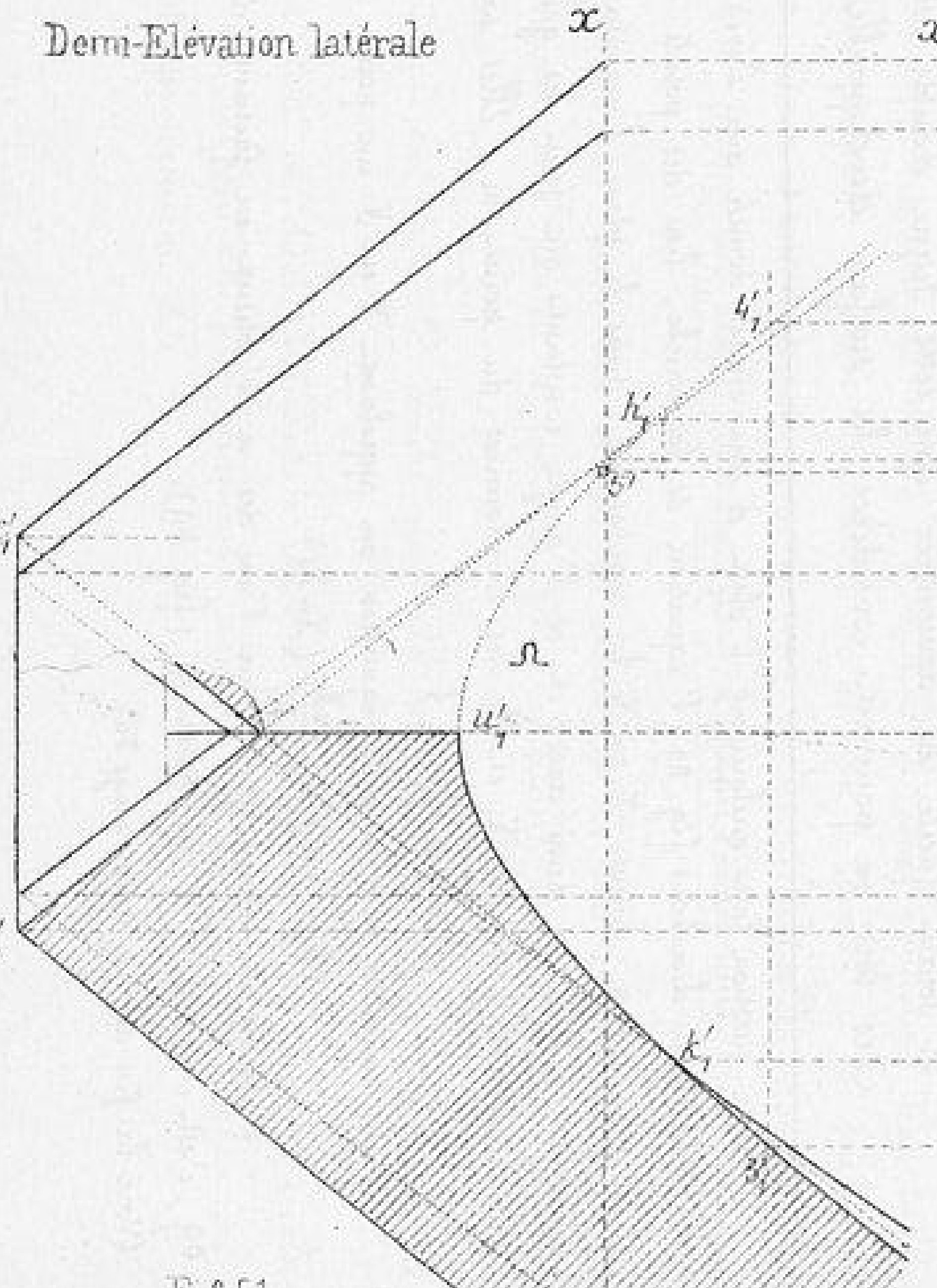


Fig. 51

Demi-Coupe de profil. OW

directrices : l'ellipse horizontale $abcd$ et l'ellipse de front $f'g'g'_2f'_1$. Nous rentrons dans le cas du § 34.

Nous avons étudié les particularités de ce mode de génération, et nous avons reconnu que si l'on prend les points b' et a' où l'ellipse horizontale coupe le plan de l'autre, en menant de ces points des tangentes $b'2'$ et $a'1'$ à l'ellipse de front, on trouve deux parties parasites en $f'_1 2'$ et $f'1'$, et une partie utile $1'l'2'$.

Les points $1'$ et $2'$ ont pour projection horizontale les rebroussements de la développée de l'ellipse. — Ces points dans l'espace sont eux-mêmes des rebroussements de l'arête de rebroussement, ainsi que nous l'avons démontré § 32.

3° Si nous prenons le plan de profil 3,4, qui passerait par le petit axe, il est facile de voir que les génératrices de gauche et de droite se couperont deux à deux dans ce plan.

Il y aura donc une 3° ligne double dans ce plan de profil (Voir la demi-coupe de profil).

On démontrerait facilement :

1° Que cette 3° ligne double est une hyperbole.

$x - X_1 = -\frac{b^2}{a^2}X_1$, ou $x = \frac{(a^2-b^2)X_1}{a^2}$, d'où :

(3) $x = \frac{c^2}{a^2}X_1$.

Exprimons Z, c'est-à-dire $g''g'$.

Puisque la génératrice, dans l'espace, est inclinée à l'angle α sur le plan horizontal, on aura :

$\overline{g''g'} = \overline{mg}\ \mathrm{tg}\,\alpha = Z$ et élevant au carré :

(4) $Z^2 = \overline{mg}^2\ \mathrm{tg}^2\alpha$.

Mais appliquons la formule qui donne la distance des deux points m et g en coordonnées rectangulaires.

Les coordonnées de m sont X_1 et Y_1 celles de g sont $\frac{c^2}{a^2}X_1$ et zéro.

$$mg^2 = Y_1^2 + X_1^2\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2 = \frac{a^4Y_1^2 + b^4X_1^2}{a^4}$$

(5) $Z^2 = \frac{a^4Y_1^2 + b^4X_1^2}{a^4}\mathrm{tg}^2\alpha$.

Entre 1, 3 et 5 éliminons X_1^2 et Y_1^2 et nous aurons une équation en x et Z qui sera celle de la ligne double.

de (3) on tire $X_1^2 = \frac{a^4}{c^4}x^2$.

Substituant dans (1), il vient :

$\frac{a^2}{c^4}x^2 + \frac{Y_1^2}{b^2} = 1$, d'où l'on tire

$Y_1^2 = \frac{b^2c^4 - a^2b^2x^2}{c^4}$. en substituant les valeurs de X_1^2 et Y_1^2 dans (5) il vient :

$\frac{a^4Z^2}{\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{a^4b^2c^4 - a^6b^2x^2}{c^4} + \frac{b^4a^4x^2}{c^4}$, simplifiant :

$\frac{Z^2}{\mathrm{tg}^2\alpha} = b^2 - \frac{x^2b^2(a^2-b^2)}{c^4}$, et comme $a^2 - b^2 = c^2$

(6) $\frac{Z^2}{b^2\mathrm{tg}^2\alpha} + \frac{x^2}{c^2} = 1$.

Telle est l'équation du lieu.

On voit que c'est une ellipse dont le demi-axe vertical $O'l' = b \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$, tandis que le demi-axe horizontal $O'f' = c$, demi-distance focale de l'ellipse directrice.

Donc, les extrémités de cet axe sont les deux foyers de l'ellipse directrice.

2°. Qu'en lui menant des tangentes par les points d'_1 et c'_1 on la divisera en une branche utile $4'_1 u'_1 3'_1$ et deux branches parasites s'étendant des points $3'_1$ et $4'_1$ jusqu'à l'infini.

3°. Que les points limites $3'_1$ et $4'_1$ sont les projections sur le plan de profil W des points 3 et 4 de l'arête de rebroussement qui sont projetés horizontalement aux sommets de la développée de l'ellipse.

4°. Qu'en ces points, dans l'espace, l'arête de rebroussement présente, elle-même des rebroussements.

Enfin il existerait une 4e ligne double située toute entière à l'infini, car les génératrices sont deux à deux parallèles.

Enfin, on cherchera en $p p_1 p_2 p_3$ la trace de la surface extérieure sur le plan horizontal. C'est une développante extérieure de la développée de l'ellipse; tandis que la trace, sur le même plan, horizontale de la partie Ω de la surface qui forme comme une espèce de voûte est une développante intérieure r, s, v, q, avec ses quatre rebroussements r, s, v, q, aux points où elle rencontre la développée et ses deux points doubles 5 et 5.

(C) Problèmes divers relatifs aux plans tangents.

1.- Plan tangent en un point pris sur la surface.- On mène la génératrice du point, et la tangente à la directrice par le point où cette génératrice la rencontre.

2.- Plan tangent par un point extérieur.- On y transporte, parallèlement à lui-même, le sommet du cône directeur.- On prend la trace de ce dernier sur le plan de la directrice de la surface, et on mène une tangente commune à cette trace et à la directrice.

3.- Plan tangent parallèle à une droite donnée.- On mène au cône directeur un plan tangent parallèle à la droite donnée.- On détermine, sur le cône, la génératrice de contact.- On cherche, sur la surface, la droite qui est parallèle à cette génératrice du cône, ce qui revient, dans le cas actuel, à mener à l'ellipse directrice une normale, parallèle à une direction donnée.

Remarque.- Les questions d'ombre se résolvent sur les développables à l'aide des problèmes qui précèdent.

Hélice cylindrique et Hélicoïde développable

§37.- Définitions.

5e Leçon. (a). On appelle hélice sur un cylindre de révolution, la courbe qui coupe toutes les génératrices de ce cylindre sous un angle constant.

Si l'on développe le cylindre, les génératrices se développeront suivant des droites parallèles entre elles et la transformée de la courbe sera une ligne droite, puisque les angles se conservant en développement, cette courbe transformée devra rencontrer, sous un angle constant, des droites parallèles.

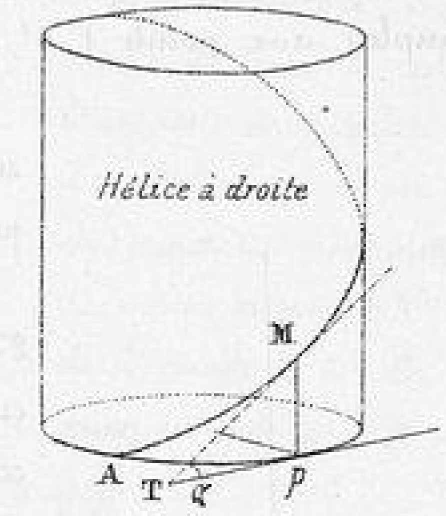
Considérons le développement.- Nous savons que les longueurs et les angles finis y sont conservés,- ce qui nous permet de dire: Que l'hélice est la courbe engendrée sur un cylindre par un point qui, se déplaçant sur une génératrice, y décrit des longueurs x qui sont dans un rapport constant avec les arcs décrits sur la base du cylindre par le pied de la génératrice.

On a (fig. 54) $\frac{MP}{\text{arc } AP} = K = \text{tg.}\alpha$, en appelant α l'angle constant fait par les génératrices avec le plan de base du cylindre que nous supposons ici horizontal.

(b) *Hélice à droite ou Dextrorsum - Hélice à gauche ou Sinistrorsum.* - En regardant le cylindre, les génératrices dirigées vers l'œil, et voyant la courbe s'éloigner de soi, si la projection, sur la base, du point décrivant semble tourner comme les aiguilles d'une montre, l'hélice est dite à droite ou Dextrorsum.

Fig. 53.

Fig. 54.



Dans le cas contraire elle est dite à gauche, ou Sinistrorsum.

(c) *Spire et Pas de l'Hélice.* - Lorsque l'hélice a fait un tour complet, c'est-à-dire lorsque le point décrivant est revenu sur la génératrice de départ, on dit qu'il a décrit une *Spire de l'hélice.* - La quantité dont le point décrivant s'est déplacé sur cette génératrice se nomme le pas total de l'hélice.

Soit H le pas de l'hélice, r le rayon de base du cylindre; α l'angle des tangentes à l'hélice avec le plan de base, on aura:

$$H = 2\pi r \ \text{tg.}\alpha \quad , \text{ d'où } \text{tg.}\alpha = \frac{H}{2\pi r}$$

(d) *Pas réduit.* - Le pas réduit est la quantité dont le point décrivant monte sur la génératrice, non plus pour un tour complet, mais pour un déplacement égal à r compté sur la circonférence de base. Il revient au même de dire que c'est la hauteur dont monte le point décrivant pour un angle de rotation égal à 1.

Soit h le pas réduit, on aura évidemment:

$$\frac{h}{H} = \frac{r}{2\pi r} \quad \text{ou} \quad h = \frac{H}{2\pi}.$$

Le pas réduit h, étant la hauteur montée pour un angle de rotation égal à 1, la hauteur z, montée pour un angle ω, sera $z = h\omega$.

Le pas réduit est donc le rapport constant qui existe entre l'ordonnée MP et l'angle au centre AOP.

Deux hélices tracées sur des cylindres différents, mais ayant même pas total H, ont aussi le même pas réduit, h.

Nota. - Une hélice est superposable à elle-même dans toutes ses parties, exactement comme un cercle. L'hélice joue, parmi les courbes gauches, le même rôle que le cercle parmi les courbes planes. Elle est la plus régulière de toutes les courbes gauches.

En résumé une hélice est complètement déterminée lorsque l'on donne: 1° le rayon R du cylindre auquel elle appartient; 2° son point de départ sur ce cylindre; 3° son sens (à droite ou à gauche); 4° son pas réduit h, ou son pas total $H = 2\pi h$. On pourrait substituer à cette dernière donnée l'angle α; et l'on aurait:

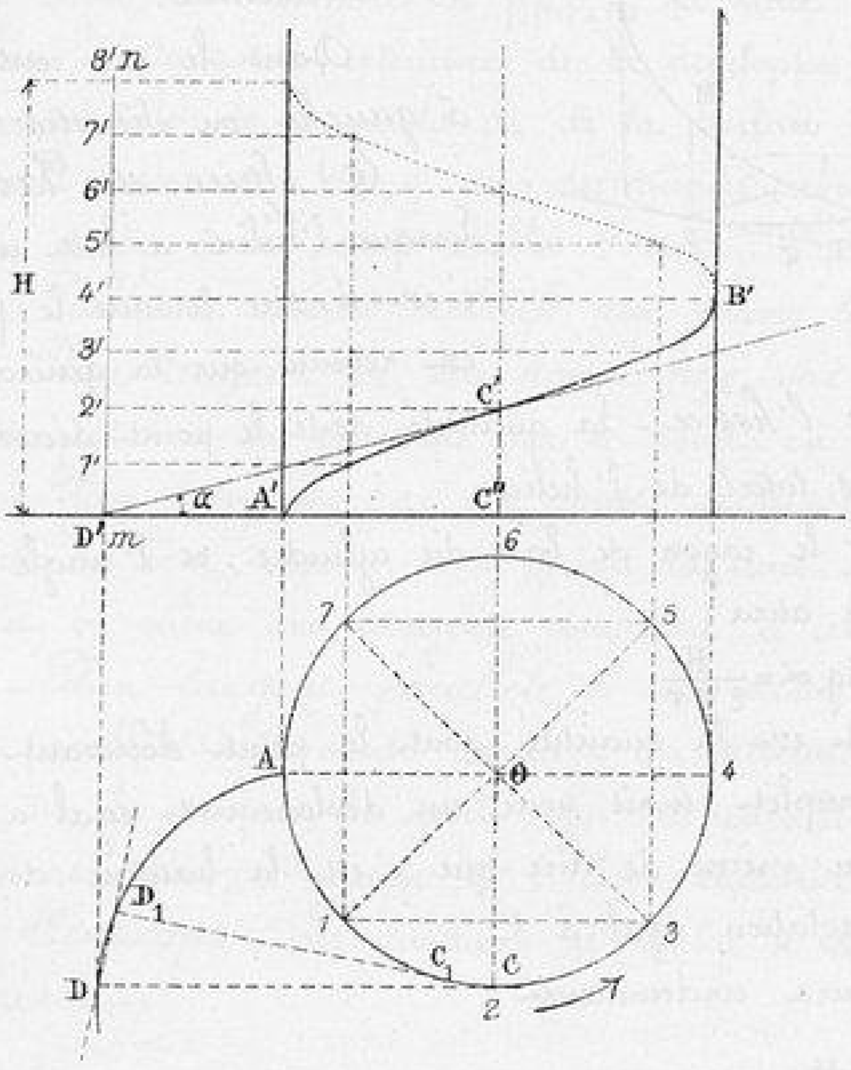
$$\text{tg.}\alpha = \frac{h}{R}.$$

§ 38. – Projection d'une Hélice.

Considérons un cylindre de révolution à axe vertical (fig. 55).

Soit AA' le point de départ de l'hélice que nous supposerons dextrorsum. – Soit H le pas total ; Sur une échelle de hauteur latérale $\overline{mn}$ on portera le pas H. On le divisera en un certain nombre de parties égales, (8 par exemple) aux points $1', 2', 3', \ldots\ldots 8' \ldots$; la division par 8 est très commode.

Fig. 55.



On divisera la circonférence de base en un même nombre de parties égales aux points 1, 2, 3, 4 .....

On mènera : 1° les génératrices du cylindre ; 2° les horizontales par les points de l'échelle ; et l'on aura aux intersections respectives de ces lignes, les différents points de la projection verticale de l'hélice.

Cette projection est une sinusoïde (facile à démontrer). – Elle est tangente en A' et B' au contour apparent du cylindre. – Au point C' projeté sur l'axe, elle présente une inflexion. (Sera démontré plus loin).

§ 39. – Tangente à l'Hélice. – Sous-tangente. – Plan osculateur.

La tangente fera l'angle constant $\delta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ avec les génératrices. – Menons, par exemple, la tangente de front, au point CC', et prenons sa trace horizontale DD'.

On aura $C'C'' = C''D' \operatorname{tg}\alpha$, mais d'autre part $C'C'' = \text{arc } AC \times \operatorname{tg}\alpha$, donc

$CD = \text{arc } AC$.

Donc : Le lieu des traces des tangentes sur le plan de base du cylindre est une développante du cercle de base.

La ligne CD se nomme *sous-tangente*.

Cherchons le plan osculateur au point CC'. – C'est le plan mené par la tangente CD, $C'D'$ et parallèle à la tangente infiniment voisine C_1D_1.

La trace horizontale de ce plan est la droite DD_1 qui à la limite est tangente en D à la développante, c'est-à-dire, perpendiculaire à la droite CD. – Le plan osculateur est donc, au point CC' perpendiculaire au plan vertical.

Nous avons vu que lorsqu'une courbe est projetée de telle sorte que l'œil soit dans le plan osculateur, sa projection présente une inflexion. (§ 18)

Donc au point C' l'hélice présente une inflexion en projection verticale.

Ce qui précède prouve que le plan osculateur d'une hélice est le plan passant par la tangente à l'hélice et par la normale au cylindre.

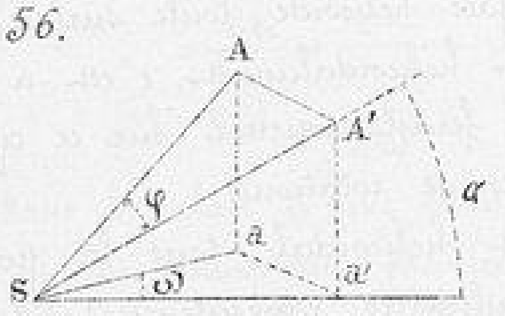
§40. – Rayon de courbure de l'hélice.

En appelant φ l'angle des 2 tangentes infiniment voisines, et θ l'arc qui sépare les points de contact, nous savons que l'on a pour l'expression du rayon de courbure ρ :

$$\rho = \lim. \frac{\theta}{\varphi}$$

Résolvons d'abord le problème suivant (fig. 56) :

Fig. 56.



Soient SA, SA' deux droites de l'espace faisant le même angle α avec le plan horizontal, et faisant entre elles, dans l'espace, un angle infiniment petit φ, et en projection, l'angle ω. – Calculons φ en fonction de ω et de α. Prenons SA = SA' et projetons horizontalement en Sa et Sa'. – Soit ω l'angle aSa'.

La droite AA' est horizontale, en vertu de la constance de l'angle α. – Elle sera donc égale à sa projection aa'. On aura : $\overline{AA'} = SA' \times \varphi$, et $\overline{aa'} = Sa' \times \omega$.

d'où $SA' \times \varphi = Sa' \times \omega$, et $\varphi = \omega \times \frac{Sa'}{SA'}$.

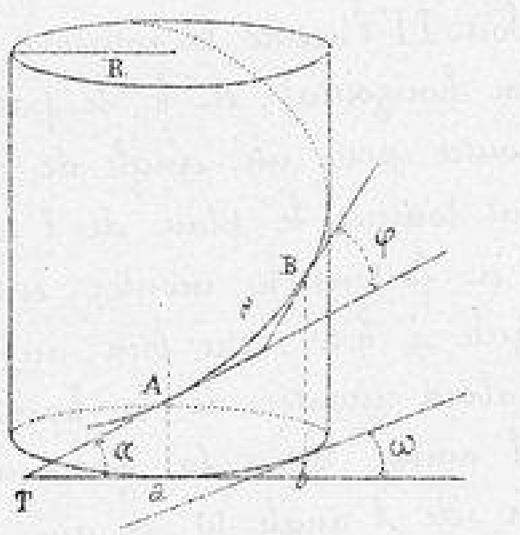
Mais $\overline{Sa'} = SA' \cos\alpha$

Donc : $\varphi = \omega . \cos.\alpha$.

Cela posé revenons à l'hélice, fig. 57.

L'arc θ ou AB de l'hélice dans l'espace a pour projection l'arc de cercle ab, et puisque tous les éléments de l'hélice font l'angle constant α avec le plan de base, on aura :

Fig. 57.



$$ab = \theta \cos\alpha, \text{ ou :}$$

$$\theta = \frac{ab}{\cos.\alpha}, \text{ mais } \overline{ab} = \omega R$$

Donc : $\theta = \frac{R\omega}{\cos\alpha}$

D'autre part $\rho = \lim \frac{\theta}{\varphi} = \lim. \frac{R\omega}{\cos\alpha \times \omega.\cos\alpha} = \lim. \frac{R}{\cos^2\alpha}$

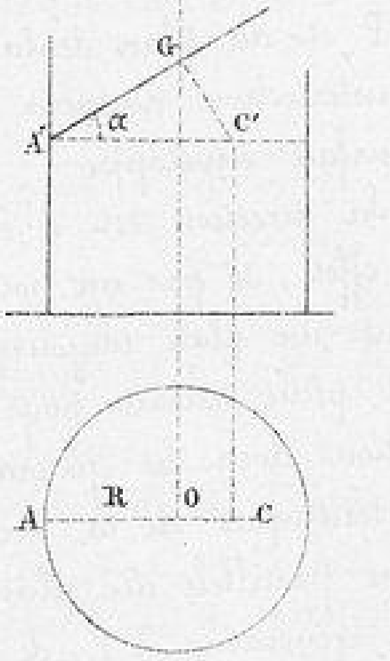
Donc : $\rho = \frac{R}{\cos^2\alpha}$

Telle est l'expression du rayon de courbure.

§41. – Normale principale. – Construction graphique du centre de courbure.

Soit A' le point de l'hélice situé sur le contour apparent, fig. 58.

Fig. 58.



Le plan osculateur contient la tangente à l'hélice et la normale au cylindre ; la normale principale est donc la normale AC, A'C' au cylindre.

Par A' menons la droite inclinée à l'angle α, prenons le point G où elle rencontre l'axe ; par ce point menons-lui une perpendiculaire jusqu'à la rencontre en C' avec l'horizontale du point A'.

On aura : $AG = \frac{R}{\cos\alpha}$

$$AC' = \frac{AG}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos^2\alpha}$$

Le point CC' est le centre de courbure de l'hélice au point

AA'. En déplaçant le point CC' hélicoïdalement, nous aurons les centres de courbure en tous les autres points.

§ 42. – Hélicoïde développable, ou enveloppe d'un plan qui se déplace hélicoïdalement.

(a) *Génération de la surface.* – On nomme surface hélicoïde, toute surface engendrée soit par une courbe, soit par une autre surface, se déplaçant hélicoïdalement, c'est-à-dire liée invariablement à une génératrice d'un cylindre que l'on ferait tourner sur ce cylindre en la faisant monter de quantités proportionnelles aux angles de rotation.

Il est facile de voir que dans un mouvement hélicoïdal, tous les points de la surface ou de la courbe entraînée décrivent, sur des cylindres concentriques, des hélices de même pas et de même sens.

Deux hélices quelconques, n'étant pas sur le même cylindre ne seront pas égales; mais deux points situés à la même distance de l'axe décriront des hélices égales.

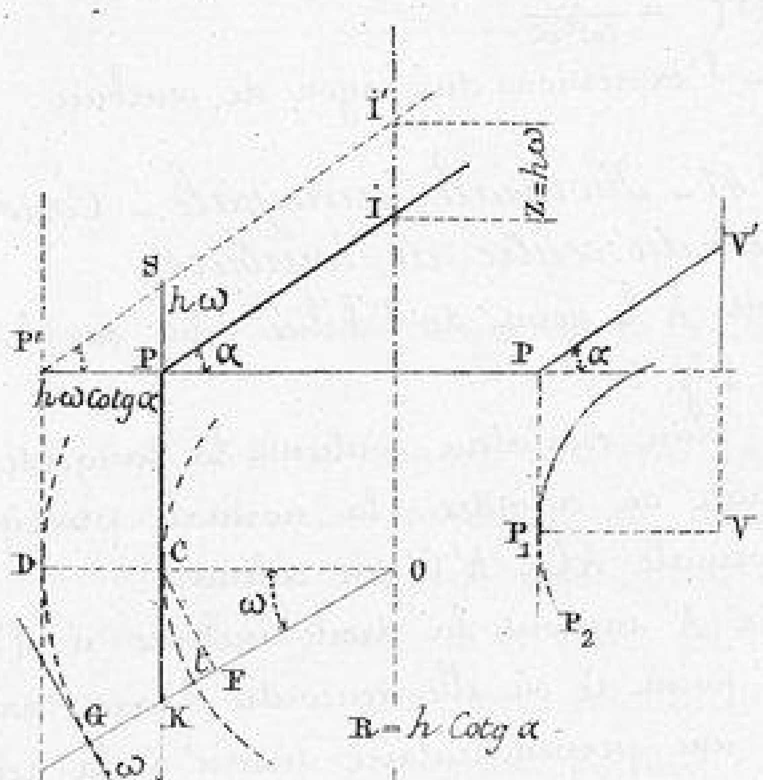
On nomme axe d'une surface hélicoïdale, l'axe commun à tous les cylindres sur lesquels sont décrites les hélices.

Si la surface mobile est un plan, la surface enveloppe sera développable: ce sera un hélicoïde développable.

Pour en étudier les propriétés, prenons (fig. 59) le plan mobile lorsqu'il est dans la position MPI, perpendiculaire au plan vertical. – Soit II' l'axe de la rotation hélicoïdale.

Soit α l'angle du plan mobile et du plan horizontal, et h, le pas réduit du mouvement hélicoïdal, c'est-à-dire la hauteur montée pour un angle de rotation égal à 1.

Fig. 59.



Faisons tourner le plan de l'angle ω, infiniment petit et faisons-le monter ensuite d'une hauteur Z, égale à $h\omega$: ou bien, au contraire, faisons-le d'abord monter de la hauteur $Z = h\omega$, ce qui l'amène dans la position DP'I' et ensuite tourner de l'angle ω, ce qui amène sa trace horizontale P'D dans la position GM.

Cherchons la droite d'intersection du plan primitif P et du plan déplacé en MG: La limite de cette intersection donnera la caractéristique de la surface enveloppe.

1° Sa direction est d'être de front.

En effet, si par un point VV' de l'espace on menait un plan toujours parallèle au plan mobile, ce plan aurait pour enveloppe un cône de révolution dont les génératrices seraient parallèles aux caractéristiques de la surface. Or au plan P_1 du cône parallèle au plan P de la surface répond la génératrice VP_1, de front dans le cône,

donc la caractéristique du plan P est une droite de front, inclinée à l'angle α.

2° Le point M où se coupent les traces P C et G M est un point de l'intersection c'est-à-dire, à la limite, un point de la caractéristique.

Calculons la distance CM, ou plutôt sa limite.

On a : $CM = CK + KM$

$$= \frac{GK}{\sin.\omega} + \frac{KF}{\sin.\omega}\ , \text{ mais } GK + KF = GF\ ; \text{ donc :}$$

$$(1)\quad CM = \frac{GF}{\sin\omega}.$$

Dans le calcul d'une limite de rapport on peut négliger les infiniment petits d'ordre supérieur, et par conséquent, prendre ω à la place de $\sin.\omega$ et Gt à la place de GF, qui en diffère de la quantité Ft qui est du 2e ordre. Enfin à la place de Gt on prendra son égal DC ; donc : $\text{Lim } CM = \text{Lim.} \frac{DC}{\omega}$.

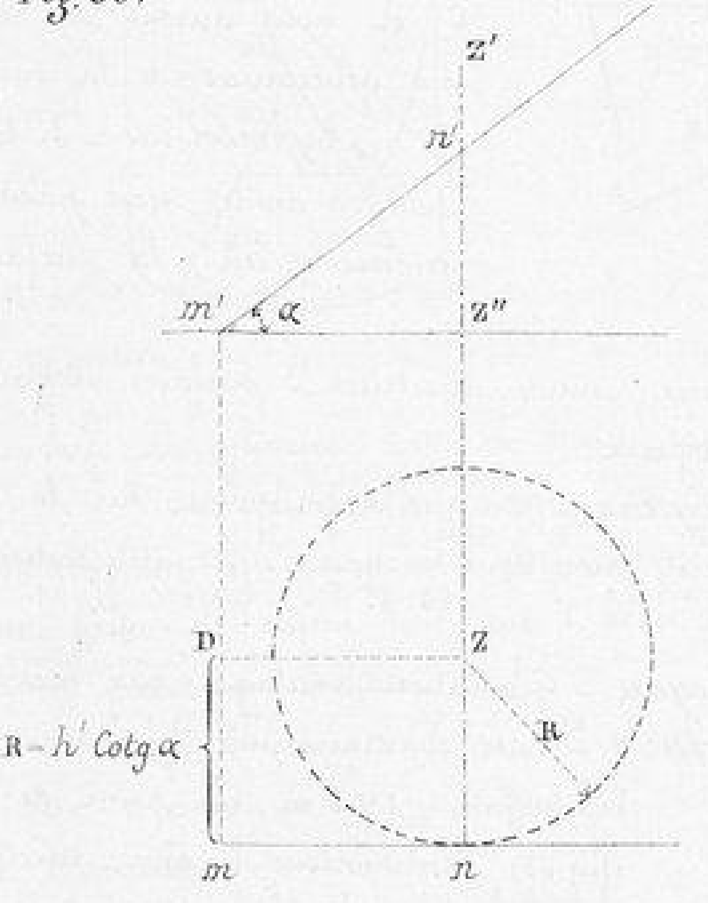
Mais $DC = P'P = h\,\omega.\text{cotg.}\alpha$, donc

$\text{Lim. } CM = \text{Lim. } \frac{h\,\omega.\text{cotg.}\alpha}{\omega}$, et

$\text{Lim. } CM = h.\text{cotg.}\alpha$.

Ainsi, la caractéristique a pour projections une droite $mn, m'n'$ (fig. 60) parallèle au plan vertical, inclinée à l'angle α sur le plan horizontal et située à une distance h cotg. α en avant de l'axe, c'est-à-dire tangente à un cylindre de rayon $R = h \text{ cotg. } \alpha$.

Fig. 60.



Sur ce cylindre, imaginons une hélice passant par le point de tangence nn' et inclinée à l'angle α sur le plan horizontal ; calculons le pas réduit h' de cette hélice. C'est la hauteur dont elle monte pour un déplacement égal à R compté sur la base du cylindre.

On aura donc :

$h' = R \text{ tg.}\alpha$;

mais $R = h \text{ cotg.}\alpha$,

donc $h' = h$.

Il résulte de là :

1° Que la caractéristique de front entraînée par le mouvement hélicoïdal avec le plan mobile, donnera successivement toutes les autres caractéristiques.

2° Que cette caractéristique sera toujours tangente à une hélice de même pas réduit que celui du mouvement hélicoïdal, et tracée sur un cylindre de rayon $r = h \text{ cotg.}\alpha$.

La ligne de striction ou arête de rebroussement est donc cette hélice.

L'hélicoïde développable peut donc être considérée comme le lieu géométrique des tangentes à une même hélice.

(b) *Développement*. – Dans le développement, le rayon de courbure de l'hélice de rebroussement ne variera pas. (Voir § 29 ; rayon de courbure d'une transformée).

Cette hélice se développera donc suivant un cercle dont le rayon sera $\rho = \frac{R}{\cos^2\alpha}$.

Les sections de la surface par des plans perpendiculaires à l'axe du cylindre, sont les trajectoires orthogonales des génératrices. Elles se développeront donc suivant les développantes du cercle précédent.

Surfaces gauches.

A. – Généralités.

6e Leçon. **§ 43. – Génération des surfaces gauches.**

La discussion de la formule de Chasles §§ 24 et 25, nous a montré que lorsque dans une surface réglée le paramètre de distribution $K = \lim. \frac{p}{\sigma}$, n'est ni nul ni infini, le plan tangent varie en tous les points d'une même génératrice et que la loi de cette variation est donnée par la formule $\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{K}$.

La surface n'est plus développable, elle est gauche. Pour assurer le mouvement de la ligne droite génératrice il faut l'assujettir à 3 conditions, ce qui donne plusieurs manières de définir une surface gauche.

1° Surfaces définies par 3 Directrices A, B, C (fig. 61). – Pour obtenir une génératrice quelconque, soit m un point pris sur A.

Fig. 61.

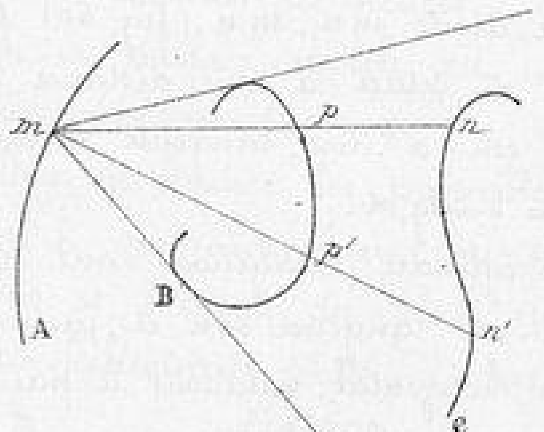
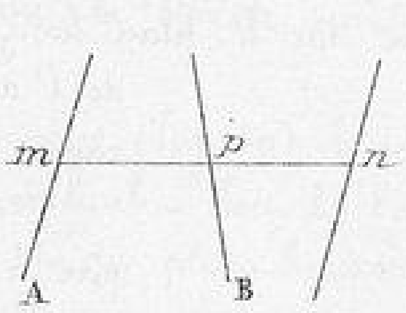


Fig. 62.



Construisons le cône ayant m pour sommet, et la courbe B pour directrice. Prenons les points n, n'..... où ce cône est rencontré par la courbe C, et nous aurons en m p n – m p' n' des génératrices de la surface.

Hyperboloïde. – Si les 3 directrices sont 3 droites, non parallèles à un même plan, la surface devient un hyperboloïde à une nappe (fig. 62).

2° Surfaces à 3 noyaux. – On peut se donner comme directrices 3 surfaces noyaux A, B, C, et assujettir la génératrice à être tangente à ces noyaux.

3° Surfaces à 1 courbe directrice et 2 noyaux. – On prend un point sur la directrice comme sommet commun de deux cônes circonscrits aux deux noyaux. Les intersections de ces deux cônes donnent des génératrices.

4° Surfaces à 2 courbes directrices et 1 noyau. – Génération analogue aux précédentes.

5° Surfaces à cône directeur et à 2 directrices. – Pour construire une génératrice quelconque de la surface, soit m, un point de la 1ère directrice (fig. 63). Transportons le cône directeur, fig. 63bis, parallèlement à lui-même, de telle sorte que son sommet soit en ce point m. Il coupera en n la 2e directrice. La droite m n sera une génératrice de la surface.

Fig. 63

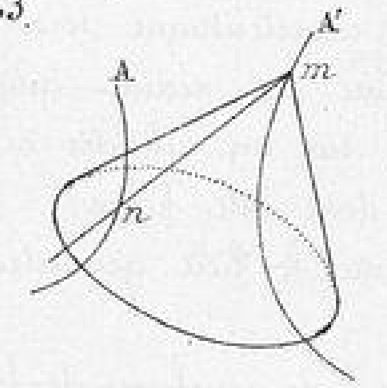
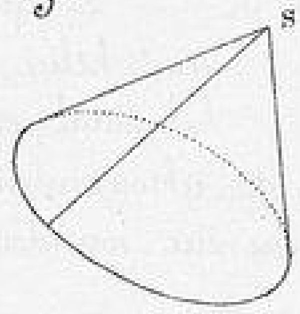


Fig. 63bis



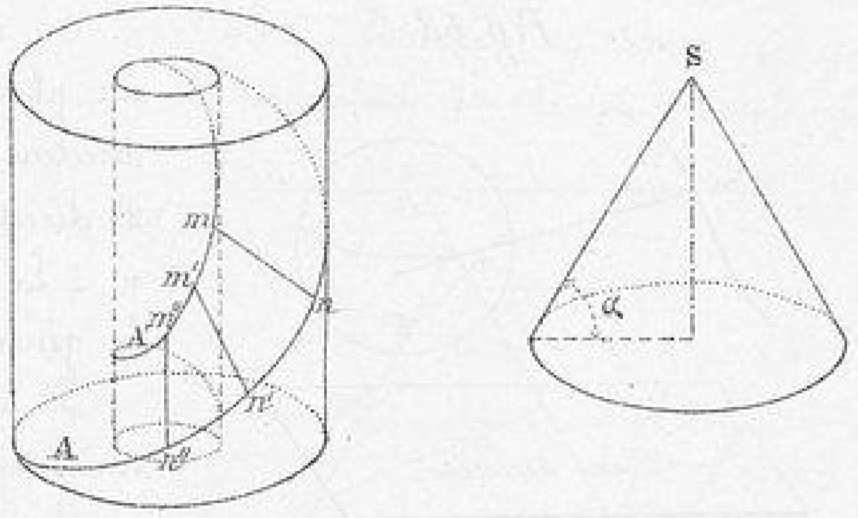
§ 44. – Exemples divers de surfaces gauches.

1° Surfaces à 2 directrices et un cône directeur.

(α) – Hélicoïde

(a) *Hélicoïde gauche quelconque* (1ère *définition*). – Deux hélices, A et A' (fig. 64), de même pas, sont tracées sur deux cylindres concentriques. – On assujettit une droite à glisser sur ces deux directrices en ayant pour directeur S un cône de révolution dont l'axe est parallèle à l'axe des deux cylindres, ou, ce qui revient au même, on force la génératrice à faire un angle constant α, avec le plan de base du cylindre.

Fig. 64



(b) *Surface de vis à filet triangulaire.* (fig. 65). – Les deux directrices sont : 1° une hélice A ; 2° l'axe du cylindre sur lequel est tracée l'hélice. Le cône directeur est de révolution ; son axe est parallèle à l'axe du cylindre de l'hélice.

Fig. 65.

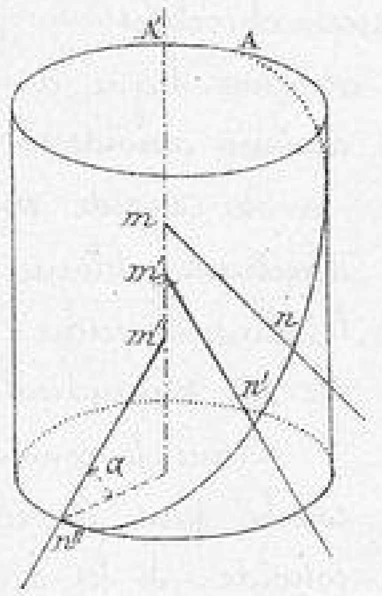
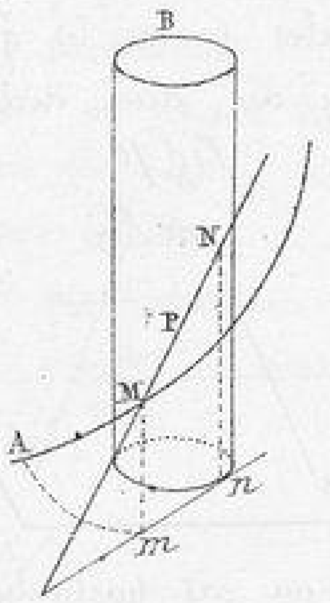


Fig. 66.



On voit facilement que cette surface est un cas particulier de l'hélicoïde gauche quelconque. Elle répond au cas où la 2e directrice A' serait tracée sur un cylindre de rayon nul.

2° *Surface à 1 directrice, 1 noyau et 1 cône directeur* (fig. 66).

Hélicoïde gauche quelconque (2e *définition*).

La directrice est une hélice A. Le noyau est un cylindre B ayant même axe que l'hélice.

Le cône est de révolution ; les génératrices feront donc un angle constant α, avec le plan de base du cylindre, tout en étant tangentes au noyau cylindrique B.

On voit facilement que cette définition de l'hélicoïde gauche rentre dans la précédente, en remarquant qu'un point quelconque P de la génératrice entraîné dans le mouvement hélicoïdal décrit une hélice de même pas que l'hélice A : on pourrait donc prendre ces deux hélices pour directrices et se passer du noyau.

Si l'on prend un 3e point N, sur la génératrice, il engendrera, lui aussi, une hélice ayant même axe et même pas que les deux autres ; on peut donc donner une 3e définition, qui serait la suivante :

(3e *définition*). L'hélicoïde gauche est engendré par une droite qui glisse sur 3 hélices de même axe et de même pas. Ainsi définie la surface est à 3 directrices.

3° *Surfaces à 1 plan directeur et deux directrices* (courbes ou noyaux).

La génératrice est assujettie à rencontrer les deux directrices courbes ou à être tangente à deux noyaux, ou à rencontrer une directrice et à être tangente à un noyau ; dans tous les cas elle doit rester parallèle au plan directeur.

Ces surfaces se rencontrent souvent en construction. Le plan directeur est ordinairement

horizontal.

Pour obtenir une génératrice, soit m un point de la 1ère directrice courbe (fig. 67).

Fig. 67.

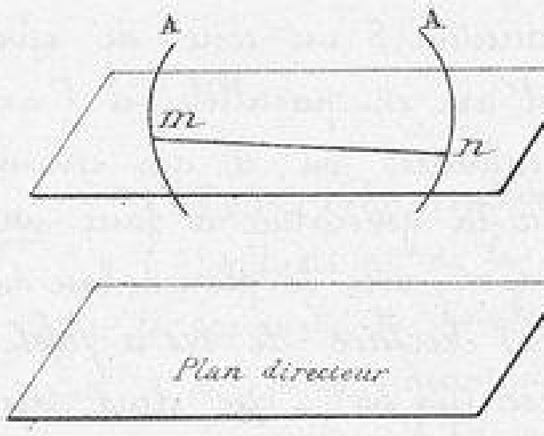
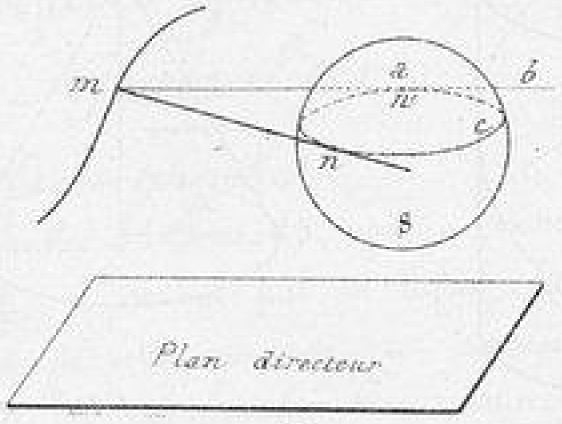


Fig. 68.



On mène par ce point un plan parallèle au plan directeur. Il rencontre la 2e directrice en un point n. – La droite m n est la génératrice.

Si la 2e directrice est un noyau S, le plan auxiliaire le coupera suivant une courbe a n c (fig. 68). – Du point m on mènera une ou plusieurs tangentes à cette courbe et l'on aura autant de génératrices.

Enfin, si l'on a 2 noyaux, le plan auxiliaire déterminera une courbe dans chacun d'eux et les tangentes communes aux deux courbes seront les génératrices cherchées.

4° Conoïde. (fig. 69). – Si l'une des deux directrices est une ligne droite AB, la surface est un conoïde.

Fig. 69.

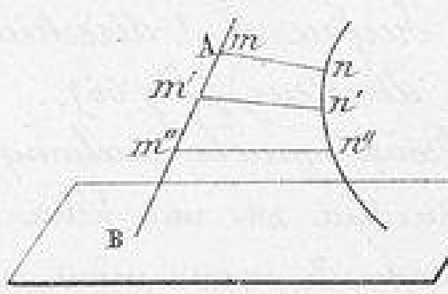
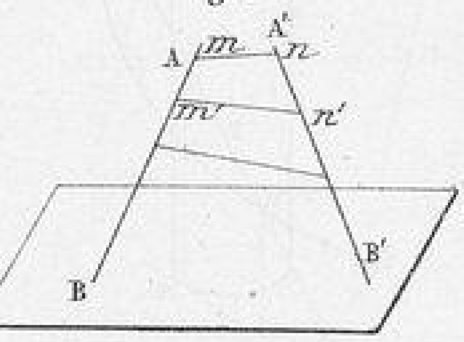


Fig. 70.



Le conoïde est oblique si la directrice rectiligne est oblique sur le plan directeur; il est droit si elle est perpendiculaire.

Dans le conoïde, la directrice courbe peut être remplacée par un noyau.

5° Paraboloïde (fig. 70). – C'est un cas particulier du conoïde. Si les deux directrices sont deux droites non parallèles entre elles, le conoïde devient un paraboloïde.

Si l'une d'elles est en outre perpendiculaire au plan directeur, le paraboloïde est droit.

Le paraboloïde est la plus simple de toutes les surfaces gauches.

6° Hélicoïde gauche à plan directeur (fig. 71). – La directrice est une hélice A. Le plan directeur P est perpendiculaire à l'axe du cylindre, et l'on a, de plus, un noyau cylindrique C, ayant même axe que l'hélice.

Fig. 71.

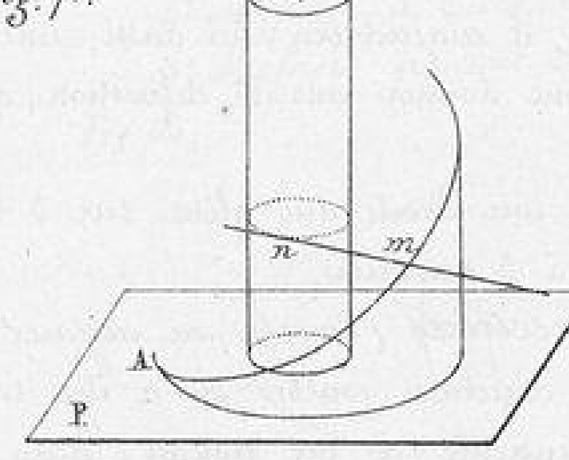
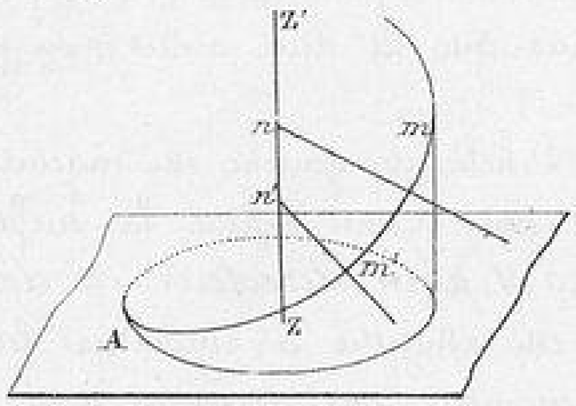


Fig. 72.



7° Surface de vis à filet carré (fig. 72).

La directrice est toujours une hélice A. Le noyau B est réduit à l'axe du cylindre. Le plan directeur est perpendiculaire à cet axe.

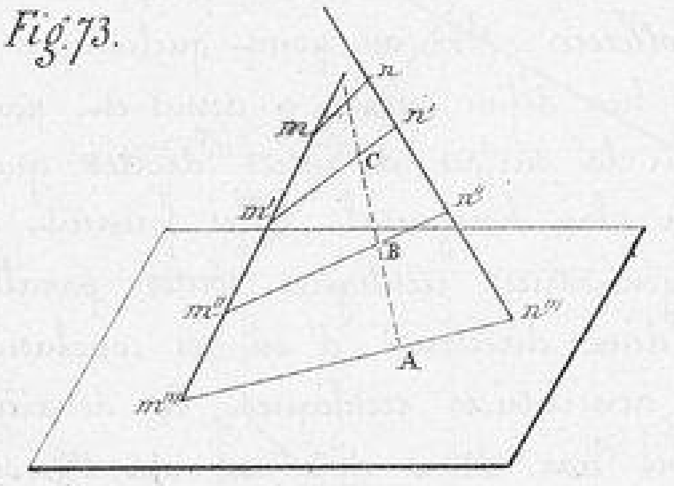
B. – Le Paraboloïde.

B.– Le Paraboloïde.

§ 45.– Double système de génératrices rectilignes.

Le paraboloïde est la plus simple des surfaces gauches. Il joue un grand rôle dans l'étude des autres surfaces gauches, c'est pourquoi nous l'étudions en premier lieu.

Fig. 73.



Il est défini par 2 directrices rectilignes A et B, non parallèles à un même plan, et un plan directeur, que nous supposerons pour plus de simplicité horizontal.

Théorème 1.– Les génératrices d'un paraboloïde partagent les 2 directrices en segments proportionnels (Résulte d'un théorème connu de la Géométrie de l'espace)

$$\frac{mm'}{nn'} = \frac{m'm''}{n'n''} = \frac{m''m'''}{n''n'''}$$

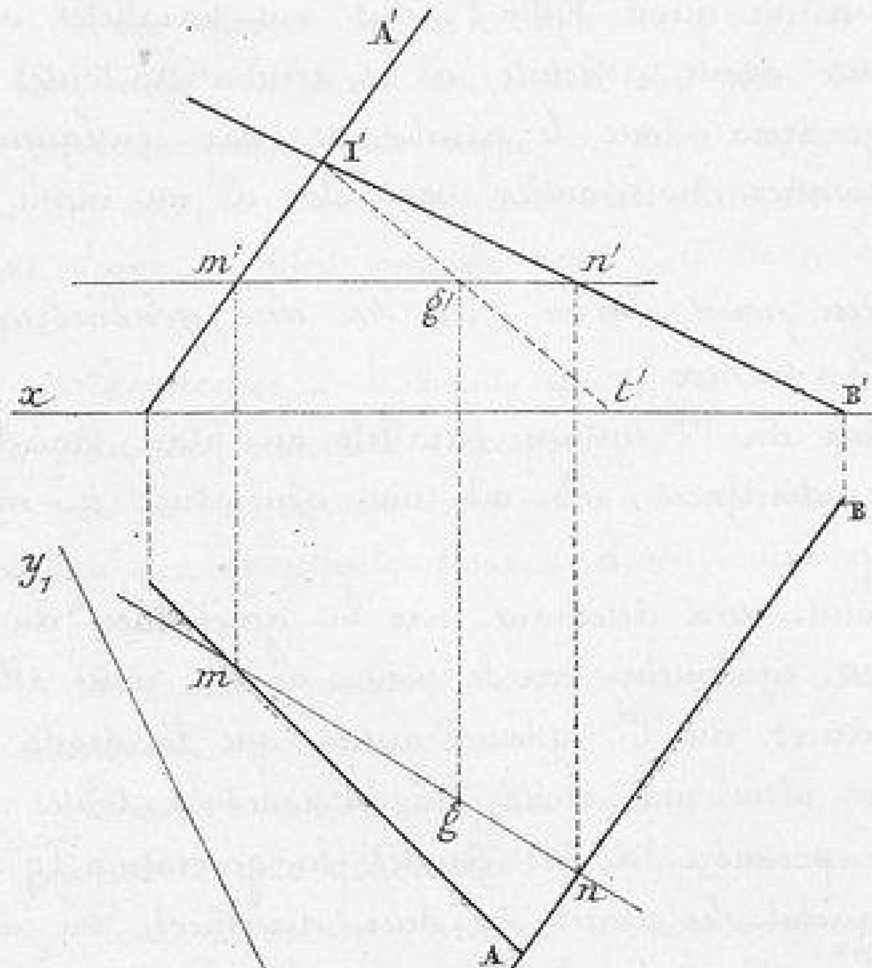
Réciproquement : Si plusieurs génératrices coupent deux directrices, en segments proportionnels, ces génératrices sont toutes parallèles à un même plan et forment par conséquent, un paraboloïde.

Théorème 2.– Si l'on prend sur différentes génératrices les points A, B, C ... qui divisent dans un même rapport la portion de ces génératrices comprise entre les 2 directrices, tous ces points seront en ligne droite.

On suppose que le plan directeur est le plan horizontal.

Soit AA' et BB', fig. 74, les deux directrices et mn – m'n' une génératrice. Prenons sur cette droite le point g'g qui partage le segment mn – m'n' dans un rapport donné.

Fig. 74.



Je dis que le lieu des points tels que gg' est une ligne droite.

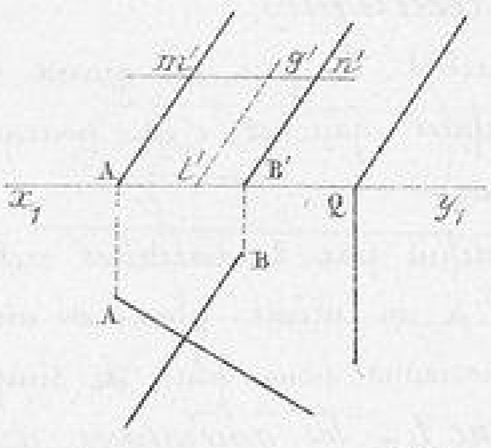
En élévation sur le mur xy il est évident que ce lieu est la droite g'I' qui passe par le point de croisement des deux directrices, en projection.

Prouvons que sur tout autre plan de projection ce lieu est aussi une droite et le théorème sera démontré, car ce lieu sera, dans l'espace, l'intersection de deux plans projetants différents. Or le plan vertical xy était tout à fait quelconque. Si l'on avait projeté sur un nouveau mur ayant $x_1 y_1$ pour ligne de terre, on aurait de même trouvé une ligne droite ; donc le théorème est démontré.

Remarque.– Supposons que la ligne de terre $x_1 y_1$ ait été choisie de telle

sorte que sur le nouveau plan vertical les projections A' et B' des directrices soient parallèles entre elles (fig. 75). On sait qu'il suffit pour cela que le mur soit perpendiculaire à un plan Q, qui serait parallèle à la fois aux deux droites. Alors le lieu est g't', parallèle à A'B', ce qui prouve que le lieu est une droite parallèle à ce plan Q.

Fig. 75.



Corollaire. – Par un point quelconque m m' de la surface, il passe un lieu défini comme ci-dessus et, par suite, on peut appliquer sur la surface d'autres droites que les génératrices parallèles au plan horizontal. Elles forment donc un nouveau système de génératrices rectilignes toutes parallèles à un nouveau plan directeur Q, parallèle lui-même aux deux directrices, d'où ces conclusions évidentes:

1° Il existe un deuxième système de génératrices rectilignes. Ce deuxième système a pour plan directeur Q, un plan parallèle à la fois aux deux directrices du 1er système et on peut prendre pour directrices de ce deuxième système deux génératrices quelconques du premier.

2° Deux génératrices de même système ne se rencontrent jamais (puisqu'elles sont parallèles à un même plan); deux génératrices de système différent se rencontrent toujours. (Cela résulte de la manière dont nous avons expliqué le deuxième système).

3° Par tout point de la surface, il passe une génératrice de chaque système. Le plan de ces deux droites définit le plan tangent à la surface au point considéré.

4° Tout plan passant par une génératrice d'un système contient une génératrice de l'autre système et est tangent au point où ces deux droites se coupent. Si le plan mené est parallèle au plan directeur, dans ce cas le point de tangence est rejeté à l'infini sur cette génératrice (sera prouvé plus loin).

5° Considérons trois droites d'un même système, elles sont parallèles à un même plan, et cependant le mouvement d'une droite astreinte à les rencontrer toutes les trois est complètement déterminé. Cette droite engendrera donc le paraboloïde, par conséquent: La surface engendrée par une droite astreinte à en rencontrer trois autres parallèles à un même plan, est un paraboloïde.

§ 46. – *Problème.* – *Par un point m m' pris sur une génératrice d'un paraboloïde, mener un plan tangent à la surface.*

On suppose le plan directeur du 1er système parallèle au plan horizontal.

Soit AA' et BB' les deux directrices; ab - a'b' une génératrice et m m' un point pris sur cette droite.

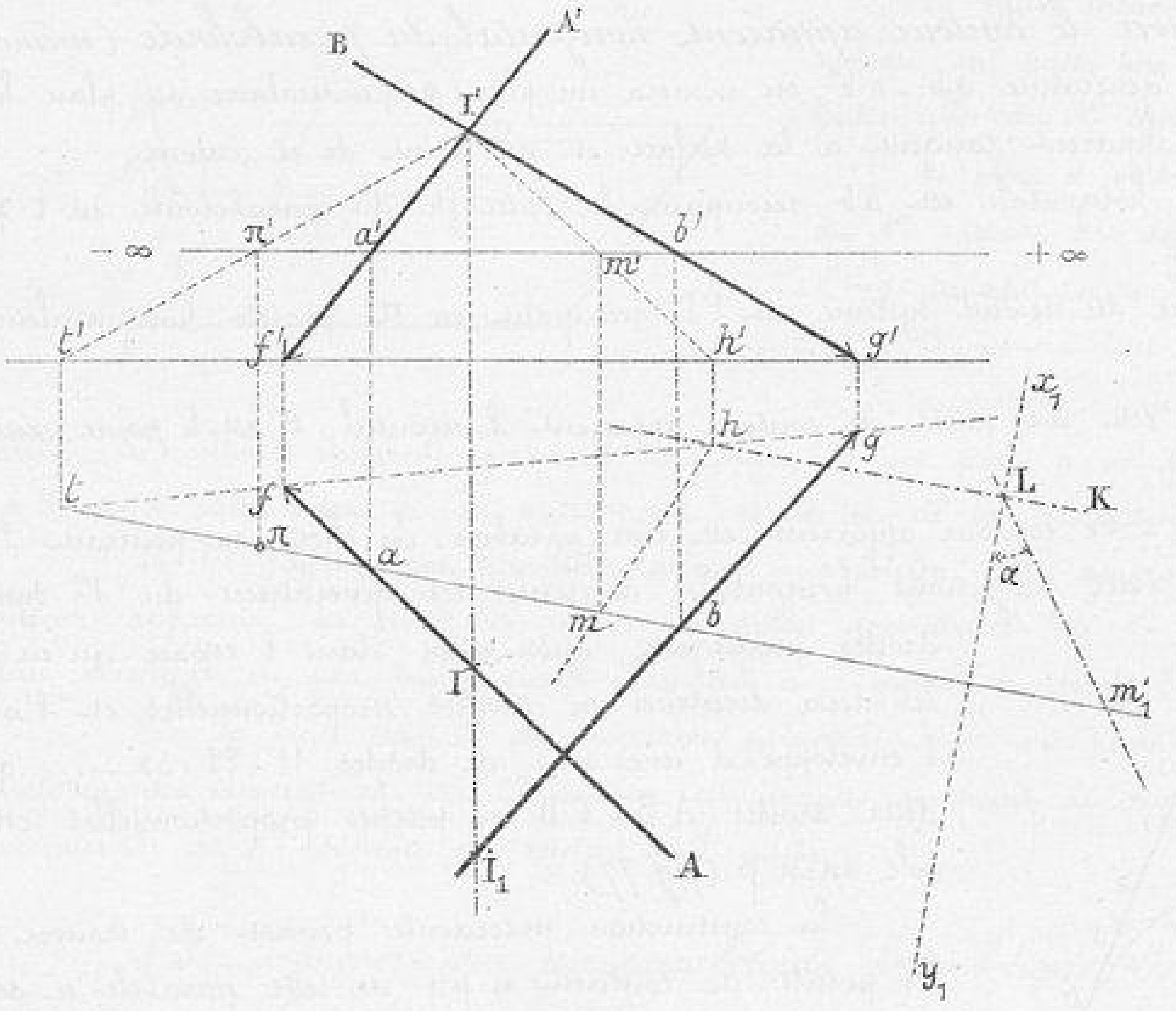
Le plan tangent en ce point sera déterminé par la génératrice du 1er système ab - a'b', et par celle du 2e système, qui passe également par le point m m'; nous allons la déterminer. Il suffit de connaître deux génératrices du 1er système autres que la droite ab - a'b', de les prendre comme directrices, et de mener par m m' une droite qui les rencontre toutes les deux.

Nous choisirons, pour la première de ces droites, la génératrice fg - f'g' située dans le plan horizontal et obtenue en joignant les traces des deux directrices. On nomme cette droite la trace du paraboloïde sur le plan directeur.

A son défaut, on mènerait toute autre génératrice du 1er système.

Comme 2e droite, nous prendrons la perpendiculaire au plan vertical projetée toute entière au point I', croisement des projections verticales des deux directrices.

Fig. 76.



Cette droite est en effet horizontale et elle rencontre les deux directrices. Par conséquent, c'est une génératrice du 1er système. Toutes celles du 2e système doivent la rencontrer et, comme elle est projetée verticalement en un point I', ce point sera ce que nous nommerons un point de divergence pour les projections verticales des génératrices du deuxième système.

Nous aurons donc en I'm' la projection verticale de la génératrice du 2ème système passant par le point m m'. Elle perce le plan horizontal en h', dont la projection verticale est en h, sur la trace du paraboloïde.

Nous avons en mh - m'h' les projections de la génératrice du 2e système et en h sa trace horizontale. La trace horizontale du plan tangent est donc la droite hK parallèle à ab.

Si on prend une ligne de terre $x_1 y_1$ perpendiculaire sur hK, on aura en Lm'_1 par report de cotes, la trace verticale du plan tangent sur ce nouveau plan vertical. La ligne Lm'_1 est une ligne de plus grande pente, et on a en α l'angle du plan tangent avec le plan directeur.

Remarque. - Le point de divergence tel que I' existera sur une projection toutes les fois que le plan de projection correspondant sera perpendiculaire au plan directeur.

Si les projections sont obliques ou coniques, il existera un point de divergence toutes les fois qu'une projetante pourra devenir une génératrice.

§ 47. - Un plan contient une génératrice; reconnaître le point où il est tangent (même figure).

Soit ab - a'b' une génératrice du 1er système et hK (parallèle à ab) la trace d'un plan contenant cette génératrice. Ce plan est tangent en un point qu'il faut déterminer.

Pour le trouver, prenons le point hh' où la trace du plan rencontre la trace fg du paraboloïde. - Par le point ff' il passe une génératrice du second système, h'I' qui, en projection

verticale, diverge du point I. Elle rencontre verticalement la génératrice précédente au point m' projeté horizontalement en m. Le point de tangence est mm'.

§ 48. – Trouver le contour apparent horizontal du paraboloïde (même figure).

Par chaque génératrice ab - a'b', on mènera un plan perpendiculaire au plan horizontal; c'est un plan de contour apparent tangent à la surface en un point de ce contour.

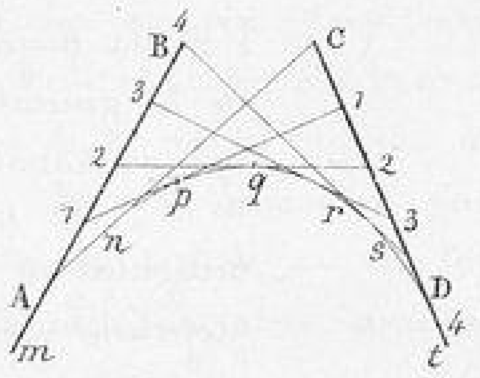
Or, sa trace horizontale est ab, recoupant la trace fh du paraboloïde en t projeté verticalement en t' sur xy.

La génératrice du second système est t'I' recoupant en π' projeté horizontalement en π la génératrice choisie.

Le point π est un point de contour apparent horizontal. C'est le point central de la génératrice.

Remarque. – Ce contour apparent est une parabole. En effet, on pourrait l'obtenir en prenant l'enveloppe des projections horizontales de toutes les génératrices du 1er système. Or ces droites partagent, aussi bien dans l'espace qu'en projection, les deux directrices en parties proportionnelles, et l'on sait que l'enveloppe d'une série de droites 11. 22. 33'....... qui partagent deux droites AB - CD en parties proportionnelles est une parabole m n p. (fig. 77).

Fig. 77.



La construction précédente permet de trouver directement les points de contact n p q de cette parabole et des génératrices.

§ 49. – Trouver la ligne d'ombre propre d'un paraboloïde.

On supposera d'abord les rayons lumineux parallèles entre eux.

On mènera le plan d'ombre de chaque génératrice; autrement dit, on projettera obliquement sur le plan horizontal, chaque génératrice à l'aide de projetantes parallèles aux rayons lumineux. On cherchera le point où chacun de ces plans est tangent, et le lieu de ces points de tangence sera la ligne d'ombre propre.

Si les ombres sont au flambeau, les plans d'ombre passeront par ce flambeau, et la solution sera la même.

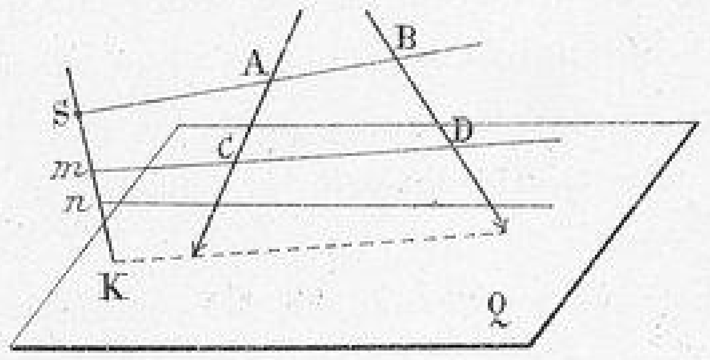
Dans le cas de rayons parallèles, si l'on considère les deux directrices et leurs ombres portées sur le plan horizontal, ces droites seront partagées en parties proportionnelles par les ombres portées des génératrices, et, par suite, l'enveloppe de ces dernières sera une parabole. Mais ce sera l'ombre portée par la ligne d'ombre propre de la surface. Or, on démontre en géométrie analytique que la courbe de contact d'un cylindre ou d'un cône circonscrit à un paraboloïde est plane. Sa projection étant une parabole, c'est donc aussi une parabole dans l'espace.

Dans le cas de l'ombre au flambeau, c'est une hyperbole.

Cas particulier. – Si le flambeau S est sur une des génératrices AB, alors tout plan contenant cette droite est tangent en un point de cette dernière. La droite SAB fait donc partie

de la ligne d'ombre propre. Comme cette ligne d'ombre est du second degré, l'autre partie doit être aussi une ligne droite.

Fig. 78.



En effet, menons la génératrice S m n K du 2ème système qui passe par le point S. Elle rencontre en m, n... toutes celles du 1er système.

Le plan d'ombre d'une génératrice quelconque CD du 1er système est défini par les droites CD et S m ; il est tangent en m situé sur la génératrice SK.

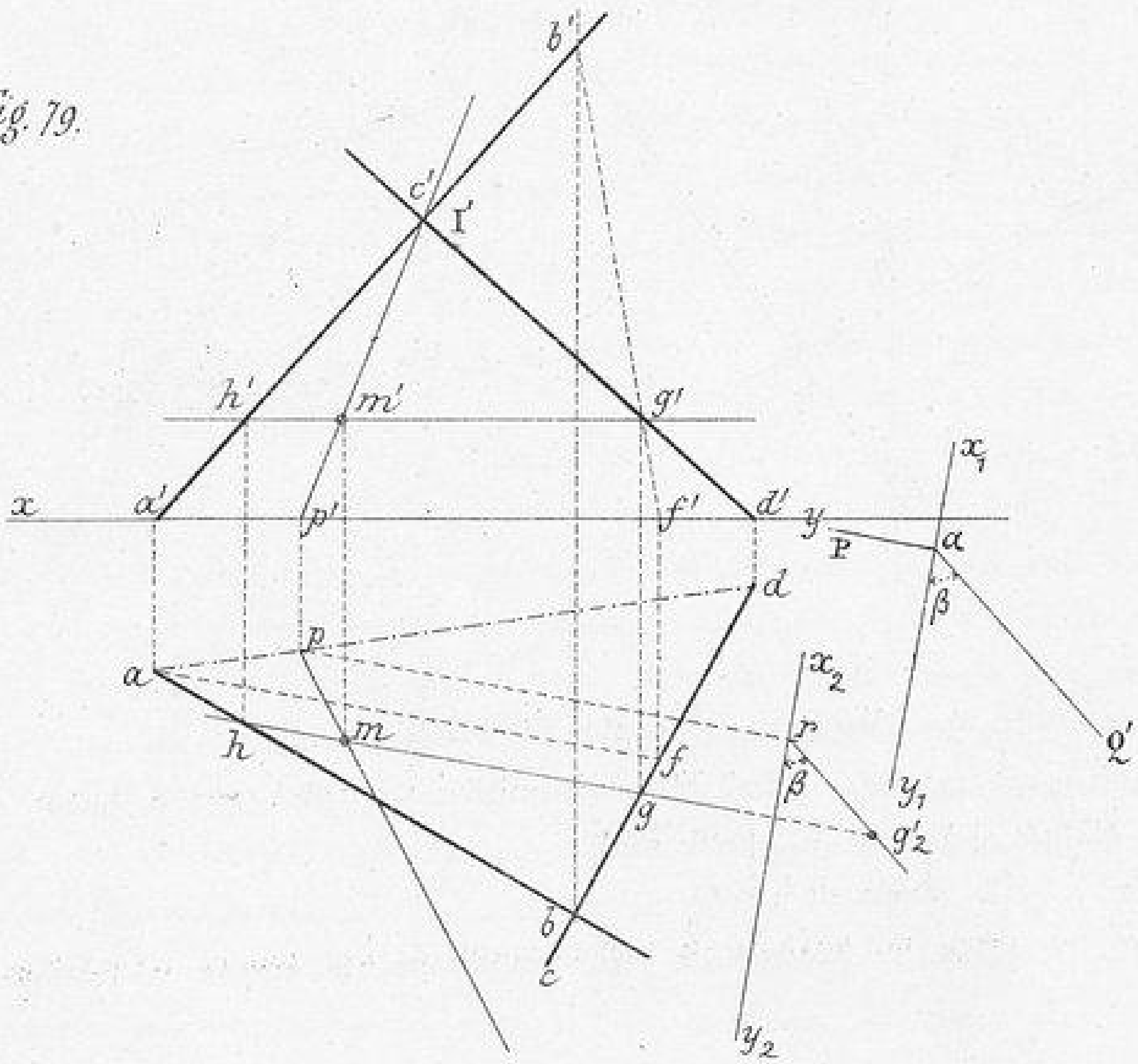
Ce fait a lieu en perspective : si on place l'œil en S, à distance finie, sur le prolongement d'une génératrice, le contour apparent perspectif se réduira, d'une part, à un point, perspective de la génératrice SAB, et, d'autre part, à un autre point, perspective de la génératrice S m n K.

Si les rayons sont parallèles à une génératrice, cette génératrice sera une des lignes de contour apparent. Les plans d'ombres des autres génératrices du 1er système seront tous parallèles au plan directeur, et, par suite, seront tangents à l'infini ; la droite SK sera portée en entier à l'infini.

Sur le plan vertical de projection perpendiculaire au plan directeur, le contour apparent enveloppe des génératrices du 2e système est réduit au point de divergence I' ; l'autre enveloppe des génératrices du 1er système est rejetée à l'infini.

§ 50. – Trouver, sur un paraboloïde hyperbolique, les génératrices qui sont parallèles à un plan donné Pα Q' et mener à un paraboloïde un plan tangent parallèle à un plan donné.

Fig. 79.



On supposera ce plan défini par sa ligne de pente Pα inclinée à l'angle β sur le plan horizontal (fig. 79).

1ère Méthode. – La génératrice du 1er système sera parallèle à la trace horizontale Pα du plan donné sur le plan directeur. Résolvons le problème suivant connu : Mener une droite parallèle à une direction donnée Pα et qui en rencontre deux autres (ici les deux directrices ab - a'b' et cd - c'd').

Par un point a a' de l'une des 2 directrices, on mène une droite af - af' parallèle à Pα. Elle définit avec ab - a'b' un plan dont on prend l'intersection gg' avec la droite cd - c'd'.

La génératrice du 1er système cherchée est $g'h' - gh$.

Pour avoir l'autre, menons, par cette droite, un plan parallèle au plan $P\alpha Q'$. A cet effet, on l'a projetée toute entière en un point g'_2 sur un nouveau plan vertical x_2y_2 perpendiculaire au plan $P\alpha Q'$. On a mené g'_2r parallèle à $Q'\alpha$, et on a eu en rp, la trace horizontale de ce plan.

Il détermine une génératrice demandée du 2e système $pm - p'm'$ trouvée, comme ci-dessus, en se servant de la trace ad du paraboloïde et du point de divergence I'.

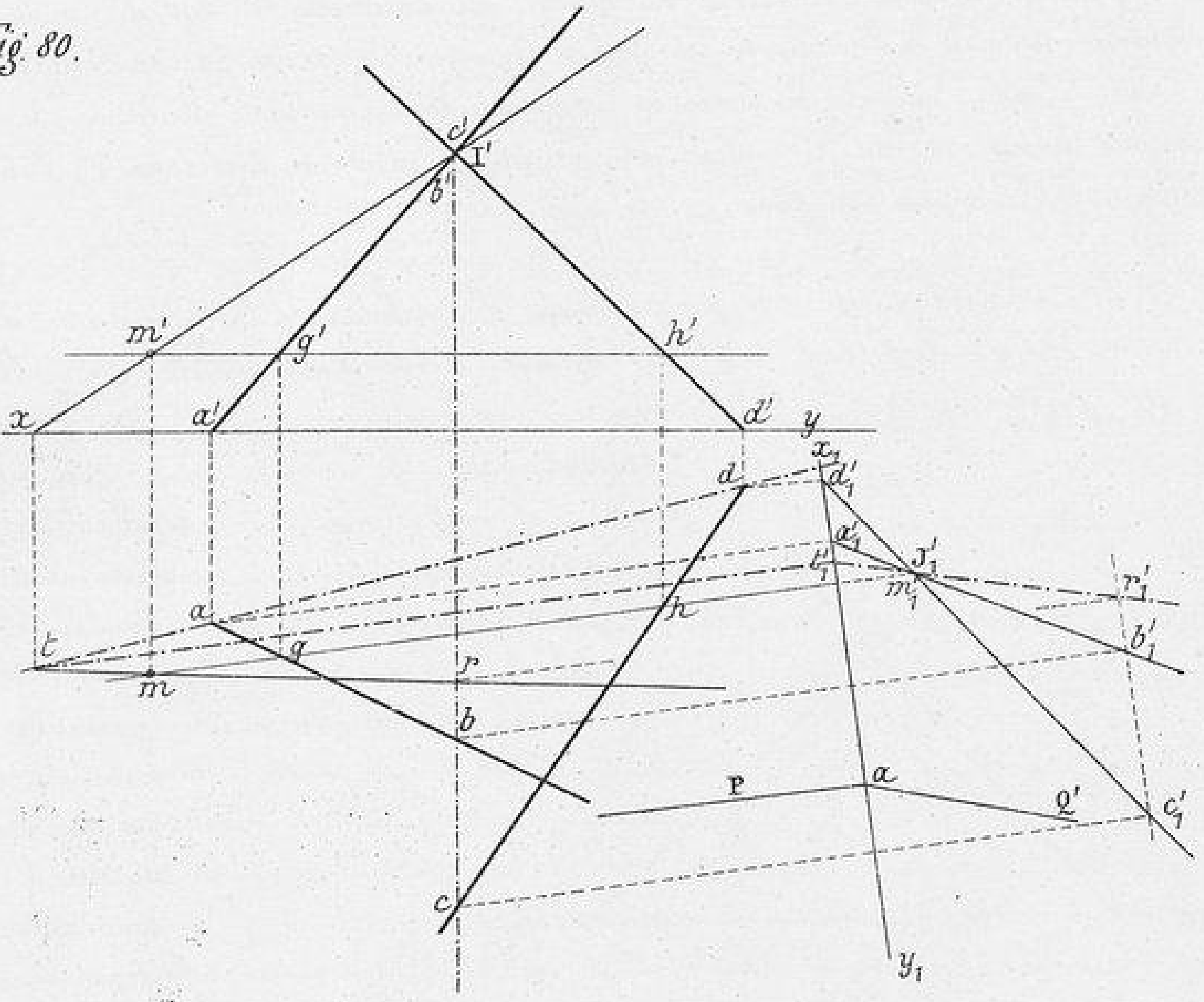
Le point de rencontre mm' de ces deux génératrices, est le point où ce plan g'_2rp parallèle à $P\alpha Q'$ est tangent.

Remarque. — Si l'on demande de mener au paraboloïde un plan tangent parallèle à un plan donné, la solution sera la même que celle-ci.

2ème *Méthode* (fig. 80). — On prendra immédiatement un nouveau plan vertical x_1y_1 perpendiculaire au plan donné.

On y cherchera les projections $a'_1b'_1 - c'_1d'_1$ des deux directrices.

Fig. 80.



On obtiendra un nouveau point de divergence J'_1 et la génératrice demandée du 1er système sera la droite gh projetée verticalement toute entière en J'_1.

L'autre doit diverger de J'_1 et être parallèle au plan ; elle sera donc projetée verticalement suivant $J'_1t'_1$ parallèle à la trace $\alpha Q'$ du plan.

On en aura la projection horizontale en se servant soit du point t, situé sur la trace horizontale ad de la surface, soit d'un point $r'r$ pris sur une autre génératrice $cd - c'_1d'_1$ du 1er système.

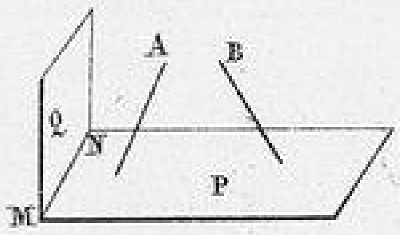
Le point mm'_1m' de croisement des deux génératrices tr et mh est le point de tangence d'un plan tangent à la surface, parallèle au plan $P\alpha Q'$.

Les traces de ce plan sont $J'_1t'_1t$.

Remarque 1. — Le point m partage le prolongement de hg comme a partage da prolongée.

Remarque 2. — Soit, fig. 81, P et Q les deux plans directeurs; si le plan donné est parallèle à la droite MN d'intersection des deux plans directeurs P et Q, en résolvant le problème comme ci-dessus, on devra considérer les deux directrices et mener une droite les rencontrant et qui soit parallèle à un plan parallèle à la fois à chacune d'elles. Le problème est impossible.

Fig. 81.



En effet, lorsque deux droites A et B sont parallèles à un plan Q, une troisième droite parallèle à ce même plan Q ne peut pas rencontrer les deux droites A et B, à moins de s'éloigner toute entière à l'infini.

C. — Hyperboloïde à une Nappe.

7e Leçon.

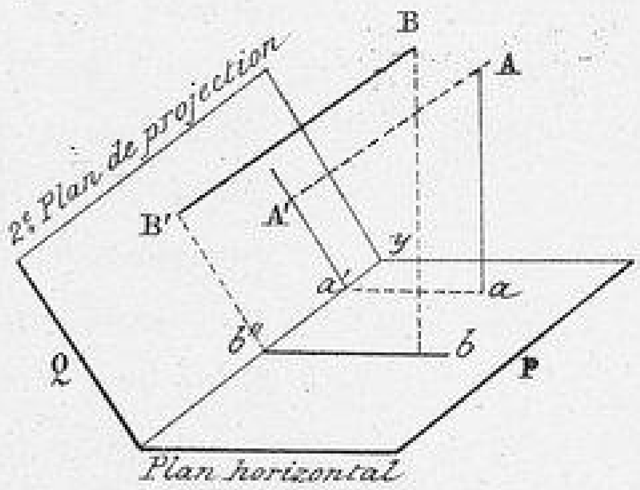
§ 51. — Définition et double système de génératrices.

L'hyperboloïde à une nappe est la surface engendrée par une droite qui se meut en s'appuyant sur trois directrices rectilignes qui ne sont ni dans un même plan, ni parallèles à un même plan. Les propriétés de cette surface sont basées sur un double mode de génération que nous allons démontrer, et qui résultera du théorème suivant.

Théorème. — Toute droite qui rencontre trois génératrices rencontre toutes les autres.

(Figure dans l'espace).

Fig. 82.



Soit Aa (fig. 82) la 1ère directrice, que je prends perpendiculaire au plan horizontal; BB' la 2e directrice quelconque. Je prends, comme 2e plan de projection, un plan Q perpendiculaire sur cette droite B. Quoique ce plan Q ne soit pas vertical, nous le considérerons comme second plan de projection; et, par extension, nous l'appellerons aussi un plan vertical de projection.

Cette directrice se projettera verticalement toute entière en un point B', qui est sa trace verticale. La première directrice A se projettera verticalement suivant A'a' perpendiculaire sur la ligne de terre.

Soit enfin, la 3e directrice, donnée horizontalement par sa projection droite D, et verticalement par sa projection D'.

Epure (fig. 83). — Puisque toutes les génératrices doivent rencontrer A et B, leurs projections horizontales divergeront toutes du point A et, leurs projections verticales, toutes du point B'.

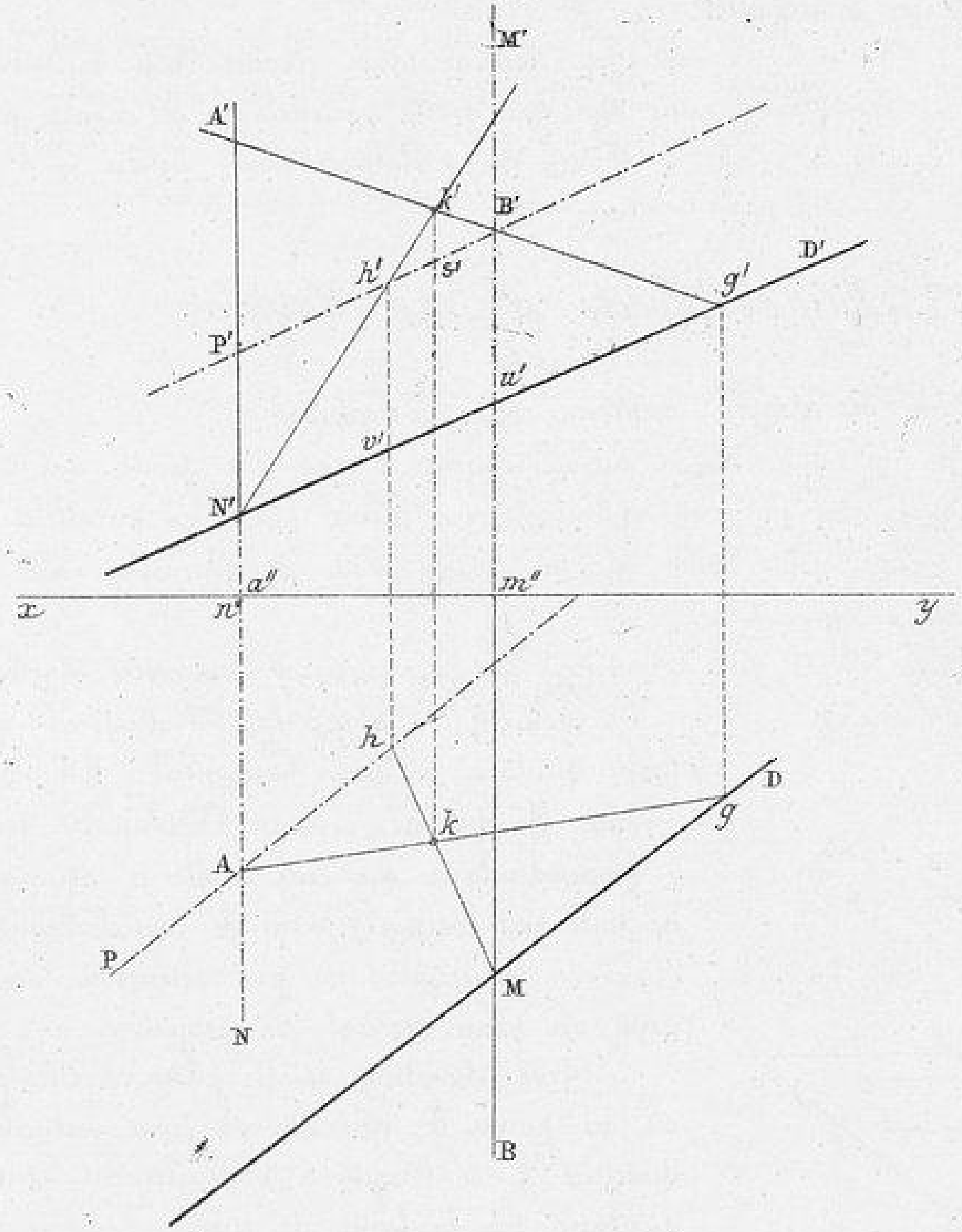
On voit à priori qu'il existe 3 génératrices de la surface qui sont parallèles aux 3 directrices. En effet : 1° Au point M, croisement de D et de B, se projette une verticale qui rencontre BD et qui est parallèle à A, c'est-à-dire qui rencontre A à l'infini. Cette verticale est une génératrice du 1er système, parallèle à la directrice A. Sa projection verticale est figurée en trait mixte —.—.—.— en m' M';

2° Au point N', croisement des projections verticales de D et de A, nous avons, de même, une perpendiculaire au plan vertical, rencontrant les deux directrices A et D et parallèle à la

3ᵉ directrice B. C'est donc encore une génératrice du 1ᵉʳ système. Sa projection horizontale est n"N perpendiculaire sur xy et figurée en trait mixte;

3ᵉ Menons, par les points de divergence A et B', les deux droites P et P' parallèles à D et D', et nous aurons encore une génératrice du 1ᵉʳ système parallèle à la 3ᵉ directrice.

Fig. 83.



Ces trois droites M, N et P, prises comme directrices, définissent un nouvel hyperboloïde. Ses génératrices auront 2 points de divergence : l'un M, en projection horizontale ; l'autre N, en projection verticale. Je vais démontrer, comme lemme, qu'une génératrice quelconque de ce deuxième hyperboloïde rencontre toujours une génératrice quelconque du premier.

Construisons une génératrice du 1ᵉʳ hyperboloïde. — Sa projection horizontale sera Ag divergeant de A, et sa projection verticale B'g' divergeant de B'. Le point gg' est sur la 3ᵉᵐᵉ directrice DD'. Construisons une génératrice du 2ᵉᵐᵉ hyperboloïde. — Sa projection horizontale est Mh, divergeant de M, et sa projection verticale, N'h', divergeant de N'. Le point hh' est sur la directrice PP'.

Ces droites se rencontrent en K en projection horizontale, et en K' en projection verticale.

Si les deux points K et K' sont sur une même ligne de rappel, le lemme sera démontré.

Or, on a : $\dfrac{hK}{KM} = \dfrac{Ah}{Mg} = \dfrac{N'v'}{u'g'}$

Menons la ligne de rappel K'S', on aura également :

$$\frac{h'S'}{S'B'} = \frac{n'v'}{u'g'} \quad \text{et, par suite,} \quad \frac{h'S'}{S'B'} = \frac{hK}{KM}.$$

Ce qui prouve que les lignes de rappel des points K et K' partagent, dans le même rapport l'intervalle compris entre les parallèles hh' et KK', et, par suite, ces lignes de rappel se confondent.

Ce lemme est donc démontré.

Cela posé, considérons 3 génératrices du 1er système, telles que la génératrice Ag-B'g' et un point KK' pris sur l'une d'elles. D'après le lemme, toute droite telle que Kh-K'h', divergeant horizontalement de M et verticalement de N' sera une génératrice du 2e hyperboloïde, et rencontrera non-seulement les deux autres génératrices du 1er système, mais encore toutes les autres. Le théorème est donc démontré.

Corollaires. – Puisqu'une génératrice quelconque du 2e hyperboloïde rencontre toutes celles du 1er, c'est qu'elle est contenue toute entière sur lui, et, par suite, les deux hyperboloïdes se confondent.

Par conséquent :

1° La surface peut être engendrée par deux systèmes de génératrices ;

2° Trois génératrices quelconques du 1er système peuvent être prises pour directrices du second système et réciproquement ;

3° Deux génératrices de système différent sont toujours dans un même plan (se rencontrent ou sont parallèles). Cela résulte du théorème.

4° Deux génératrices d'un même système ne sont jamais dans un même plan. Cela résulte de l'existence de deux points de divergence qui ne sont pas sur une même ligne de rappel ;

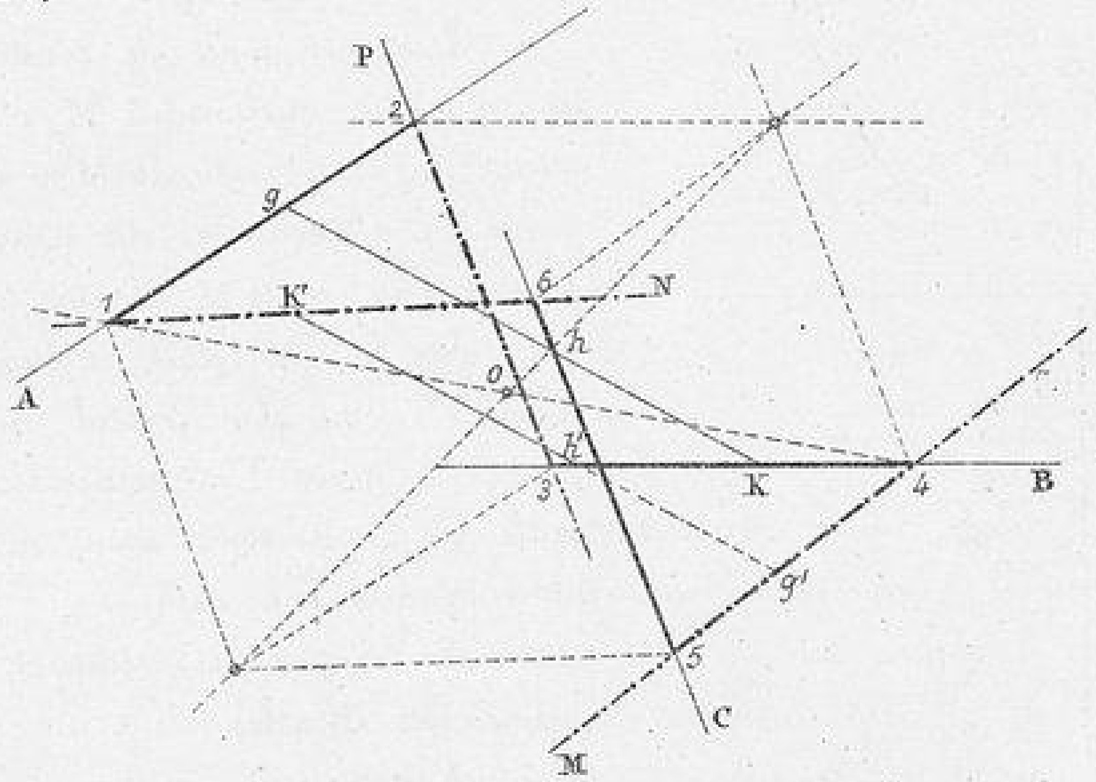
5° Le plan tangent en un point est défini par les deux génératrices de système différent qui passent par ce point ;

6° Tout plan contenant une génératrice d'un système, en contient une de l'autre système et est tangent au point d'intersection de ces 2 droites ;

7° Une génératrice d'un système en a toujours une de l'autre système qui lui est parallèle, et le plan qui les contient est tangent à l'infini pour chacune d'elles.

L'existence de deux génératrices parallèles est prouvée par la manière même dont nous avons fait l'épure précédente.

Fig. 84.



§ 52. – L'hyperboloïde réglé est une surface à centre (fig. 84).

Soient (dans l'espace) A-B-C trois directrices, et M-N-P les trois génératrices qui sont respectivement parallèles à ces 3 droites.

Ces 6 droites forment un hexagone gauche 1.2.3.4.5.6 inscrit sur la surface. Complétons le parallélipipède qui aurait ses côtés pour arêtes. Je dis que le centre O croisement des diagonales de ce

parallélipipède, est le centre de la surface.

En effet, soit ghK une droite s'appuyant sur les 3 directrices A·B·C. Prenons les points $g'h'K'$ symétriques des points ghK par rapport au point 0. Ces trois points seront en ligne droite, d'après les lois de la symétrie; ils seront situés sur les directrices du deuxième système M·N·P; par suite, la droite $g'h'K'$ sera une génératrice du 2e système et située sur l'hyperboloïde; de plus $g'h'K'$ est parallèle à ghK, ce qui prouve que toute droite du premier système a une droite du 2e système qui lui est parallèle et symétrique, par rapport au point 0. – Le point 0 est donc le centre de la surface.

§ 53. – Plans asymptotiques, leur enveloppe. – Cône asymptote.

Le plan des deux droites parallèles ghK et $g'h'K'$ est asymptotique. Il passe toujours par le centre 0, ce qui prouve que l'enveloppe des plans tangents à l'infini sur la surface, est un cône ayant son sommet au centre de la surface. Nous avons vu de plus que les génératrices de ce cône sont parallèles aux génératrices de l'hyperboloïde. Ce cône est donc, à la fois, asymptote et directeur.

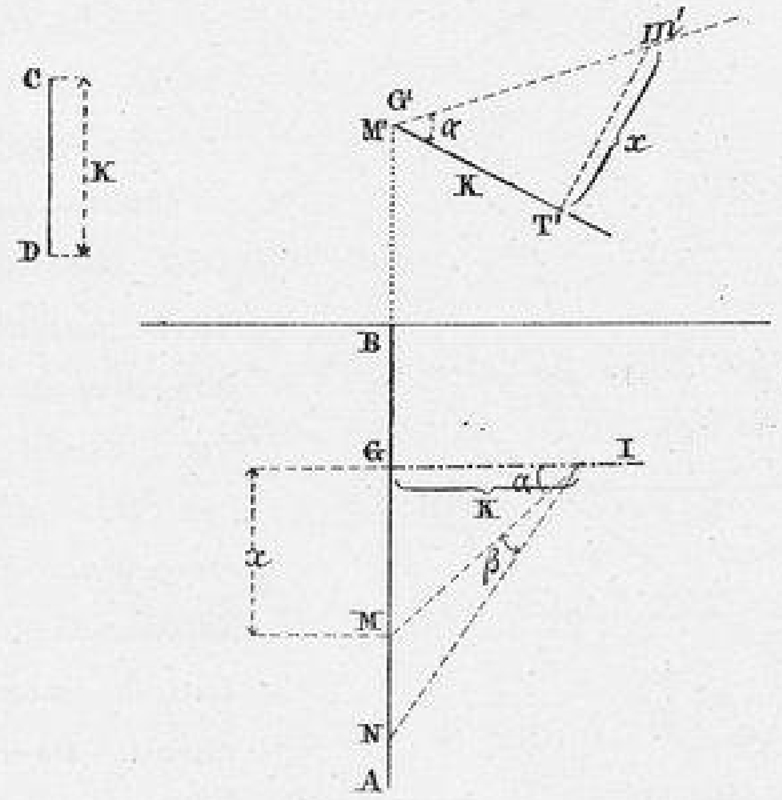
D. – Surfaces gauches quelconques.

§ 54. – Interprétation géométrique du théorème de Chasles. – Point de vue d'une génératrice.

Soit AB (fig. 85) une génératrice d'une surface gauche, que nous supposerons perpendiculaire au plan vertical,

G, son point central,

Fig. 85.



G'T', la trace verticale de son plan central, et CD = K son paramètre de distribution; on sait que $K = \lim. \frac{b}{\sigma}$.

Proposons-nous de construire le plan tangent en un point quelconque M, c'est-à-dire de déterminer la trace verticale M'm' de ce plan tangent.

La distance x du point M au point central se mesurera en GM sur la projection horizontale.

Sur la projection verticale, portons, sur la trace G'T' du plan central, une longueur G'T' = K = CD. Élevons T'm' perpendiculaire sur G'T' et égale à x, et nous avons en M'm' la trace du plan tangent cherché.

On a, en effet, $\tan g\, \alpha = \frac{x}{K}$, ce qui est la formule de Chasles.

Remarque. – Au point central G, élevons, en projection horizontale, une perpendiculaire à la

génératrice et portons sur cette droite une longueur GI = K paramètre de distribution et joignons IM.

Le triangle rectangle GIM donne : $tg.\,GIM = \frac{x}{K}$;

L'angle GIM est donc égal à l'angle α.

Par conséquent le point I est un point tel que le segment GMy est vu sous l'angle α que fait le plan tangent en M avec le plan central, c'est-à-dire avec le plan tangent en G.

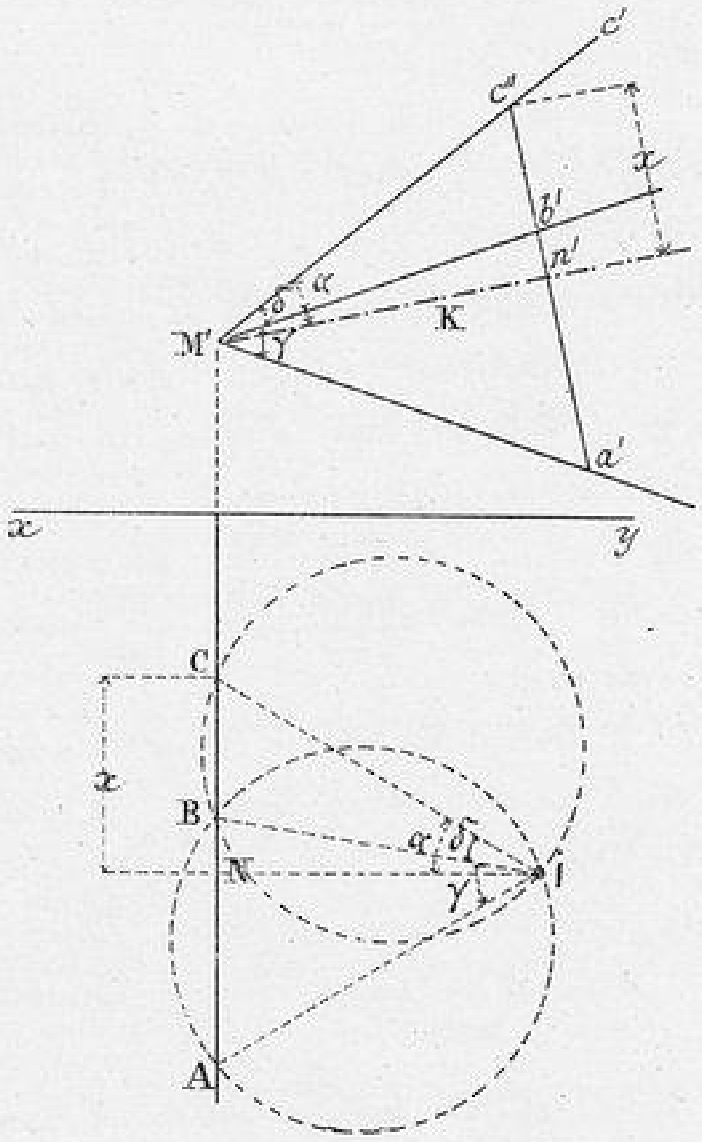
Il en résulte que tout autre segment, tel que MN, est vu, du point I, sous l'angle que font entre eux les plans tangents en M et en N, à ses deux extrémités.

Cette propriété a fait donner au point I le nom de Point de vue de la génératrice AB.

§ 55.- Connaissant 3 plans tangents en 3 points d'une génératrice, déterminer les éléments constitutifs de cette génératrice, c'est-à-dire : son point central, son plan central et son paramètre de distribution K.

Supposons maintenant que l'on connaisse en trois points ABC les 3 plans tangents, fig. 86.

Fig. 86.



Soient M'A' - M'B' - M'C' les traces verticales de ces plans, faisant entre elles des angles δ et γ.

On se propose de déterminer le point central, le plan central et le paramètre de distribution, ce qui permettra de construire le plan tangent en tout autre point.

1ère Solution. - Inscrivons entre les 3 traces c', b' et a', une droite telle que les segments c'b' et b'a' soient égaux aux segments CB et BA de la projection horizontale. C'est un problème facile à résoudre.

Abaissons M'n' perpendiculaire sur c'a'. Je dis :

1° Que cette droite est la trace du plan central ;

2° que M'n' est égal au paramètre de distribution K ;

3° que, si l'on prend BN = b'n', le point N est le point central.

En effet, prenons un quelconque des trois points, le point C par exemple.

Soit x sa distance au point N et α l'angle que fait la trace M'c' de son plan tangent avec M'n'.

On a $c'n' = CN = x$.

La projection verticale donne :

$tg.\alpha = \frac{c'n'}{M'n'} = \frac{x}{K}$, ce qui est la formule de Chasles. Comme elle se vérifie pour les deux autres points, cela justifie la construction.

2ème Solution. - Cherchons, en projection horizontale, le point de vue I, c'est-à-dire un point duquel les segments CB et BA soient vus sous les angles δ et γ.

A cet effet, sur BC, décrivons un segment capable de l'angle δ, et sur BA, un segment capable de l'angle γ. Ces deux segments se coupent en I, qui est le point de vue.

Abaissons IN, perpendiculaire sur AC. Le point N est le point central. IN est le paramètre

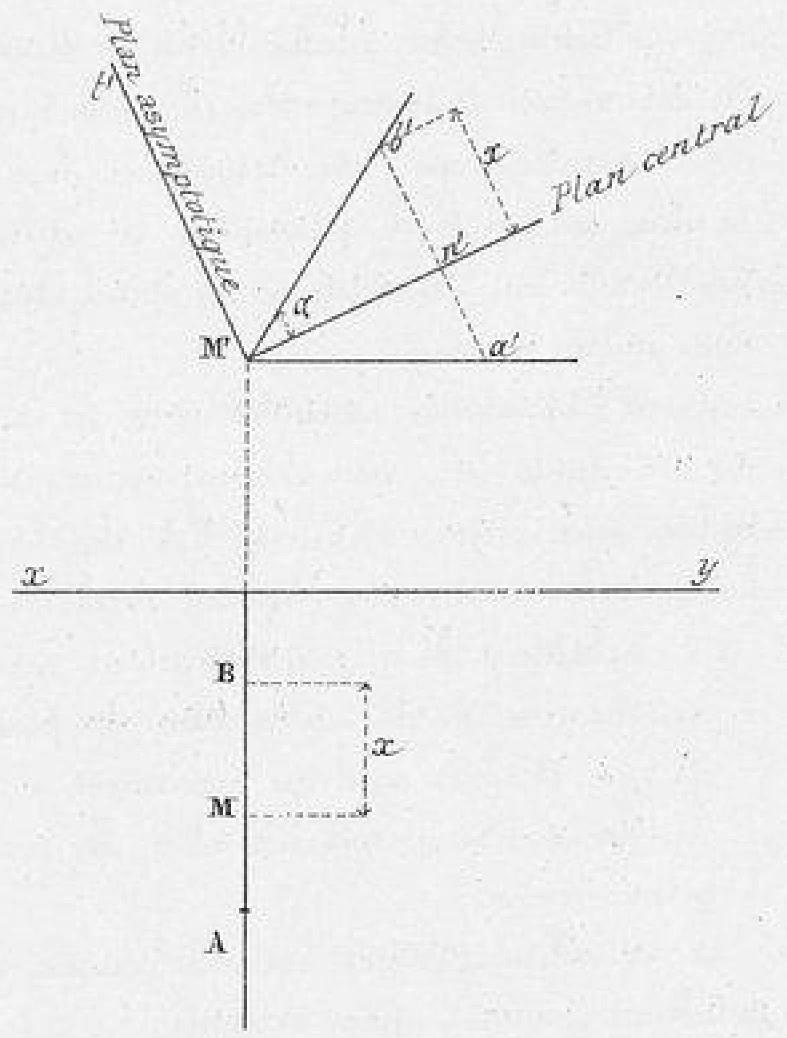
de distribution K, et, si l'on mène, en projection verticale la trace M'n' faisant avec MC un angle $\alpha = \widehat{NGC}$, on aura la trace du plan central.

§ 56. – Raccordement des surfaces gauches.

Puisque la connaissance de 3 plans tangents en 3 points entraîne la connaissance du point central, du plan central et du paramètre de distribution, et, par suite, celle des plans tangents en tous les autres points, il résulte de là, que, lorsque deux surfaces gauches ont une génératrice commune et 3 plans tangents communs en trois points de cette génératrice, elles ont les mêmes plans tangents en tous les autres. Elles se raccordent donc tout le long de cette génératrice.

Remarque 1. – L'un des plans peut être asymptotique. – Faisons, en effet, la construction qui donnerait le point central, quand l'un des plans M't est asymptotique, fig. 87.

Fig. 87.



Soient M'b' et M'a' les plans tangents en deux autres points A et B.

Je sais que le plan central est perpendiculaire au plan asymptotique. Sa trace est donc M'N' perpendiculaire sur M't'.

Je mène la droite b'a' perpendiculaire sur M'n' et telle que sa longueur b'a' soit égale à BA. J'ai en MN le paramètre de distribution, et si je porte BM = b'n' = x, j'ai en M le point central.

Conséquence. – Deux surfaces gauches se raccordent tout le long d'une génératrice quand elles y ont deux plans tangents communs et même plan tangent à leur cône directeur, ou même plan directeur, c'est-à-dire, en un mot, même plan asymptotique.

Remarque 2. – Le point central et le plan central communs équivalent à deux points; il suffit pour le raccordement, qu'il y ait en plus, un 2e plan tangent commun (même figure).

Soit M le point central commun et M'n' la trace du plan central;

Soit B un point situé à la distance x de M et M'b' la trace du plan tangent en B.

Menons la droite b'n' perpendiculaire sur M'n' et telle que l'on ait b'n' = BM = x et nous aurons en M'n' le paramètre de distribution.

Tous les autres plans tangents seront donc déterminés, ce qui justifie le raccordement.

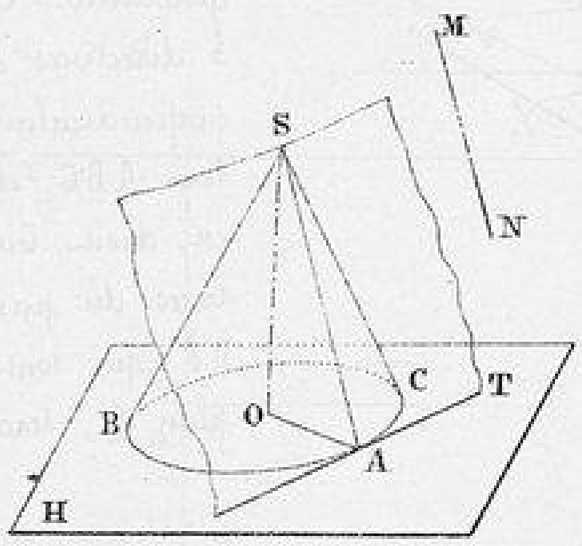
§ 57. – Ligne de striction, dans les surfaces à cône directeur de révolution ou à plan directeur.

On sait que l'on nomme ligne de striction, dans une surface gauche, le lieu géométrique des points centraux des différentes génératrices.

Théorème. — Dans les surfaces à cône directeur de révolution, à axe vertical ou à plan directeur horizontal, la ligne de striction est la courbe de contour apparent horizontal de la surface, fig. 88.

En effet, soit S le sommet du cône directeur, SA une de ses génératrices et MN la génératrice de la surface qui lui est parallèle. Dans le cône, puisqu'il est de révolution, le plan tangent est perpendiculaire au plan méridien SOA, c'est-à-dire au plan projetant horizontalement la génératrice SA ou la droite MN.

Fig. 88.



Mais le plan tangent au cône est parallèle au plan asymptotique de la génératrice MN de la surface, lequel est perpendiculaire au plan central. Le plan central de la génératrice MN est donc le plan qui la projette horizontalement. C'est donc un plan de contour apparent horizontal, et le point de tangence c'est-à-dire le point central est un point de contour apparent. C.Q.F.D.

Théorème réciproque. — Si une surface gauche a pour ligne de striction sa ligne de contour apparent horizontal, elle est à cône directeur de révolution d'axe vertical: autrement dit, ses génératrices font un angle constant avec le plan horizontal. (même figure) En effet. Soit SBA son cône directeur; O la projection horizontale du sommet, BAC la courbe de base. De l'hypothèse faite on conclut que AT, tangente à la base du cône étant l'intersection de deux plans, H et SAT tous deux perpendiculaires au plan central SOA, le premier H par hypothèse, le second SAT, comme plan asymptotique, est elle-même perpendiculaire au plan SOA et par suite à la ligne OA. La ligne de base du cône est donc une courbe telle que toutes ses normales, telles que OA passent par un point fixe; c'est donc un cercle et le cône est de revolution. C.Q.F.D.

Si le cône directeur devient un plan, le théorème subsiste.

Conséquences. — Dans le paraboloïde, le contour apparent de la surface sur son plan directeur est la ligne de striction.

Dans l'hyperboloïde réglé de révolution, le cercle de gorge est la ligne de striction.

§ 58. — Hyperboloïdes et Paraboloïdes de raccordement d'une surface gauche.

1° *Hyperboloïde.* — Soient ABC, fig. 89, trois points d'une génératrice, MNP les trois plans tangents à la surface en ces trois points, et $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ trois droites de ces plans tangents, c'est-à-dire trois tangentes quelconques à la surface.

Elles peuvent être prises pour directrices d'un hyperboloïde qui aura en A, B et C, 3 plans tangents communs avec la surface, et qui, par suite, se raccordera avec elle tout le long de la génératrice ABC.

On voit qu'il existe une infinité d'hyperboloïdes de raccordement. Ils ont tous le même plan asymptotique, le même point central et le même paramètre de distribution.

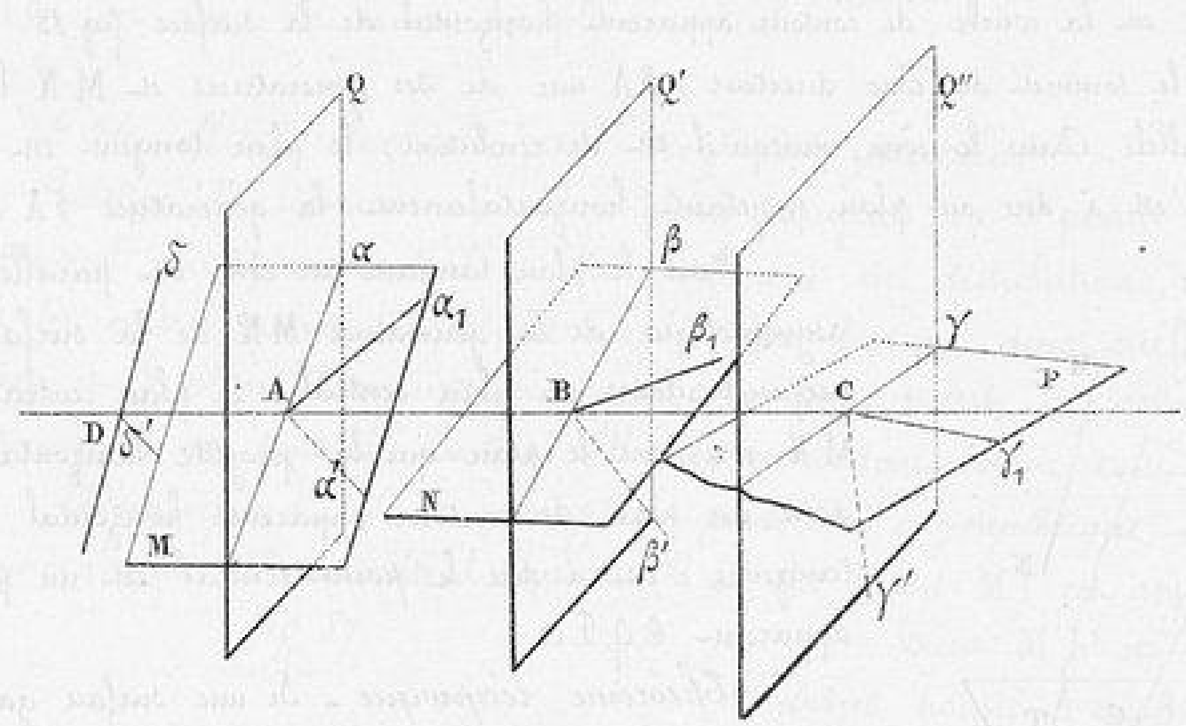
2° *Paraboloïde.* — Coupons les trois plans tangents M N et P par trois plans parallèles Q, Q', Q'', nous obtenons trois tangentes $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ qui seront parallèles à un même plan et qui définiront un paraboloïde de raccordement, surface plus simple que l'hyperboloïde.

Il existe également une infinité de paraboloïdes de raccordement.

Ils auront tous un premier plan directeur de commun, ce sera le plan asymptotique de la génératrice.

On pourra donc ne se donner que 2 tangentes $A\alpha$ - $B\beta$ comme directrices, et prendre, pour plan directeur le plan asymptotique.

Fig. 89.



Le second plan directeur dépend du plan Q qui peut être choisi arbitrairement.

Choisissons les plans $Q\,Q'\,Q''$ perpendiculaires sur la génératrice. Dans ce cas, les 3 directrices $A\alpha$ - $B\beta$ - $C\gamma$ sont perpendiculaires sur la génératrice ABC, et le paraboloïde est droit. Toutes les génératrices du paraboloïde, telles que $D\delta$, qui sont parallèles au plan Q, seront de même perpendiculaires sur ABC.

§ 59. – Paraboloïde des normales.

Prenons le paraboloïde droit précédent. Toutes les génératrices $A\alpha$ - $B\beta$ - $C\gamma$ - $D\delta$ ..... parallèles au plan Q sont tangentes à la surface et, de plus, perpendiculaires sur la génératrice de la surface ABC. Faisons le tourner d'un angle droit autour de ABC comme charnière. Les tangentes à la surface $A\alpha$ - $B\beta$ .... deviennent des normales $A\alpha'$ - $B\beta'$ - $C\gamma'$ ....

Par conséquent :

Théorème. – Les normales à une surface gauche aux différents points d'une génératrice forment un paraboloïde que l'on nomme le *paraboloïde des normales*. – (Ce paraboloïde est droit).

§ 60. – Lorsque deux surfaces gauches ont une génératrice commune, elles ont, en général, deux plans tangents communs en deux points. – Recherche graphique de ces deux points.

Soient M et N les points centraux de deux génératrices ; Mm' - Mn' les traces verticales des plans tangents en ces points ; K et G les paramètres de distribution ; γ l'angle $m'M'n'$ des plans centraux.

Prenons les droites MP et NQ perpendiculaires sur MN, et égales respectivement aux deux paramètres K et G (1). Joignons PQ et traçons, sur cette droite, un segment capable de l'angle γ. Les deux points A et B, où il rencontre la génératrice, sont les points pour lesquels ces deux surfaces ont deux plans tangents communs.

En effet, soit $MA = x \quad NA = y$ (les distances du point A aux deux points centraux).

On a : $\alpha + \beta = \gamma$

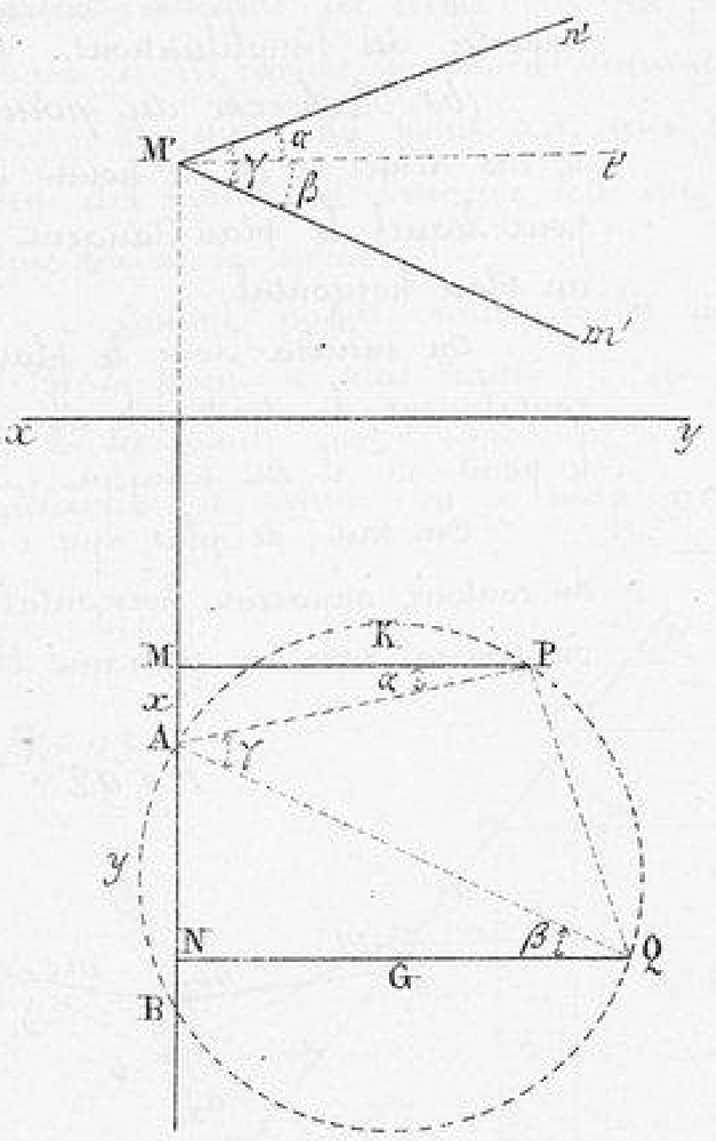
et de plus $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{AM}{MP} = \dfrac{x}{K}$; $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{AN}{NQ} = \dfrac{y}{G}$

Par conséquent, si je cherche la trace Mt' du plan tangent en A de la première surface, elle

(1) Les points P et Q sont les deux points de vue de la génératrice considérée comme appartenant séparément aux deux surfaces.

fera l'angle α avec la trace du plan central M'm'.

Fig. 90.



De même, si je cherche la trace du plan tangent en A à la deuxième surface, elle fera l'angle β avec M'n'. Elle se confondra donc avec M't'.

Remarque. – Il peut ne pas y avoir de solution si le segment capable de l'angle γ ne rencontre pas la génératrice MN. Les deux solutions se réduisent à une seule, s'il lui est tangent.

Si l'angle γ devient nul, c'est-à-dire si les plans centraux sont les mêmes, les points centraux ne coïncident pas ; le cercle a un rayon infini. Le premier point d'intersection A se place à l'intersection de la droite PQ et de MN, l'autre point B est rejeté à l'infini. Les deux surfaces ont un point de contact à distance finie et l'autre à l'infini.

Si, de plus, les deux paramètres de distribution sont égaux, le premier point A lui-même est rejeté à l'infini.

Application des surfaces de raccordement à la construction de plans tangents.

8e Leçon. § 61. – Emploi d'un paraboloïde de raccordement.

Mener le plan tangent en un point m m' d'une surface gauche à plan directeur, définie par 2 courbes directrices AA' et BB'. (fig. 91).

(a) Construction du plan tangent. – Supposons le plan directeur horizontal. Soit ab, a'b' une génératrice obtenue en coupant les deux directrices par un plan horizontal. Soit m m' un point sur cette génératrice.

Le paraboloïde de raccordement aura pour plan directeur le plan horizontal. On pourra lui prendre comme directrices les deux tangentes ak, a'k' et bh, b'h', aux deux directrices. – Dès lors nous rentrons pour le paraboloïde dans un problème connu, § 45.

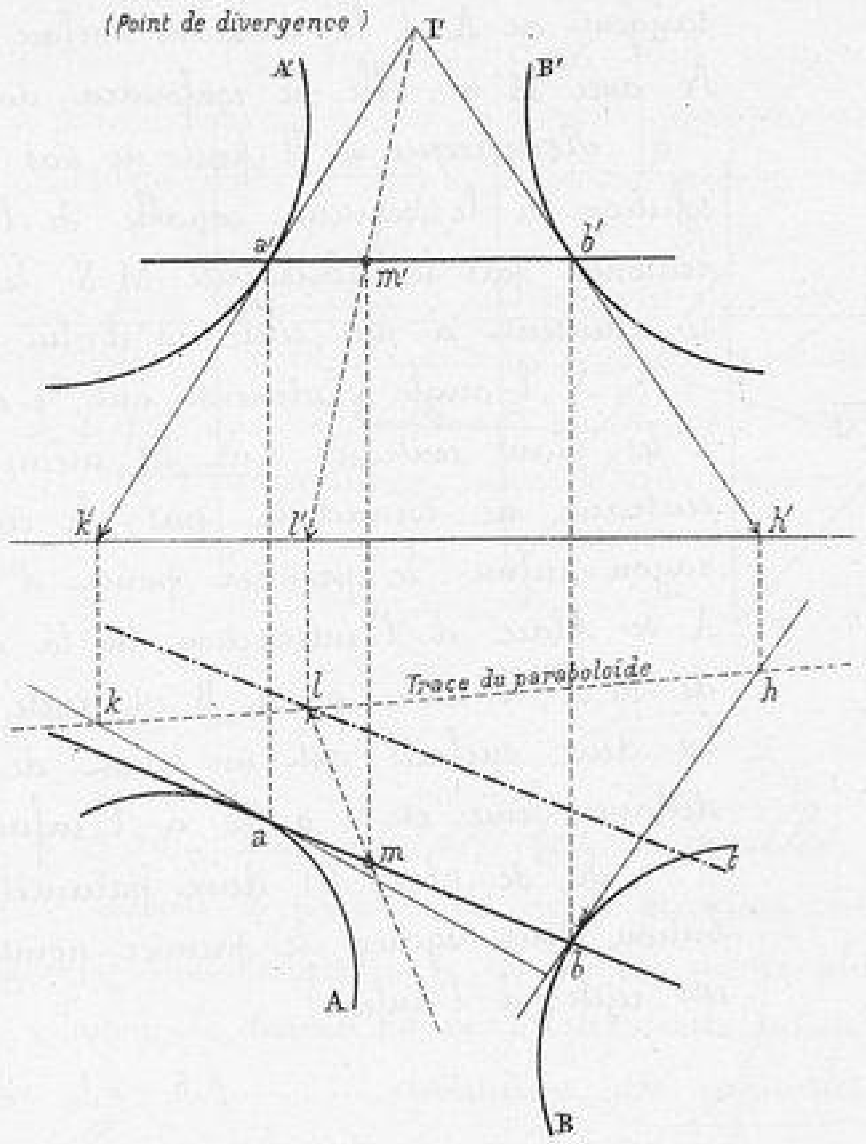
On joindra m' au point de divergence I' en projection verticale.

On prendra la trace horizontale kh, k'h', du paraboloïde. – On aura la génératrice du deuxième système en m'l' ml. Le plan tangent est défini par la génératrice ma, m'a' et ml, m'l', sa trace horizontale serait la droite lt parallèle à ab.

Remarque. – Au lieu de prendre pour directrices du paraboloïde les deux tangentes aux courbes, on aurait pu prendre deux droites de front des plans tangents en aa' et bb'.

Le 2e plan directeur eût été alors le plan vertical, le paraboloïde de raccordement serait isocèle et l'on aurait eu aussi un point de divergence en projection horizontale, ce qui aurait pu apporter des simplifications.

Fig. 91.

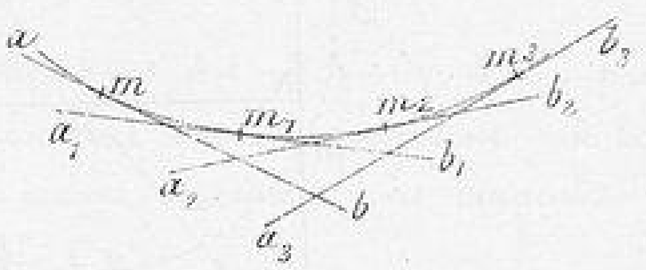


(b). Recherche du point central. – Dans le cas actuel, c'est le point de la génératrice pour lequel le plan tangent est perpendiculaire au plan horizontal.

On mènera donc le plan projetant horizontalement la droite ab, $a'b'$, et l'on cherchera le point où il est tangent. (Problème connu).

On sait, de plus, que c'est un point du contour apparent horizontal de la surface; on pourra donc, en prenant l'enveloppe des génératrices en projection horizontale, déterminer ce contour; ce qui donnera la projection de la ligne de striction m, m_1, m_2; et en remontant des points en projection horizontale aux points de l'espace, on aura tous les points centraux.

Fig. 92.



(c) Recherche du paramètre de distribution. – La formule de Chasles, $\operatorname{tang}\alpha = \frac{x}{K}$, montre que si l'on fait $\alpha = 45°$, c'est-à-dire $\operatorname{tang}\alpha = 1$, alors $x = K$.

Par conséquent, pour avoir le paramètre de distribution K, il suffira : 1° de mener par la génératrice un plan incliné à 45° sur le plan central, et, par suite aussi, sur le plan horizontal qui est perpendiculaire au plan central; 2° de chercher le point où ce plan est tangent. Sa distance x au point central donnera la longueur K.

Remarques. – La trace horizontale de ce plan à 45°, s'obtiendra immédiatement en menant une droite parallèle à ab, et située à une distance de cette ligne égale à sa cote de hauteur.

En menant par la génératrice deux plans à 45°, l'un d'un côté, l'autre de l'autre, et cherchant leurs points de contact, la distance de ces deux points donnera le double (2 K) du paramètre de distribution, et le point milieu sera le point central.

§ 62. – Conoïde oblique à noyau sphérique. (fig. 93).

Le conoïde a pour plan directeur le plan horizontal. Sa directrice rectiligne est la droite oblique CD - C'D' et son noyau est la sphère de centre OO'. Toutes les génératrices doivent être

tangentes à cette sphère.

(a) *Génératrice quelconque et courbe de contact, avec la sphère.* – Pour obtenir une génératrice courante on coupe par un plan horizontal H'. Ce plan rencontre en a'a la directrice rectiligne et il recoupe la sphère suivant le petit cercle horizontal l'l.

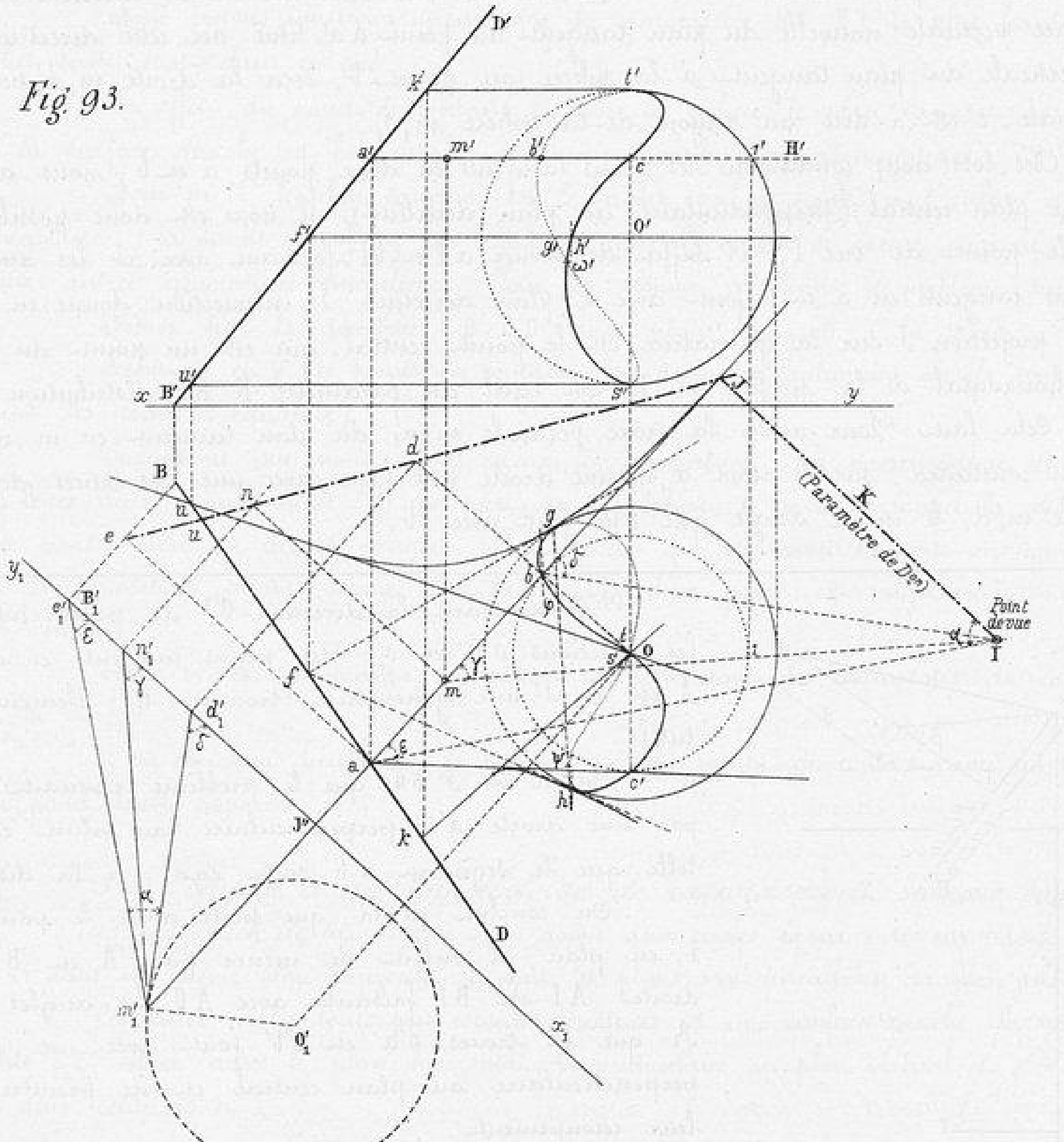
On mène du point aa' deux tangentes ab - a'b', ac - a'c' ce qui donne deux génératrices. Le lieu des points de tangence tels que b, c, g, h - b', c', g', h' donne la courbe de contact du conoïde et de la sphère.

Comme points remarquables de cette courbe de contact on cherchera :

1° Le point le plus haut t't et le point le plus bas S'S.

2° Les points sur l'équateur, gg' et hh'. Pour les obtenir on coupe par le plan de l'équateur ; on détermine le point J où ce plan rencontre la directrice rectiligne et l'on mène les deux tangentes Jh et Jg, au cercle d'équateur.

Fig. 93.



Nota : Aux points t' et S', en élévation, la courbe de contact est tangente au contour apparent vertical de la sphère : aux points h et g, en plan, elle est tangente à son contour apparent horizontal.

(b) *Plan tangent en un point quelconque mm'.* – Soit mm' un point quelconque pris sur la génératrice ab - a'b' : Nous pourrions, pour construire le plan tangent en ce point, imaginer un paraboloïde de raccordement et opérer ensuite comme au § 61. Les directrices de ce paraboloïde seraient, d'une part, une

droite quelconque du plan tangent en aa'; (On aurait avantage à prendre la directrice rectiligne elle-même), et, d'autre part, au point bb' une droite quelconque du plan tangent à la sphère, car la sphère et la surface ont en bb' le même plan tangent. Néanmoins il ne faudrait pas prendre une horizontale de ce plan tangent; car le plan directeur du paraboloïde étant déjà horizontal, on ne peut pas lui donner une directrice qui soit parallèle à son plan directeur; mais on pourrait prendre une de ses lignes de front.

Résolvons autrement la question et réalisons, sur l'épure, l'interprétation géométrique de la formule de Chasles, comme au § 54.

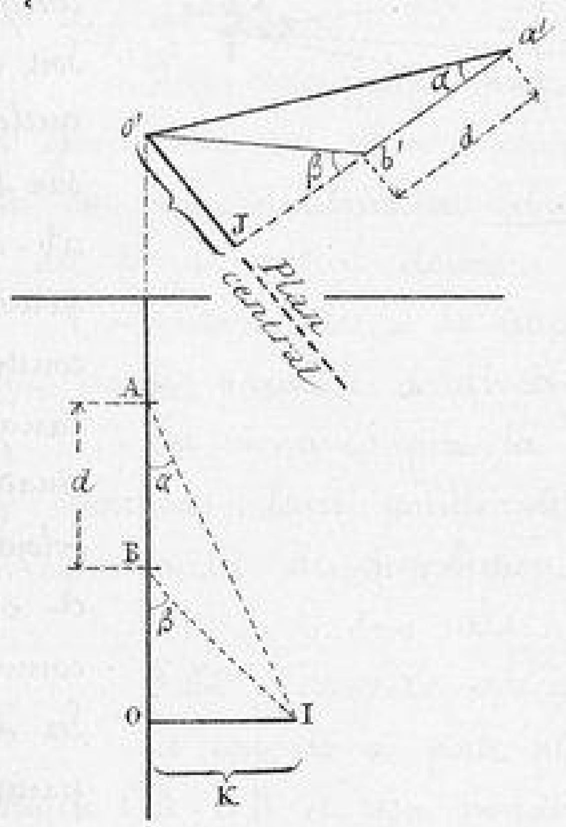
A cet effet, prenons en x_1y_1 un nouveau mur perpendiculaire sur la génératrice. Celle-ci s'y projette toute entière en un point m'_1 et tous les plans tangents sont projetés en entier, sur le nouveau mur, suivant leurs traces verticales.

Par conséquent cherchons en $m'_1B'_1$ la nouvelle élévation de la directrice et cette droite sera la trace verticale nouvelle du plan tangent au point aa' situé sur cette directrice. De même, la trace verticale du plan tangent à la sphère au point b, sera la droite $m'_1d'_1$ perpendiculaire à la normale, c'est-à-dire au rayon de la sphère $m'_1o'_1$.

Dès lors nous connaissons les plans tangents en deux points, a et b; nous avons la direction du plan central, (perpendiculaire au plan directeur); il nous est donc possible de déterminer le point de vue I.(1) Il suffit de mener aI et bI, formant avec ab les angles ε et δ que les plans tangents en a et b font avec le plan directeur. L'intersection donne en I le point de vue. Sa projection J sur la génératrice est le point central, qui est un point du contour apparent horizontal de la surface et IJ est égal au paramètre K de distribution.

Cela fait: Pour avoir la trace verticale $m'_1n'_1$ du plan tangent en m, on joindra Im, et on construira, sur le mur x_1y_1 une droite qui fasse avec une des traces déjà connues, par exemple $m'_1d'_1$ le même angle que Im fait avec Ib.

Fig. 93bis.



(1) Connaissant la direction O'J du plan central, et les directions O'a' et O'b' des plans tangents en deux points A et B d'une génératrice, trouver les éléments constitutifs.

On a vu § 54 que le problème revenait à couper par une droite a'b' perpendiculaire au plan central et telle que le segment a'b' soit égal à la distance AB.

On conclut de là, que pour avoir le point de vue I, en plan, il suffit de mener par A et B deux droites AI et BI faisant avec AO les angles α et β que les traces O'a' et O'b' font avec un plan perpendiculaire au plan central, et de prendre en I leur recoupement.

I est le point de vue et OI est le paramètre K, de distribution.

(c). – *Emploi d'un paraboloïde droit de raccordement.* – Prenons dans les deux plans tangents connus les lignes de front a c et b d, pour directrices d'un paraboloïde de raccordement. Il sera droit puisque le mur x, y, qui est, pour ce paraboloïde, le plan directeur du 2^e^ système, est perpendiculaire à la génératrice.

La droite e d, qui réunit les traces horizontales des deux directrices est la trace horizontale de ce paraboloïde, c'est une génératrice du 1^er^ système. Toutes les autres génératrices du 2^e^ système et, en particulier, celle du point m, doivent avoir leurs traces horizontales, telles que n, sur la ligne e d.

Nota. – Cette ligne e d passe par la projection J du point central.

(d) *Génératrices singulières.* – On nomme génératrices singulières dans une surface gauche celles pour lesquelles, par exception, le plan tangent n'obéit pas à la formule de Chasles et reste le même tout le long de la génératrice.

Il suffit pour qu'il en soit ainsi que le plan tangent soit le même en deux points, pourvu que l'un au moins de ces deux points ne soit pas à l'infini.

Nous voyons immédiatement que la génératrice K t, K' t' la plus haute et u s - u' s' la plus basse sont dans ce cas.

En effet, au point de contact t t' avec la sphère, le plan tangent à la sphère et par suite à la surface gauche est horizontal ; de même que le plan asymptotique.

Donc en t t' le plan tangent est le même qu'au point à l'infini et la génératrice est singulière. (La limite de $\frac{p}{\sigma}$ y est égale à zéro. Il en est de même pour u s - u' s'. Il y a en plus deux autres génératrices singulières. Pour les trouver résolvons le problème suivant :

Mener par la directrice C D - C' D' deux plans tangents à la sphère.

Soient φ et ψ les points de contact (On démontre facilement qu'ils sont sur la droite h g qui joint les points d'équateur).

Imaginons que nous ayons mené les génératrices qui passent par ces points. On voit que en leurs deux points situés d'une part sur la sphère, d'autre part sur la directrice, c'est le plan que nous venons de mener tangent à la sphère qui est aussi tangent au conoïde. Donc chacune de ces génératrices ayant même plan tangent en deux points est singulière (pour ces droites : lim. $\frac{p}{\sigma}$ est infini).

Nota : 1° On reconnaîtra facilement qu'elles sont les asymptotes du contour apparent horizontal de la surface ;

2° On cherchera directement le point ω' où la courbe de contact avec la sphère présente, en élévation, un point double apparent.

§ 63. – *Emploi d'un hyperboloïde de raccordement – Biais passé gauche (fig. 94).*

(a) *Génération de la surface.* – On donne deux cercles égaux entre eux, dont les centres sont en O O' et I I' dans un même plan horizontal et dont les plans sont parallèles au plan vertical.

Ces deux cercles sont pris comme directrices d'une surface gauche. La troisième directrice est une droite Z Z' située dans le plan horizontal, perpendiculaire au plan vertical et passant à égale distance des deux centres O et I.

La surface est

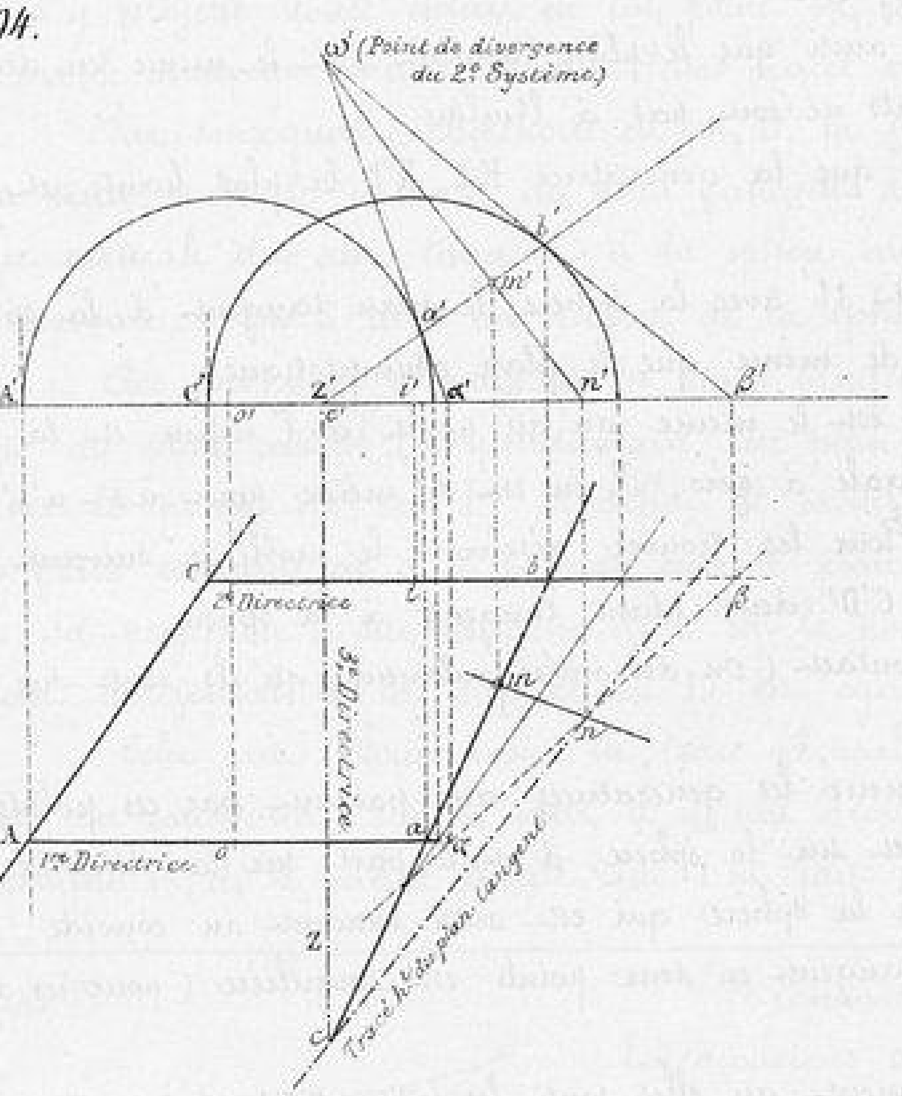
La surface est engendrée par une droite assujettie à rencontrer ces trois directrices[1]

(b) Tracé d'une génératrice. — En élévation les génératrices divergeront toutes du point z', trace verticale de la 3e directrice. — On aura donc la projection verticale d'une génératrice quelconque en z'a'b'. — On rappellera les points a' et b' en a et b sur les directrices circulaires, et on aura en b a c la projection horizontale.

(c) Plan tangent en un point quelconque m m'. — Considérons un hyperboloïde de raccordement qui aurait les trois directrices suivantes :

1° au point c, la droite zz' elle-même ; 2° au point a, la tangente au 1er cercle, aα, a'α' et 3° au point b la tangente bβ - b'β' au 2e cercle.

Fig. 94.



Cet hyperboloïde est de raccordement et le problème consiste à construire son plan tangent en m m', ce qui revient à déterminer la génératrice du 2e système qui passe par ce point.

Or on sait qu'une génératrice du 2e système rencontre toutes celles du 1er ; cherchons donc deux génératrices du 1er système ; ce qui avec c a b, c'a'b' en fera trois.

Nous prendrons d'abord la droite projetée verticalement au point ω', croisement apparent des deux directrices a'α' et b'β'. — C'est bien une droite du 2e système, car elle rencontre aα, et bβ à distance finie, et zz' à distance infinie, ω' est un point de divergence pour le 2e système, comme z' en est un pour le premier.

Nous prendrons ensuite une autre génératrice quelconque du 1er système, par exemple, celle que l'on obtient en αβ en coupant par le plan horizontal.

Dès lors, la génératrice du 2e système est obtenue, à priori, sur l'élévation en ω'm'. — On prend en n'n son intersection avec αβ, et la trace horizontale du plan tangent est la droite c n.

(d) Génératrices singulières. — Les génératrices de naissance telles que AC, sont singulières. En effet aux deux points AA' et CC' les tangentes aux cercles sont verticales et par suite parallèles. Donc, le plan tangent est le même aux deux points A et C, et par suite en tous les autres points de la génératrice.

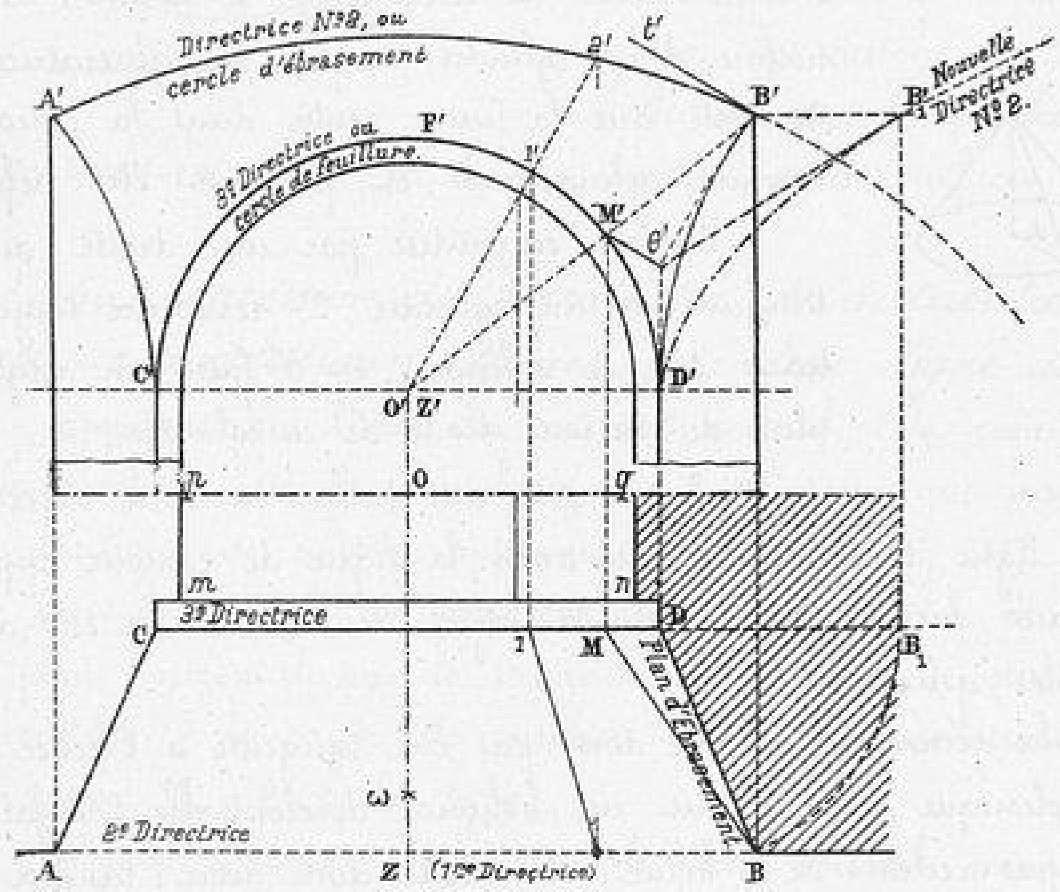
---

[1] Les anciens appareilleurs employaient cette surface pour voûter un berceau biais qui aurait pour courbes de tête les deux demi-cercles oA et iC. Aujourd'hui on construit les voûtes biaises par appareil orthogonal ou hélicoïdal. (Coupe des pierres, voûtes biaises).

§ 64. – Arrière voussure de Marseille. (fig. 95.)

Données: On veut couvrir par une voûte, l'espace en forme de trapèze ABCD, compris entre les plans d'ébrasement AC et DB d'une fenêtre en plein cintre. Et l'on désire: 1° que la voûte soit assez élevée pour permettre le développement des battants de la fenêtre, et 2° Que les lignes de lit de la voûte soient des lignes droites, tout en conservant pour surfaces de lit les plans de lit normaux au cylindre qui constitue la partie de voûte comprise entre les tableaux m p et n q.

Fig. 95.



La surface gauche qui couvre le trapèze ABCD, est à trois directrices.

La 1ère Directrice est l'axe de la voûte, c'est-à-dire une droite OZ-O'Z' perpendiculaire au plan vertical, comme dans le biais passé.

La 2e Directrice est un arc de cercle A'B' nommé cercle d'Ébrasement, et montant assez haut pour permettre au battant de la fenêtre d'échapper en tournant.

La 3e Directrice est le ½ cercle de feuillure C'F'D' - CD. Une génératrice quelconque O'1'2', diverge, en élévation, du point O'. En plan sa projection est 12.

Génératrice de passage O'M'B'. On désigne ainsi celle qui passe par l'angle B' de l'arête de feuillure: à ce moment la 2e Directrice A'B', cesse de servir et il faut en prendre une autre telle que B'D', tracée dans le plan d'ébrasement DB. Cette nouvelle directrice doit être telle que la voûte ne présente pas de jarrets; autrement dit, il faut que la nouvelle surface gauche qui aura B'D' pour directrice se raccorde avec celle que l'on quitte, et qui avait A'B' pour directrice: Or aux points O' et M' on garde les anciennes directrices N^{os} 1 et 3, donc on y a les mêmes plans tangents. Il suffit alors d'avoir un 3e plan tangent commun en M'. Autrement dit: la tangente B'θ' (rabattue en $B'_1\theta$) à la directrice nouvelle doit être l'intersection du plan d'ébrasement et du plan tangent en B' à la surface gauche que l'on quitte. – Cherchons cette intersection:

1° B't' tangente au cercle d'ébrasement, est une ligne de front de ce plan tangent. – 2° M'θ' parallèle à B't en est donc aussi une ligne de front. – 3° D'θ', verticale, est une ligne de front du plan d'ébrasement, située dans le même plan de front que M'θ'; .... Donc la tangente cherchée est θ'B' - rabattue en $\theta'B'_1$ et la courbe B'_1D', ramenée en B'D' peut être prise pour nouvelle directrice à la condition qu'elle ait pour tangente $B'\theta' - B'_1\theta'$.

Surfaces hélicoïdales réglées

Surfaces hélicoïdales réglées.

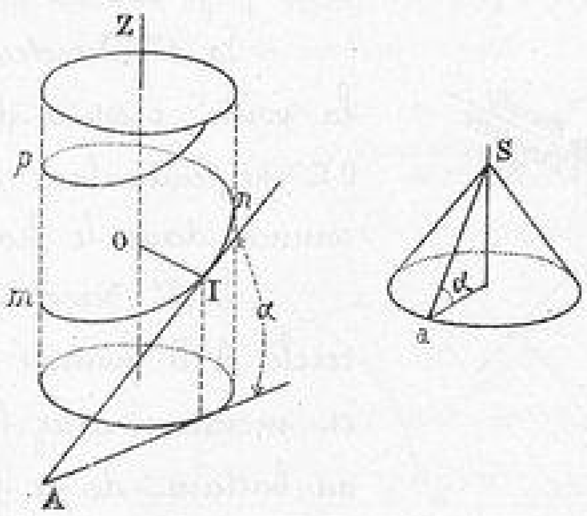
9e Leçon.

§65. – Classification de ces surfaces.

Elles sont soit à plan directeur, soit à cônes directeurs de révolution : Elles peuvent se classer de la manière suivante :

(a) *Hélicoïde gauche quelconque.* – Engendré par le mouvement hélicoïdal d'une droite quelconque ne rencontrant pas l'axe du mouvement. – OZ l'axe ; AI la droite ; OI, sa plus courte distance à l'axe (comme dans l'hyperboloïde de révolution). Le point I ne quittera pas la surface d'un cylindre auquel la génératrice sera toujours tangente. De sorte que la figure rentre dans la catégorie des surfaces à noyaux cylindriques, et pourrait être définie ainsi :

Fig. 96.



Surface engendrée par une droite, qui 1° reste constamment tangente à un cylindre, 2° rencontre toujours une hélice mn tracée sur ce cylindre, et 3° fait un angle constant α avec le plan de section droite de ce cylindre.

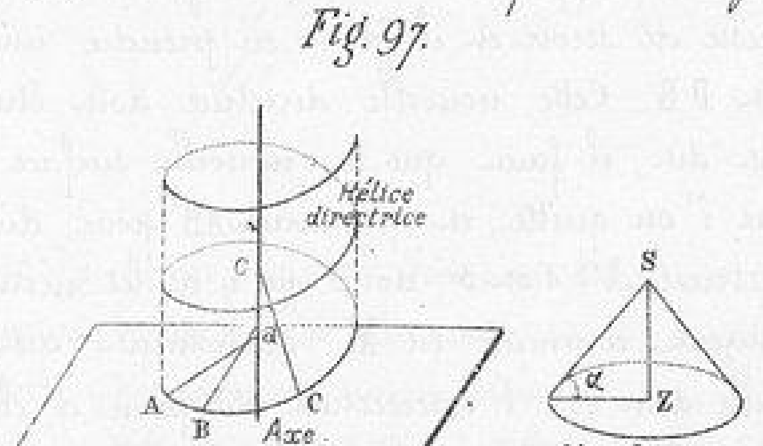
C'est donc une surface à cône directeur de révolution S, et l'on a vu que la ligne de striction était aussi la ligne de contour apparent horizontal : Donc l'hélice mn tracée sur le noyau est la ligne de striction, c'est-à-dire le lieu des points centraux I de toutes les génératrices.

Remarque. – La génératrice IA ne doit pas être tangente à l'hélice de striction ; autrement l'hélicoïde gauche quelconque, deviendrait un hélicoïde développable ; surface qui a été étudiée plus haut. – Soit h, le pas réduit de l'hélice ; on doit donc avoir : $\tan\alpha \lessgtr \frac{h}{R}$.

Si on avait $\tan\alpha = \frac{h}{R}$, d'où $R = h \cot\alpha$, alors l'hélicoïde serait développable.

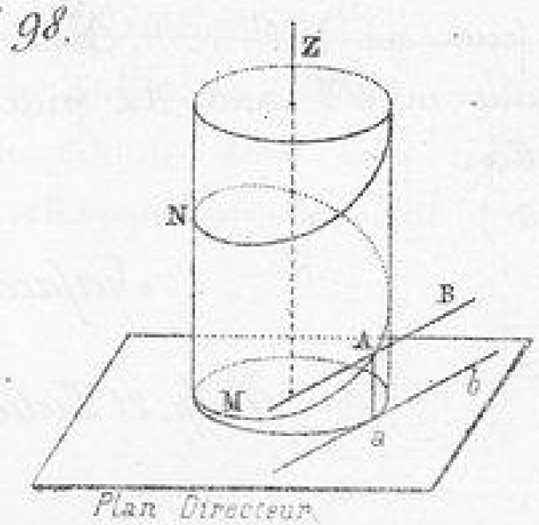
(b) *Hélicoïde, de vis à filet triangulaire.* – Cas particulier du précédent : Le noyau s'est réduit à une droite qui est l'axe du mouvement.

Fig. 97.



On peut définir ainsi : L'hélicoïde, vis à filet triangulaire, est engendré par le mouvement hélicoïdal d'une droite qui rencontre l'axe du mouvement, mais qui ne lui est pas perpendiculaire. Ou encore : C'est une surface à deux directrices et à cône directeur : Les directrices sont : 1° une droite ; 2° une hélice ayant la droite pour axe ; 3° le cône directeur est de révolution autour d'une droite SZ, parallèle à l'axe.

Fig. 98.

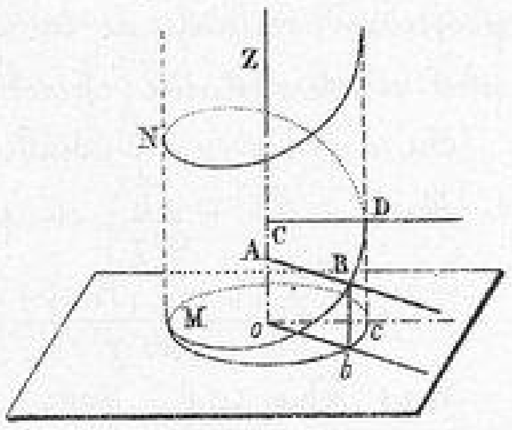


(c) *Hélicoïde gauche à plan directeur.* – C'est un cas particulier de l'hélicoïde quelconque. Le cône directeur étant devenu un plan perpendiculaire sur l'axe ; rentre dans les surfaces à noyau cylindrique. On pourrait le définir ainsi : Surface engendrée par une droite qui : 1° reste toujours horizontale ; 2° reste tangente à un cylindre de révolution vertical ; 3° rencontre toujours une hélice (sa ligne de striction)

MAN tracée sur ce cylindre.

(d) *Hélicoïde, vis à filet carré.* – Cas particulier du précédent. Le noyau s'est réduit à une droite verticale OZ, qui est l'axe du mouvement.

Fig. 99.



Les génératrices AB-CD, sont horizontales. – Elles rencontrent l'axe en A, C, et pour les guider on se donne une hélice MBDN (qui n'est pas ici la ligne de striction).

(e) *Architecture.* – Les escaliers rentrent dans la catégorie c et d. – Les arêtes des marches d'un escalier en tour ronde, à noyau plein, forment une vis à filet carré. – Les dessous des marches, ou intrados forment un hélicoïde gauche à plan directeur.

Avant d'étudier en détail chacune de ces surfaces résolvons la question suivante:

§66. – *Expression du paramètre de distribution dans les surfaces à cône directeur de révolution, définies par leur ligne de striction.*

Supposons que l'axe du cône soit vertical. Cela revient à dire que les génératrices font un angle constant avec le plan horizontal. On sait que dans ce cas, § 57, la ligne de striction est aussi la ligne de contour apparent horizontal. (fig. 100).

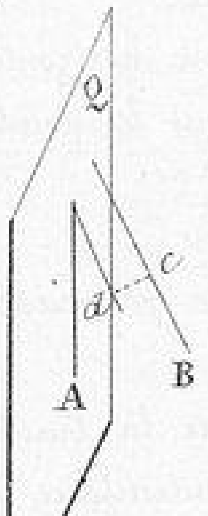
Soit β l'angle constant des génératrices avec le plan horizontal, et γ l'angle formé avec le plan horizontal par la tangente à la ligne de striction au point où elle rencontre une génératrice; ρ le rayon de courbure de la ligne de striction en projection horizontale. Je dis que l'on aura : $K = \rho\,(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma)$.

Pour le démontrer, supposons le plan vertical parallèle à la génératrice considérée. Soit AB-A'B' la ligne de striction; en projection horizontale toutes les génératrices sont tangentes à la courbe AB. Soit aa' un point de cette ligne; at, a't' la tangente en ce point; γ son angle avec le plan horizontal; am, a'm' une génératrice, et β son angle avec le plan horizontal.

Il faut évaluer $K = \lim. \dfrac{p \text{ (plus courte distance)}}{\sigma \text{ (angle de 2 génératrices voisines)}}$

Soit bn la génératrice infiniment voisine, – ω l'angle qu'elle fait en projection horizontale avec la génératrice at. Nous avons vu à l'occasion du rayon de courbure de l'hélice que l'angle σ de l'espace avait pour expression :

Fig. 100^bis^.



$$\sigma = \omega . \cos\beta . \ (\S\ 40).$$

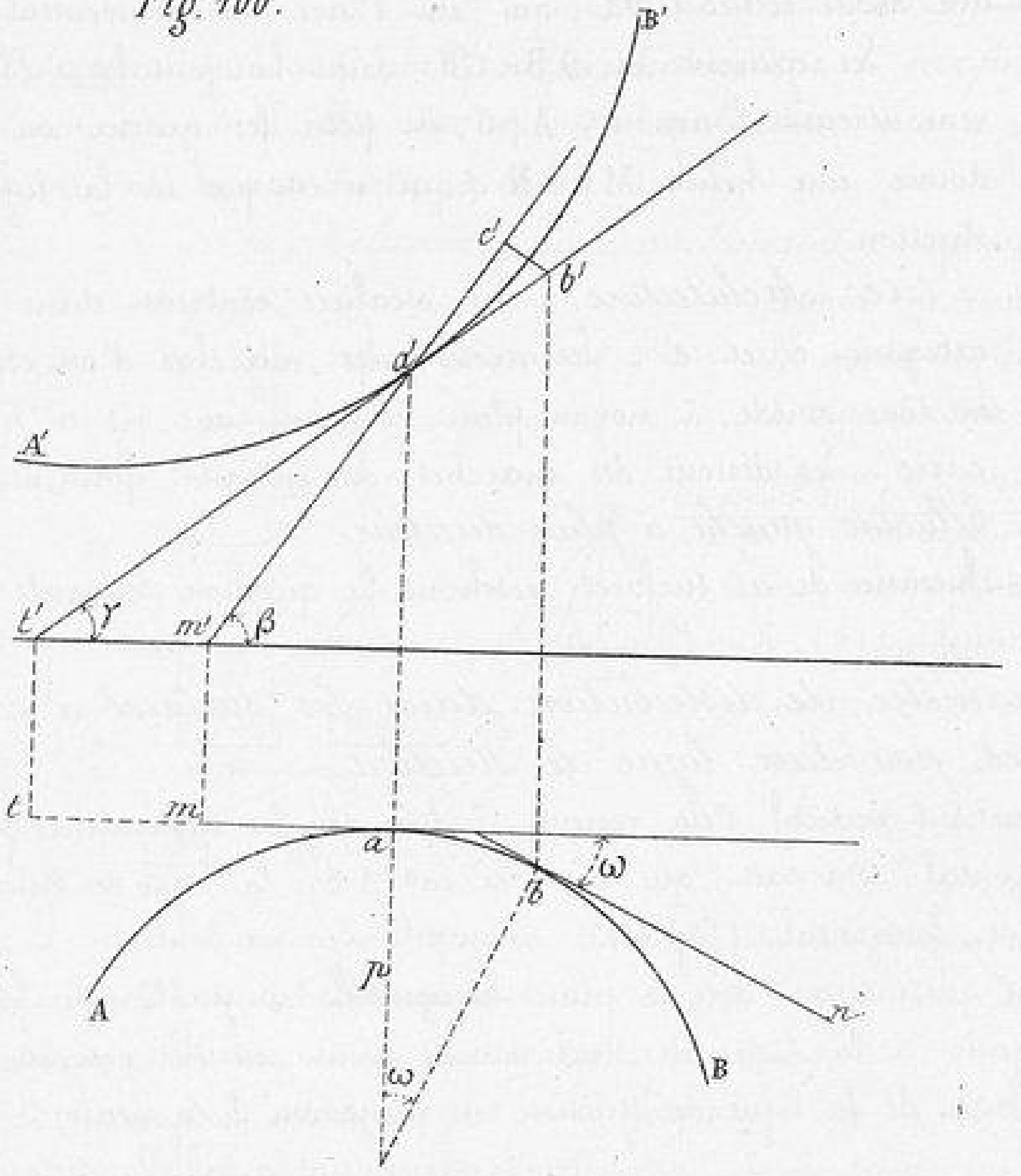
Évaluons la plus courte distance p. Il suffit pour cela, fig. 100^bis^, d'évaluer la distance d'un point C de l'une des droites, au plan Q mené par l'autre et parallèlement à la première.

Or, dans le cas actuel, le plan mené par la génératrice am-a'm', parallèlement à la génératrice infiniment voisine et tangent à l'infini est perpendiculaire au plan central et, par suite, comme ce dernier est le plan projetant horizontalement am, c'est le plan a'm' projetant verticalement la génératrice, il est projeté tout entier suivant sa trace verticale m'a'.

Nous prendrons sur la génératrice infiniment voisine, le point b où

elle rencontre la ligne de striction. Sa projection verticale sera b', située, en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur sur la tangente $b't'$ au lieu d'être sur la courbe.

Fig. 100.



La perpendiculaire $b'c'$ abaissée sur la projection verticale de la génératrice, est la plus courte distance cherchée.

On a : $b'c' = \overline{a'b'}.\sin(\beta-\gamma)$;

Mais $\overline{a'b} = \dfrac{\overline{ab}}{\cos\gamma}$, et par suite,

$$b'c' = p = \frac{\overline{ab}.\sin(\beta-\gamma)}{\cos\gamma}$$

Mais $\overline{ab} = \omega\rho$; donc :

$$K = \frac{p}{\sigma} = \frac{\omega\rho.\sin(\beta-\gamma)}{\cos\gamma\times\omega\cos\beta} = \rho.\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta.\cos\gamma} ;$$

développant : $K = \rho\,\dfrac{\sin\beta.\cos\gamma-\cos\beta.\sin\gamma}{\cos\beta.\cos\gamma} = \rho(\mathrm{tg}\,\beta-\mathrm{tg}\,\gamma).(1)$

Telle est l'expression cherchée : Il y entre le rayon de courbure ρ de la ligne de striction en projection horizontale, l'angle γ, que la tangente à cette ligne dans l'espace, fait avec le plan horizontal et l'angle β, constant, que les génératrices de la surface font aussi avec le plan horizontal.

Discussion. – 1° $\mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{tg}\,\gamma$.

La génératrice est tangente à la ligne de striction.

$K = 0$. Le plan tangent est le même en tous les points et à l'infini. La génératrice est singulière.

2° $\mathrm{tg}\,\beta = \infty$. Cette hypothèse est impossible, puisque l'angle β est constant.

3° $\mathrm{tg}\,\gamma = 0$. La tangente à la ligne de striction est verticale. Cette ligne présente un rebroussement en projection horizontale, avec un rayon de courbure infini : alors $K = \infty$; le plan tangent est le même en tous les points et la génératrice est singulière.

4° $\rho = \infty$. La courbe de striction présente une inflexion en projection horizontale. Son plan osculateur est vertical. $K = \infty$. Le plan tangent est le même en tous les points et au point central. La génératrice est singulière.

§ 67. – Mêmes surfaces. – Plan tangent en un point d'une génératrice. – Pôle d'une génératrice.

Soit $m\,d$, fig. 101, la trace horizontale de ce plan. Elle passera par la trace horizontale m de la génératrice. – Abaissons du point c, projection du point, une perpendiculaire sur cette trace, et soit S le point où elle rencontre la normale à la ligne de striction. – Soit O le centre de

courbure, et ρ le rayon de courbure de la ligne de striction au point a. Calculons la distance $OS = q$. Nous allons montrer que cette distance est indépendante de x.

Si nous menons cd perpendiculaire sur mc, cette ligne peut être considérée comme la trace horizontale du plan $dc''f'$ qui déterminerait le rectiligne du dièdre formé par le plan projetant la génératrice (c'est le plan central) et par le plan tangent au point cc'. – Effectuons, comme l'indique l'épure, fig. 101, la construction connue qui donnerait cet angle α – Nous aurons, en appelant d la cote du point cc':

$$\overline{cd} = \overline{cf}.\,tg.\alpha = c''f'.\,tg.\alpha = d\,Cos.\beta.\,tg.\alpha.$$

Les 2 triangles cdm et acS, ont leurs côtés perpendiculaires; ils sont donc semblables et donnent $\frac{\overline{aS}}{\overline{mc}} = \frac{\overline{ac}}{\overline{cd}}$, d'où l'on tire:

$$\overline{aS} = \frac{\overline{ac} \times \overline{mc}}{\overline{cd}} = \frac{x.\cos.\beta \times d.\,cotg.\beta}{d.\cos.\beta.\,tg.\alpha} = \frac{x.\,cotg.\beta}{tg.\alpha}$$

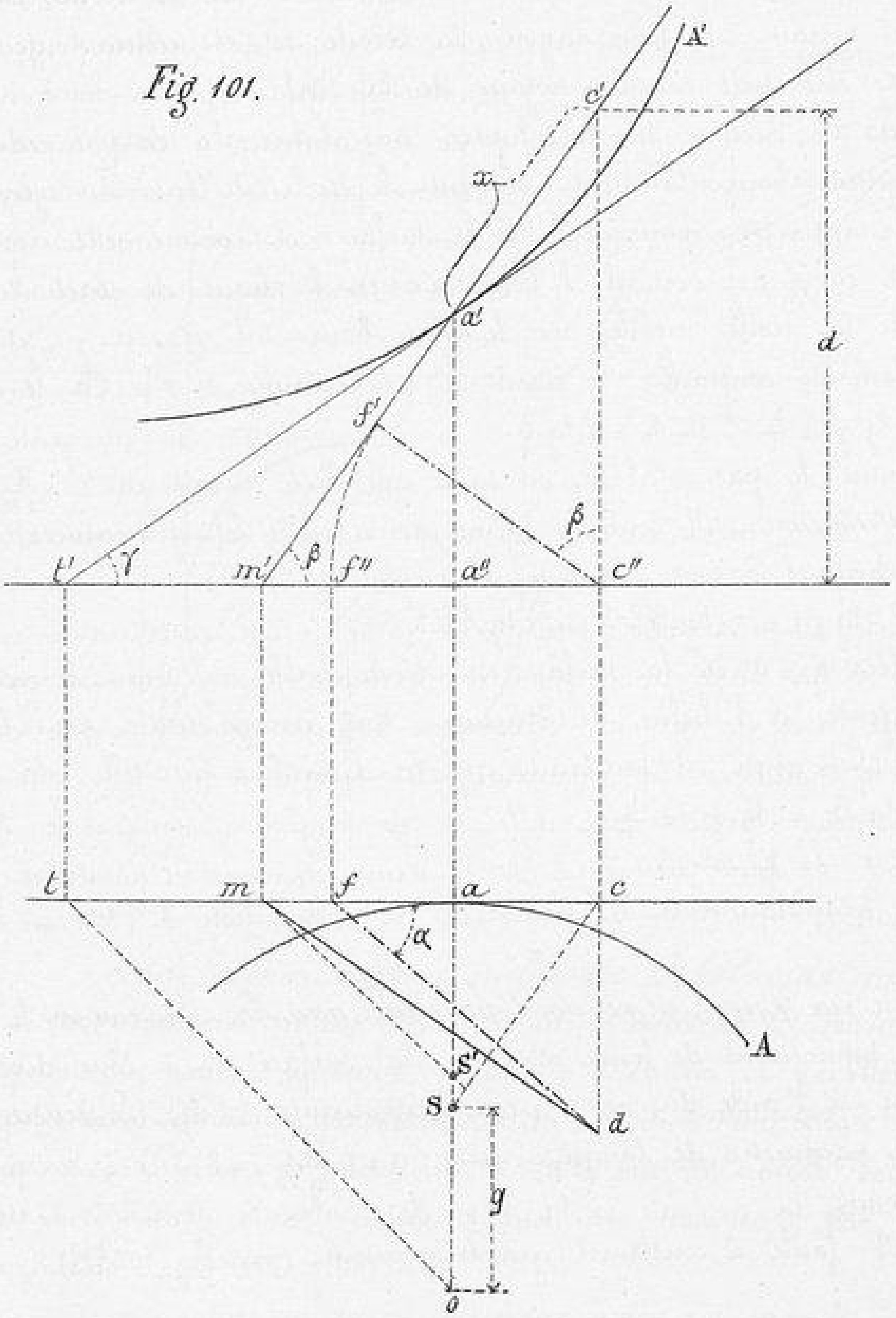
Mais d'après la formule de Chasles

$tg\alpha = \frac{x}{K}$ et nous avons (§ 64) $K = \rho\,(Tang.\beta - tg.\gamma)$ par conséquent:

$$\overline{aS} = \frac{x.\,cotg.\beta}{\frac{x}{\rho\,(tg.\beta - tg.\gamma)}} = \frac{\rho\,(tg.\beta - tg.\gamma)}{tg.\beta} = \rho\left(1 - \frac{tg.\gamma}{tg.\beta}\right)$$

$$(2)\quad \overline{OS} = \rho - \overline{aS} = \rho\,\frac{tg.\gamma}{tg.\beta}\,,$$

Fig. 101.



quantité indépendante de x et, par conséquent, constante pour tous les points d'une même génératrice.

Le point S se nomme le Pôle de la génératrice am – La distance $OS = q$ se nomme le paramètre de tangence.

Pour le construire géométriquement on joint au centre de courbure la trace t de la tangente à la ligne de striction; on mène par la trace m de la génératrice une parallèle à la ligne ainsi construite, et on prend son intersection S' avec la normale. – Reportant la distance aS' de O en S, on aura le Pôle.

En effet, on a: $tg.\gamma = \frac{\overline{a'a''}}{\overline{t'a''}}$ et $tg.\beta = \frac{\overline{a'a''}}{\overline{m'a''}}$

d'où l'on déduit: $\frac{tg\gamma}{tg\beta} = \frac{\overline{a''m'}}{\overline{a''t'}} = \frac{am}{at} = \frac{\overline{aS'}}{aO} = \frac{\overline{aS'}}{\rho}$,

et par suite: $\overline{aS'} = \rho\,\frac{tg.\gamma}{tg.\beta}$, ce qui est la formule (2).

Ayant le pôle, les problèmes sur les plans tangents deviennent très-simples, ainsi que les problèmes d'ombres.

1° *Plan tangent par un point d'une génératrice.* – On joint le pôle S de la génératrice et la projection c du point. Puis on mène par la trace m de la génératrice, une perpendiculaire md sur la droite ainsi menée; cette droite est la trace horizontale du plan tangent.

2° *Un plan contient une génératrice; trouver le point où il est tangent.* – Du pôle S, on abaisse une perpendiculaire sur la trace md du plan, et le point de rencontre c, avec la génératrice, donne le point de tangence, etc.

§ 68. – Hélicoïde gauche quelconque.

(a) *Définition de la surface.* – C'est la surface engendrée par une droite entraînée dans un mouvement hélicoïdal, lorsque cette droite ne rencontre pas l'axe du mouvement (voir le croquis perspectif, fig. 96).

Cela posé: Soit ab - a'b' (fig. 102) la droite lorsqu'elle est de front, et h le pas réduit du mouvement hélicoïdal; Z - Z''Z' l'axe du mouvement hélicoïdal.

Si nous menons la plus courte distance Za, de l'axe et de la droite, et si nous considérons le cylindre qui aurait Za pour rayon; la droite est et restera toujours tangente à ce cylindre, qui pourrait être pris comme noyau de la surface.

Son point de contact a a' décrira sur le cylindre une hélice a'c' de pas réduit h.

Cette hélice se projettera horizontalement suivant le cercle de base du cylindre noyau. Ce sera la ligne de contour apparent horizontal de la surface; et comme cette dernière a son cône directeur de révolution et à axe vertical, l'hélice a'c' est la ligne de striction de la surface. Soit β l'angle constant de la droite mobile avec le plan horizontal, et soit γ, celui de l'hélice de striction, lequel est également constant; h étant le pas réduit, et $r = \overline{Za}$ le rayon du cylindre noyau, on aura $tg\,\gamma = \frac{h}{r}$, et $h = r.\,tg.\,\gamma$.

Si l'on s'était donné le pas total H, on sait que l'on aurait eu $h = \frac{H}{2\pi}$.

(b) *Paramètre de distribution.* – Il sera le même pour toutes les génératrices, et fourni par la formule donnée pour les surfaces à cône directeur de révolution (§ 66).

$$K = r\,(tg\beta - tg\,\gamma) = r\,(tg.\beta - \tfrac{h}{r}) = r\,tg.\beta - h.$$

Si $tg.\beta = tg.\gamma$, alors $K = 0$ et la surface est développable. Ce serait le cas où la génératrice ab - a'b' serait tangente à l'hélice de striction. Nous avons étudié plus haut cette surface § 42. Pour qu'il en fût ainsi, il faudrait que la distance r fût telle que l'on ait:

$$tg.\beta = tg\,\gamma = \frac{h}{r},$$
$$\text{ou}\quad r = h.\,cotg.\beta.$$

On peut construire graphiquement le paramètre de distribution K (*Voir sur le croquis, fig. 102 bis l'épure des paramètres*).

(c) *Plan tangent en un point m m' de l'hélicoïde gauche.* – Soit m m' le point pris sur la génératrice que nous supposerons de front ab - a'b'. La surface est à cône directeur de révolution, et la construction à l'aide du pôle, peut s'appliquer (§ 67). Le centre de courbure est le pied Z de l'axe. Le paramètre de tangence sera: $q = r\,\frac{tg.\gamma}{tg.\beta}$.

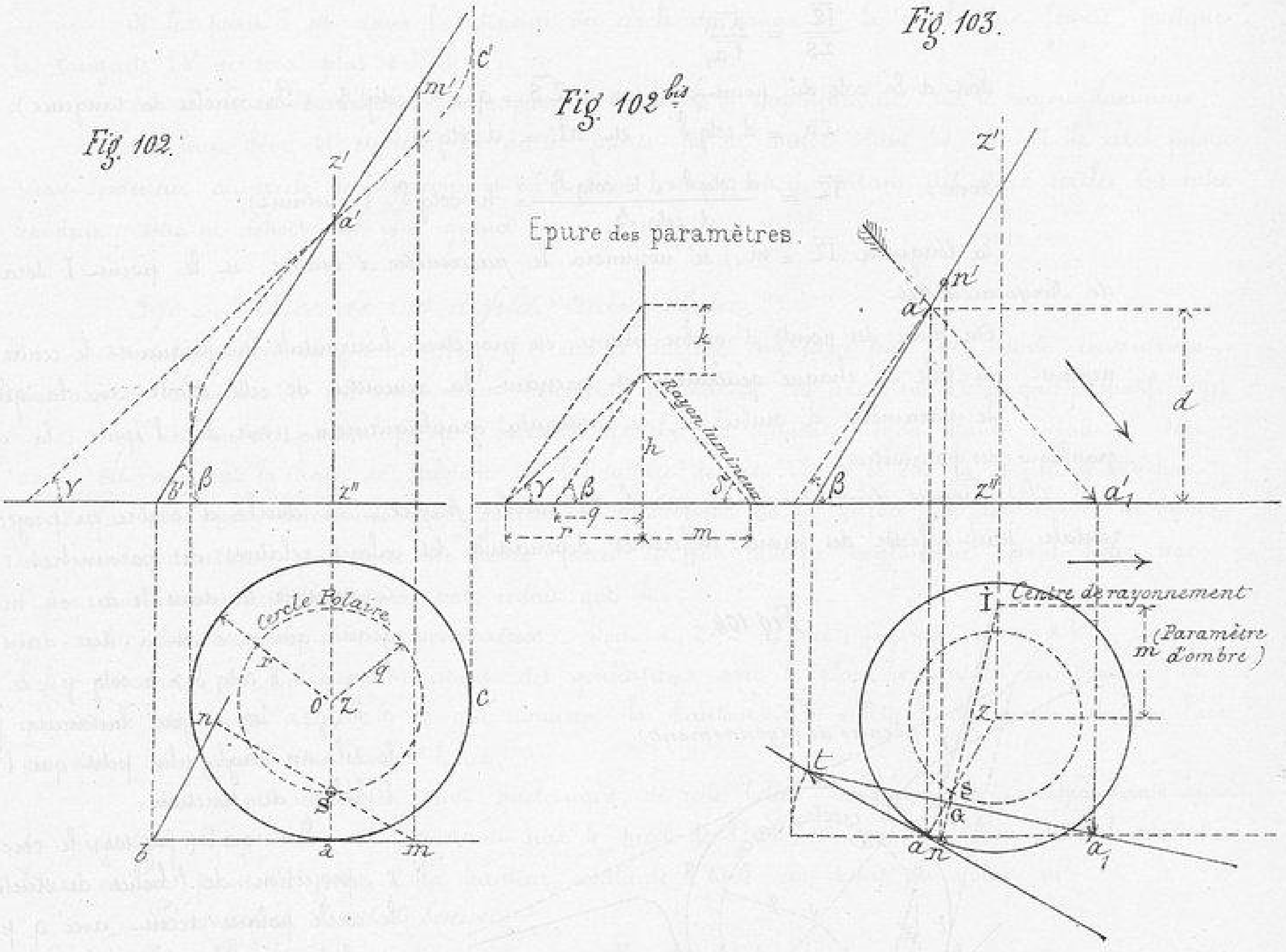
Mais $tg.\gamma = \frac{h}{r}$, donc:

$q = h.\,cotg.\beta$ facile à construire graphiquement (voir fig. 102 bis)

Le pôle S s'obtiendra donc en portant OS = q = h cotg β trouvée sur l'épure des paramètres. On remarquera que le lieu des points S est précisément le cercle de base du cylindre qui contiendrait l'hélice de striction de l'héliçoïde développable engendré par le plan a'b' projetant verticalement la droite donnée. (Voir héliçoïde développable § 42).

Cet héliçoïde développable sera la développable asymptote de la surface gauche, c'est-à-dire la surface enveloppe de ses plans tangents à l'infini.

Pour avoir la trace b de plan tangent, on joindra le point m au pôle S, et l'on abaissera de la trace b, de la génératrice, une perpendiculaire bn sur cette droite.



§ 69. – Séparatrice d'ombre de l'héliçoïde gauche. (fig. 103).

(a) Recherche d'un point de la séparatrice – Paramètre d'ombre – Centre de rayonnement. Supposons les rayons lumineux parallèles entre eux et parallèles au plan vertical, ce qui n'enlèvera rien à la généralité de la démonstration. – Soit δ leur angle avec le plan horizontal. – Soit aa' un point sur l'hélice de striction, – at, a't une génératrice quelconque faisant l'angle β avec le plan horizontal. Il est inutile d'indiquer comment, par une rotation, on a obtenu la trace horizontale t, de cette génératrice.

On mène un rayon lumineux $aa_1 - a'a'_1$ par le point aa', ce qui donne en a_1 la trace

horizontale du plan d'ombre de la génératrice.

Appliquons, en sens inverse, la construction du paragraphe précédent. Abaissons du pôle S de la génératrice, une perpendiculaire sur ta, et nous aurons en n n' le point de contact.

Cette construction facile peut encore être simplifiée.

Prolongeons en effet cette perpendiculaire nS, jusqu'en I où elle rencontre la perpendiculaire menée par le centre Z, sur la projection horizontale du rayon lumineux.

Je dis que ZI est une quantité constante.

En effet: Les triangles ZIS et taa, ont leurs côtés perpendiculaires, ils sont donc semblables et donnent:

$$\frac{\overline{IZ}}{\overline{ZS}} = \frac{\overline{aa_1}}{\overline{ta_1}}$$

Soit d la cote du point aa', on a $\overline{ZS} = q = h.\mathrm{cotg}.\beta$ (Paramètre de tangence).

$$\overline{aa_1} = d\ \mathrm{cotg}.\delta \quad \text{et} \quad \overline{at} = d\ \mathrm{cotg}\,\beta$$

donc: $$\overline{IZ} = \frac{d\ \mathrm{cotg}.\delta \times h\ \mathrm{cotg}\,\beta}{d\ \mathrm{cotg}.\beta} = h\ \mathrm{cotg}\,\delta. \ (\text{constant}).$$

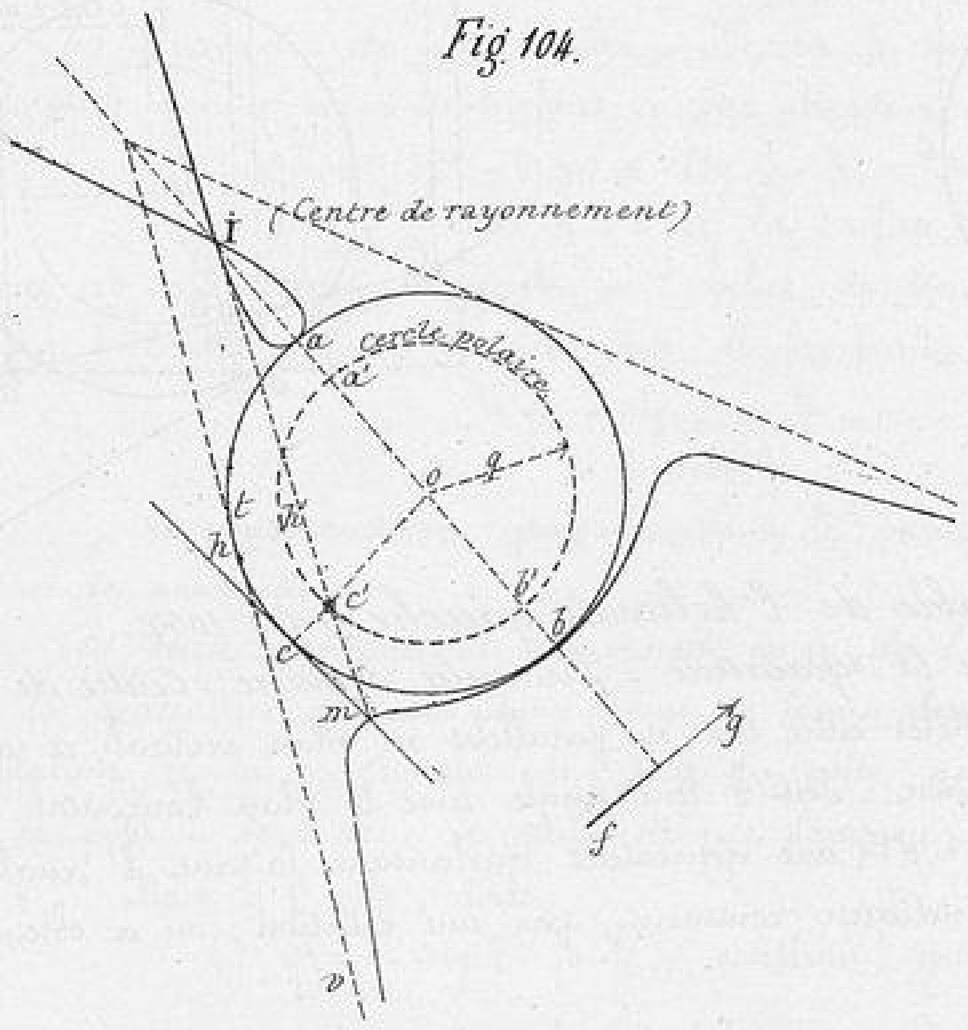
La longueur $\overline{IZ} = m$, se nommera le *paramètre d'ombre*, et le point I sera le Centre de Rayonnement.

On aura des points d'ombre propre en projection horizontale en joignant le centre de rayonnement au pôle de chaque génératrice et prenant la rencontre de cette droite avec la génératrice.

Le paramètre d'ombre m, se construira graphiquement (voir sur l'épure, la construction graphique des paramètres).

(b) *Formes diverses de la courbe d'ombre propre.* — La courbe d'ombre en projection horizontale peut affecter des formes différentes dépendant des valeurs relatives des paramètres r, q et m.

Fig. 104.



Construisons la dans le cas où m est plus grand que r, c'est-à-dire dans le cas où l'on a: $h\ \mathrm{cotg}.\delta > h\ \mathrm{cotg}.\gamma$, ce qui répond à $\delta < \gamma$. Les rayons lumineux font avec le sol un angle plus petit que l'angle de l'hélice de striction.

Soit o a b (fig 104) le cercle de rayon r, projection de l'hélice de striction, — a'c'b' le cercle polaire décrit avec q pour rayon et lieu des pôles des génératrices. Soit encore fg, la projection horizontale d'un rayon lumineux, I le centre de rayonnement pris sur une perpendiculaire à fg, à une distance du centre $OI = m = h\ \mathrm{cotg}\,\delta$.

Notre hypothèse $m > r$, entraîne que le point I tombe en dehors du cercle de striction $(m > r)$.

Appliquons la construction donnée

ci-dessus: On aura un point quelconque de l'ombre fig. 104, en prenant une génératrice quelconque c m, tangente au cercle de rayon r, joignant le pôle c' de cette génératrice au centre de rayonnement et prolongeant en m jusqu'à la génératrice.

On voit facilement que les points a et b situés sur le cercle de striction et sur la perpendiculaire OI au rayon lumineux appartiennent à la courbe, ainsi que le centre de rayonnement. Ce dernier point répond à la génératrice It menée par I tangente au cercle de rayon r.

Si l'on mène la tangente Ik' au cercle polaire, et si l'on considère la génératrice kv, parallèle à cette tangente, il y aura un point à l'infini sur cette droite. La courbe présentera la forme indiquée sur le croquis.

Si le point I est dans l'intérieur du cercle de rayon q, la courbe sera fermée, puisque la tangente Ik' ne sera plus possible.

La courbe est symétrique par rapport à la droite OI perpendiculaire sur le rayon lumineux.

On fera bien d'étudier les autres formes de la courbe dans les cas où le cercle polaire serait extérieur au cercle de striction, et où le point I serait, soit en dedans des deux cercles, soit entre les deux, soit en dehors du plus grand.

10e Leçon. § 70. – Surface de vis à filet triangulaire.

(a) Définition de la surface. – C'est la surface engendrée par une droite rencontrant un axe et entraînée d'un mouvement hélicoïdal autour de cet axe (voir le croquis perspectif, fig. 97).

C'est un cas particulier de l'hélicoïde gauche, le cylindre noyau étant réduit à son axe. – Cet axe est la ligne de striction de la surface de vis. Dans ce cas la ligne de striction ne suffit plus pour déterminer une génératrice quelconque de la surface. Il faut donner en outre une courbe directrice, qui sera une hélice tracée sur un cylindre quelconque ayant pour axe, l'axe du mouvement, et même pas réduit que lui.

(b) Construction d'une génératrice. – Soit z, z"z', l'axe; fig 105, abc-a'b'c', une hélice directrice, et β l'angle constant des génératrices avec le plan horizontal; on tracera la génératrice de front az-a'z'. Ce qui donnera la hauteur $\overline{d'z'}$ = R tg β du point situé sur l'axe au-dessus du point situé sur l'hélice.

Soit m m' un autre point, quelconque, de cette hélice. La génératrice correspondante aura sa projection horizontale m z, passant par le pied de l'axe, et sa projection verticale rencontrera l'axe en un point n' situé à la hauteur constante R tg β au-dessus du point m'.

(c) Paramètres de distribution.

Pour l'hélicoïde gauche nous avions $K = r \operatorname{tg} \beta - h$.

Pour la vis à filet triangulaire, $r = 0$, on aura donc. $K = -h$.

Ainsi donc: Dans la vis à filet triangulaire, le paramètre de distribution est égal au pas réduit; il est indépendant de l'angle β.

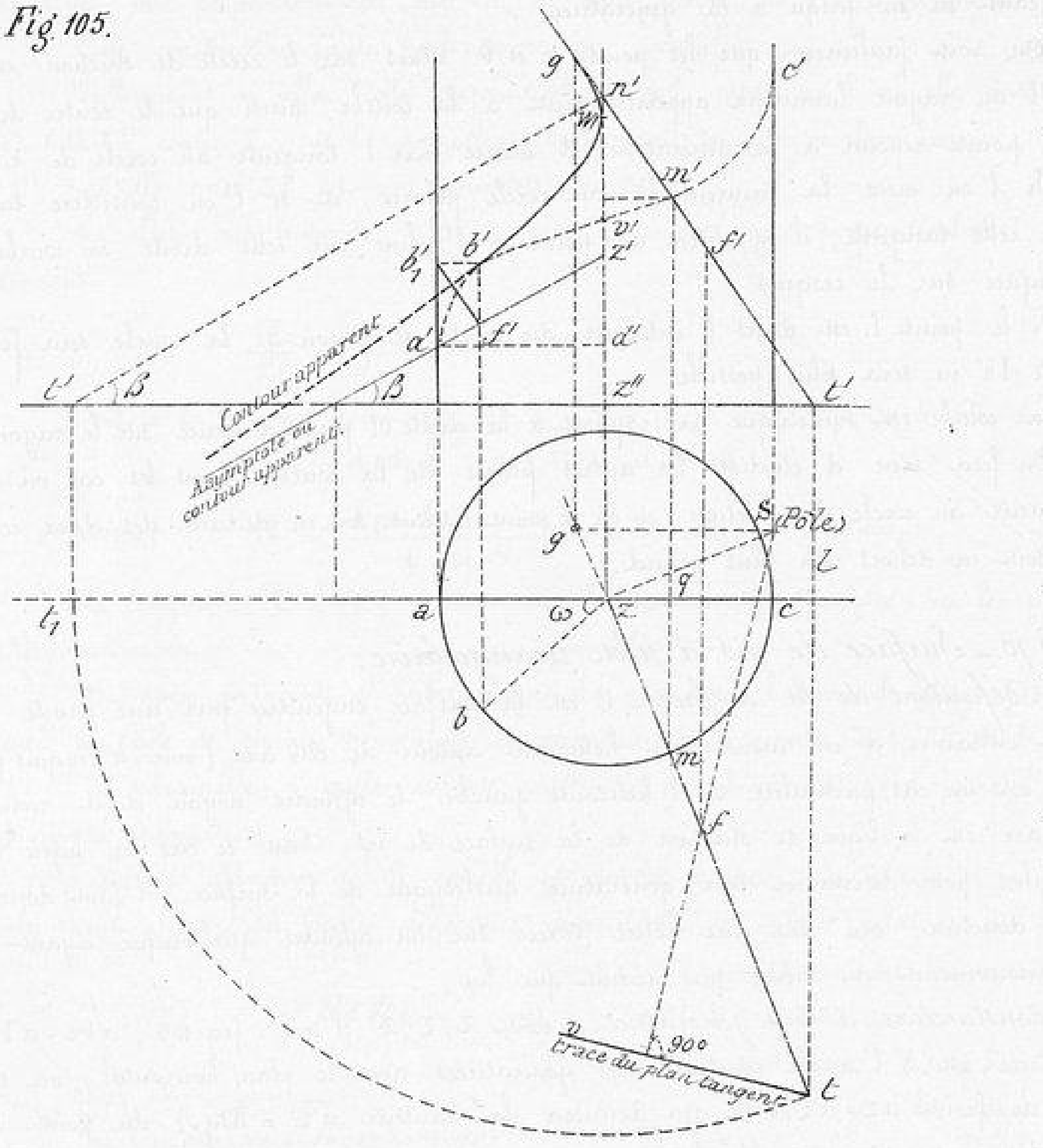
(d) Paramètre de tangence q. – D'après ce qui a été vu pour le cas particulier précédent des surfaces à cône directeur, on aura $q = K \operatorname{cotg} \beta$, et par suite:

$$q = h \cdot \operatorname{cotg} \beta .$$

Il est le même que pour l'hélicoïde gauche.

(e. Plan tangent en un point quelconque ff' d'une génératrice zm - z'm' (fig. 105). - On prendra le pôle S de cette génératrice en portant sur la perpendiculaire à sa projection horizontale, une distance zS = h. Cotg A. - On joindra par une droite fS le pôle à la projection horizontale f du point; et l'on mènera par la trace horizontale t de la génératrice, une perpendiculaire tv sur cette droite; ce qui donnera la trace horizontale du plan tangent.

Fig. 105.



(f) Un plan passe par une génératrice, reconnaître le point où il est tangent (fig. 105). - Soit tv la trace d'un plan passant par la génératrice mf - m'f'. On abaissera du pôle S de la génératrice une perpendiculaire sur la trace du plan et l'on prendra l'intersection f de cette perpendiculaire et de la génératrice.

(g) Trouver le contour apparent vertical de la surface (même figure 105). Soit à trouver le point de contour apparent vertical situé sur la génératrice mf - m'f'. Cela revient à trouver le point de tangence du plan projetant verticalement cette droite. Sa trace horizontale est tt', perpendiculaire sur xy; on abaissera Sg perpendiculaire sur tt' et l'on aura en g, projeté verticalement en g' le point cherché. En ce point la ligne de contour apparent est tangente à la génératrice g't'.

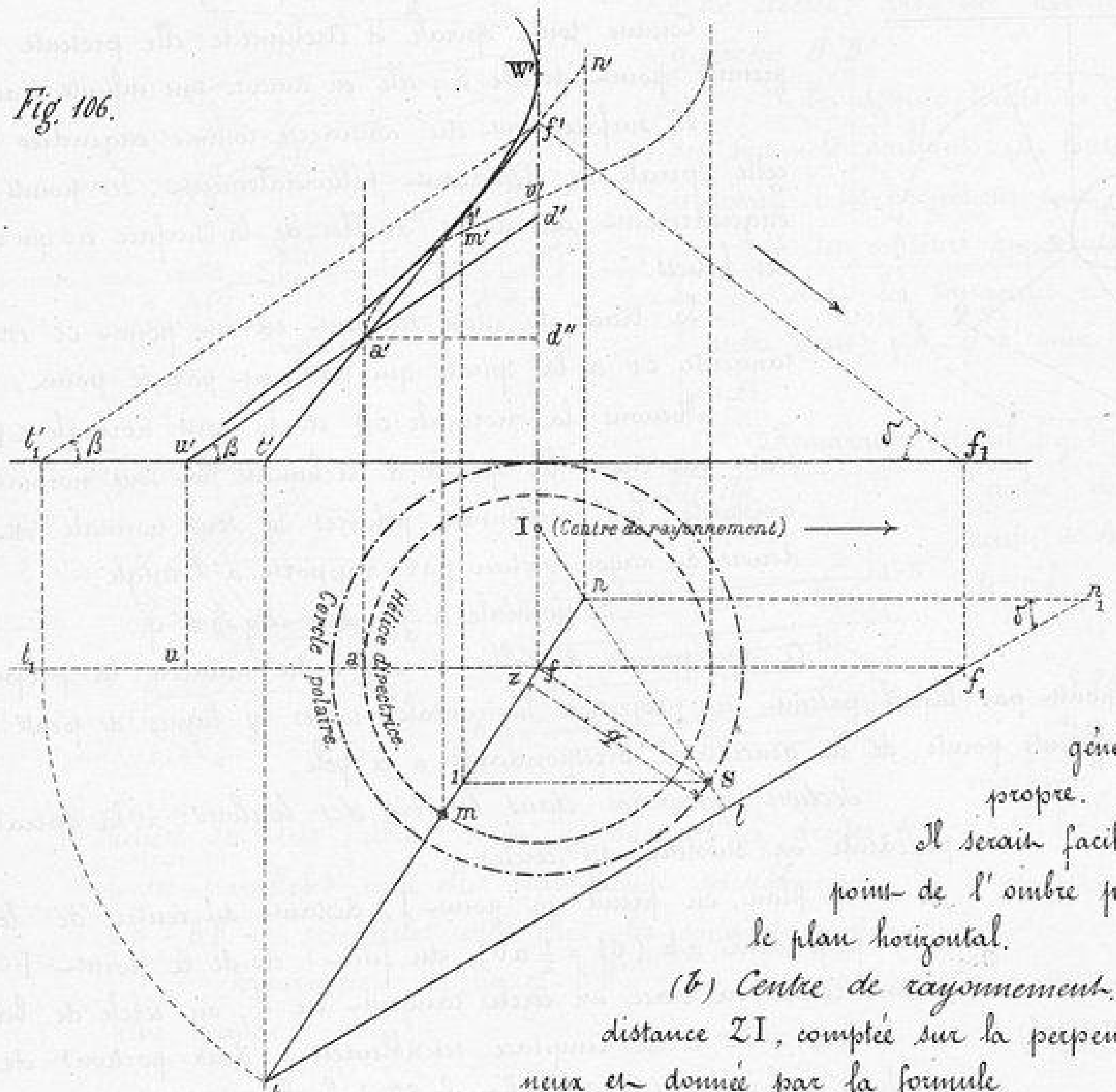
En faisant la même construction pour la génératrice de front z'a' on reconnaît facilement qu'elle donne un point à l'infini. Donc z'a' est asymptote du contour apparent vertical. En l'appliquant à la génératrice de profil cela donnera le point situé sur l'axe; et par conséquent situé en W' à une hauteur v'W' au-dessus du point v' de l'hélice, qui est projeté sur l'axe, égale à la hauteur constante a'z' déjà trouvée plus haut. Il faut avoir soin de tracer la ligne de contour apparent tangente à l'hélice directrice.

Problème à chercher : Trouver directement le point du contour apparent situé sur cette hélice.

§ 71. – Séparatrice d'ombre de la vis à filets triangulaires. (fig. 106).

(a) Recherche d'un point. – Soit $mf - m'f'$ une génératrice quelconque ; supposons le rayon lumineux parallèle au plan vertical, et incliné à l'angle δ. Le plan d'ombre de la génératrice aura pour trace horizontale tf_1, ombre portée par la génératrice sur le plan horizontal. – Pour avoir le point de tangence de ce plan, on abaissera du pôle S de la génératrice une perpendiculaire Sl, sur cette trace, et l'on obtiendra en nn', par recoupement avec la génératrice, le point d'ombre propre.

Fig. 106.



Il serait facile d'en déduire en n_1 un point de l'ombre portée par la surface sur le plan horizontal.

(b) Centre de rayonnement. – Il existe en I à une distance ZI, comptée sur la perpendiculaire au rayon lumineux et donnée par la formule

$$m = h \cdot \cot g\, \delta.$$

On se servira donc du centre de rayonnement I, comme on l'a fait pour l'hélicoïde gauche. La courbe, lieu des points n, est engendrée géométriquement de la façon suivante très simple. – Par un point fixe Z, on mène une sécante quelconque Zn, et une perpendiculaire ZQ à cette droite jusqu'à sa rencontre en S avec un cercle ZS (ici cercle polaire) ayant le point Z pour centre et q pour rayon. On joint le point d'intersection S avec un autre point fixe I, et le point n est à l'intersection de cette droite et de la première sécante.

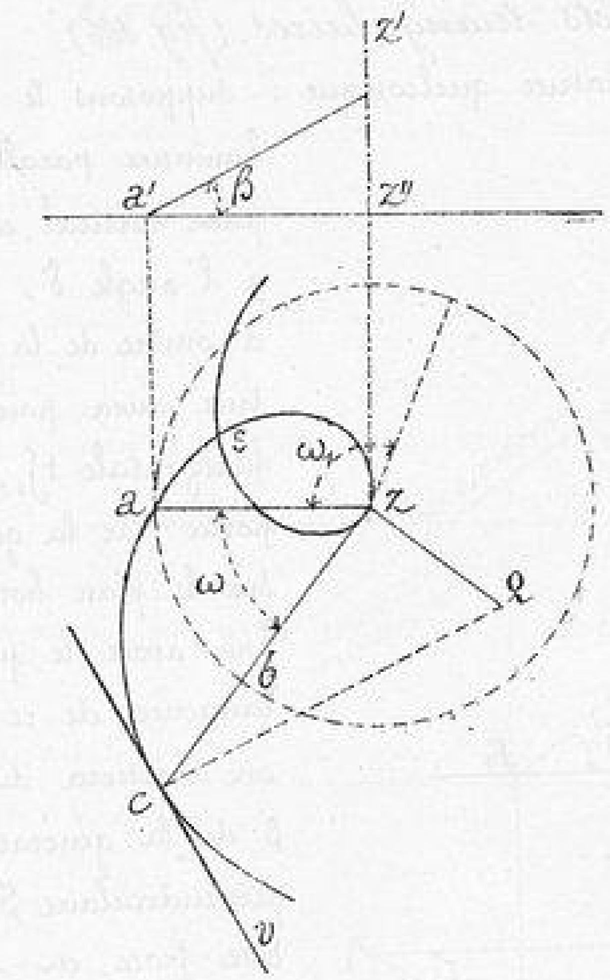
Nota. – On fera bien comme pour l'hélicoïde gauche quelconque, de s'exercer à tracer les diverses séparatrices qui répondent aux diverses valeurs relatives de q et de m.

§ 72. – Section horizontale de la surface (fig. 107).

Cherchons la section horizontale passant par le point aa', que nous supposons pris sur la génératrice de front Za - Z'a'.

Soit bz, $b'z'$ une génératrice quelconque, ω l'angle qu'elle fait en projection horizontale

Fig. 107.



avec la génératrice aZ, $a'z'$ et cc' sa trace. — On aura, en désignant zc' par la lettre ρ :

$$\rho = r + \omega h.\ \mathrm{cotg}\,\beta.$$

équation en coordonnées polaires d'une spirale d'Archimède. ρ s'annule pour $\omega = -\frac{r\ \mathrm{tg}\,\beta}{h} = \omega_1$.

Comme toute spirale d'Archimède elle présente un premier point double S ; elle en aurait une infinité d'autres.

La surface peut être considérée comme engendrée par cette spirale se déplaçant hélicoïdalement. Les points doubles engendreront des lignes doubles de la surface et qui seront des hélices.

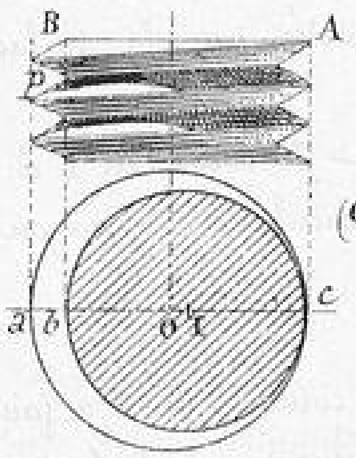
La trace du plan tangent en un point cc' est la tangente cv à la spirale qui passerait par ce point.

Menons la normale cQ et la sous-normale zQ, on sait que dans la spirale d'Archimède la sous-normale est constante. En coordonnées polaires la sous-normale est la dérivée du rayon vecteur par rapport à l'angle.

$$S^{s}\ \text{normale} = \frac{d\rho}{d\omega} = h\ \mathrm{cotg}\,\beta = q.$$

Ce qui permet d'établir d'une autre manière la propriété du pôle Q, d'être le point par lequel passent, en projection horizontale, toutes les lignes de pente des plans tangents aux différents points de la génératrice correspondante à ce pôle.

Fig. 108.



Section approchée dans les vis des boulons : à la spirale précédente on substitue des cercles.

En plan, on prend un point I, distant du centre de la demi-profondeur ab ($OI = \frac{1}{2}ab$) du filet : et de ce point I comme centre, on trace un cercle tangent en c, au cercle de base du boulon. — Ce cercle remplace sensiblement, deux portions de spirale d'Archimède. (C'est la boucle SZ de la figure 107.)

§73. — Représentation d'une vis à filets triangulaires.

Les vis en bois ou en fer que l'on rencontre dans la pratique sont ordinairement engendrées de la manière suivante : (fig. 108 bis).

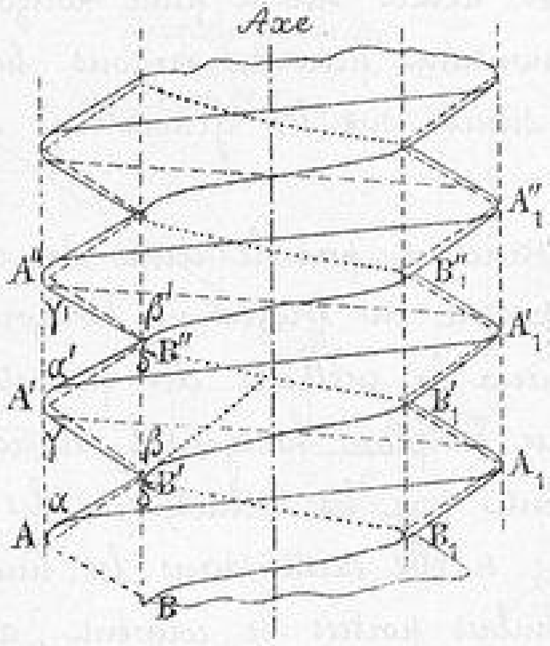
Un triangle ABB' ordinairement isocèle, se déplace hélicoïdalement de telle sorte que son plan passe toujours par l'axe du mouvement hélicoïdal.

La vis est à filet simple lorsque le pas est égal à la base BB' du triangle. Chacun des côtés AB ou AB', engendre une portion de surface de vis à filet triangulaire. Les points A et B engendrent des hélices de même pas, mais de rayons différents qu'il est facile de tracer.

Le contour apparent vertical n'est pas formé par le côté AB du triangle générateur lorsqu'il est de front. Ce contour est une ligne courbe à branches infinies que nous avons étudiée au §70-g, mais voisine de son asymptote dans sa portion utile, et que l'on peut considérer comme droite,

sans erreur sensible. On fera le dessin de la manière suivante :

Fig. 108 bis.



1° On dessine d'abord en $BAB'-B'A'B''$, sur la gauche, le triangle générateur de la vis.

Sur la droite on dessine, mais tourné de l'autre côté, le même triangle, en ayant soin que chaque sommet saillant A, de droite, soit au niveau d'un sommet rentrant de gauche BB'.

2° On dessine toutes les grandes hélices $AA_1 - A'A'_1$ .... des sommets saillants, et toutes celles $BB_1 - B'B'_1$ ..... des sommets rentrants (les projections sont des sinusoïdes).

3° Les contours apparents s'obtiennent par approximation, en menant les tangentes communes, $\alpha\beta - \alpha'\beta'$ et (dans l'autre sens) $\gamma\delta - \gamma'\delta'$ aux sinusoïdes, projections de ces hélices.

Fig. 109.

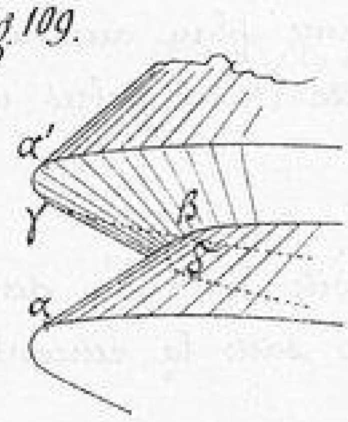
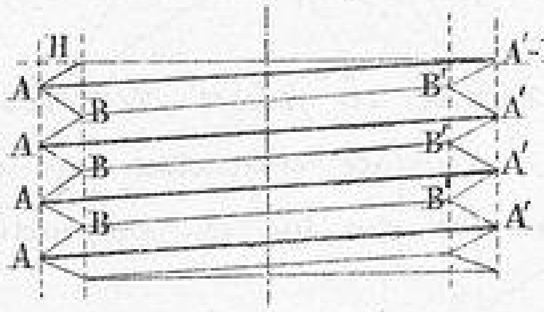


Fig. 110.



Remarquer (détail fig. 109) le chevauchement, l'une sur l'autre, des deux lignes de contour apparent : $\alpha\beta$ passe (à gauche) en avant de $\gamma\delta$.

§ 74.- Tracé plus sommaire (fig. 110).

Usité surtout dans le dessin de machines, pour des vis dont la pente des hélices est très faible. 1° On joint par des droites $AA' - AA'$ les sommets saillants : Ces droites, toutes parallèles entre elles remplacent sensiblement les sinusoïdes. - 2° On joint par d'autres droites $BB' - BB'$ ..... parallèles entre elles, les sommets rentrants.

Remarque : Les lignes BB' .... ne sont pas parallèles aux lignes AA' ..... elles ont une pente plus grande.

§ 75.- Sujet d'une épure.- Vis à filets triangulaires surmontée d'un écrou prismatique.

On cherchera les ombres propres des différents filets de vis, l'ombre portée par la tête prismatique sur les filets et les ombres portées par les filets les uns sur les autres.

(a) Ombres propres.- On prendra le plan horizontal comme plan auxiliaire d'ombres portées.- On choisira sur les grandes et sur les petites hélices des points équidistants répondant chacun à une même position du triangle générateur ; on les numérotera soigneusement et on en cherchera les ombres portées sur le plan horizontal. En joignant les ombres de points appartenant à une même hélice, on aura l'ombre portée de cette hélice.- On démontre facilement que la courbe ainsi obtenue est une cycloïde.

En joignant par des droites les ombres portées par tous les points qui se répondent, mais situés les uns sur la grande et les autres sur la petite hélice, on aura les ombres portées par les génératrices de la surface.- Prenant l'enveloppe de ces droites, on aura l'ombre portée par

la vis sur le plan horizontal. Il pourra se faire que la courbe enveloppe ainsi obtenue soit tangente aux droites en dehors des portions utiles de ces dernières. Dans ce cas l'ombre portée sera limitée aux cycloïdes, ombres portées par les grandes hélices sur le plan horizontal; sinon l'ombre portée horizontalement sera plus complexe, et en remontant par des rayons lumineux inverses, des points de contact de l'enveloppe, aux points situés sur les génératrices dans l'espace, on en déduira l'ombre propre de la vis.

Comme vérification on appliquera la construction par le centre de rayonnement, qui permet de trouver facilement la courbe d'ombre propre en projection horizontale.

(b) Ombres portées sur la vis. – On appliquera la méthode des projections obliques. On cherchera l'ombre portée par la tête prismatique sur le plan horizontal, et comme on aura trouvé précédemment les ombres portées horizontalement par les hélices, par les génératrices, et même par la ligne d'ombre propre de la surface, si elle existe dans les limites du filet, il sera facile de remonter des points où toutes ces ombres portées se coupent, aux points d'ombres portées dans l'espace.

Nota. – On pourrait exécuter cette épure en prenant comme plan auxiliaire de projections obliques, un plan fuyant à 45°, passant par l'axe de la surface (voir ombres usuelles).

§ 76. – Hélicoïde gauche à plan directeur.

(a) Définition. – C'est la surface engendrée par une droite entraînée dans un mouvement hélicoïdal, autour d'un axe qui lui est perpendiculaire sans la rencontrer. (Voir le croquis perspectif, fig. 98).

On voit que c'est une variété de l'hélicoïde gauche dans le cas où les génératrices sont perpendiculaires à l'axe ($\beta = 0$).

Les génératrices sont tangentes à un cylindre noyau. Leur point de tangence décrit sur le cylindre une hélice qui est à la fois la ligne de striction et le contour apparent horizontal de la surface.

(b) Paramètres. – Le paramètre de distribution dans l'hélicoïde gauche a pour expression:

$$K = r \cdot \operatorname{tg} \beta - h$$

En faisant $\beta = 0$, cela donne : $K = -h$.

Le paramètre de tangence avait pour expression : $q = r \dfrac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta}$.

En faisant $\beta = 0$, cela donne : $q = \infty$.

(c) Représentation d'une génératrice (fig. 111). – On voit en $a_2 B_2$ le développement d'une demi-spire de l'hélice de striction. – En portant sur la base $a_2 b_2$ une longueur égale à r, on obtient en L_2 un point dont la hauteur est égale au pas réduit h [1].

On prend en cc' (développé en C_2) un point quelconque de l'hélice de striction et la génératrice qui répond à ce point cc' est l'horizontale $c'm' - cm$.

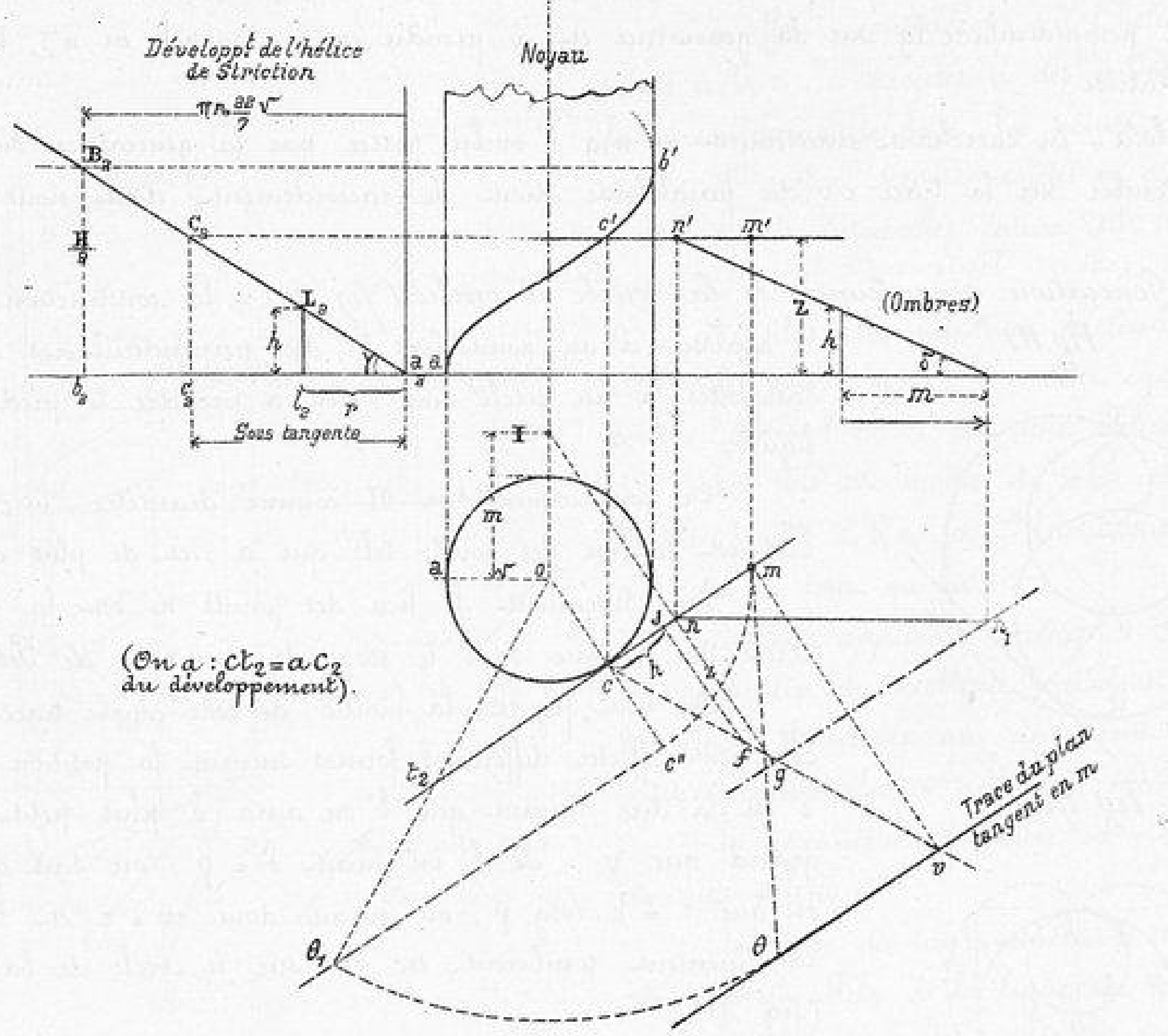
Nota. – cm, est tangente au cercle de base du cylindre noyau.

---

[1] Graphiquement, on remarquera que le nombre $\pi = 3.1415$ est égal, à moins de un demi-millième, au nombre $\frac{22}{7}$. Par conséquent, on obtient très sensiblement le pas réduit h, en prenant les $\frac{1}{22}$ du demi-pas $\frac{H}{2}$.

(d) Plan tangent en un point mm' quelconque de la génératrice. On ne peut plus appliquer la construction qui utilise le pôle. Nous allons donner deux méthodes :

Fig. 111.



1re Méthode. – En utilisant l'hélice qui passerait par le point mm'. Sa tangente serait la ligne $m\theta$, tangente au cercle qui passe, en plan, par m. – La sous-tangente $m\theta$, a une longueur qui est à la sous-tangente ct (égale à a_2c_2 du développement) comme le rayon Om, du point m, est au rayon r de l'hélice de striction. On peut donc construire la sous-tangente $m\theta$, et la trace du plan tangent est $v\theta$, menée par θ, parallèlement à cm.

Nota. – On voit en $c''\theta_1$ la construction qui donne la longueur de $m\theta$.

2^e Méthode. – En utilisant un paraboloïde droit de raccordement. – Considérons le paraboloïde droit de raccordement. Sa trace horizontale passera par le point c projection du point central. Nous avons vu que si l'on prend un point J situé à une distance cJ du point central égale au paramètre de distribution ($K = h$) alors en vertu de la formule de Chasles $tg.\alpha = \frac{x}{K}$, si $x = K$, α sera égal à 45° et le pied de la génératrice tombera en f à une distance fJ égale à la cote de hauteur Z de la génératrice.

Donc cf est la trace du paraboloïde droit de raccordement, et si l'on mène mv, perpendiculaire sur cm, la trace du plan tangent doit passer par le point v, où cette ligne rencontre la droite cf.

Nota. Cette construction revient à dire que : Dans un conoïde droit, c'est-à-dire dont la directrice est verticale, les traces horizontales des lignes de plus grande pente des plans tangents sont en ligne droite.

§ 77. – Ombre de la surface.

(a) Point quelconque. – On peut employer la construction qui utilise le paramètre d'ombre $m = h\,cotg\,\delta$. Supposons les rayons lumineux de front. On prend en $OI = m$, le paramètre d'ombre, et

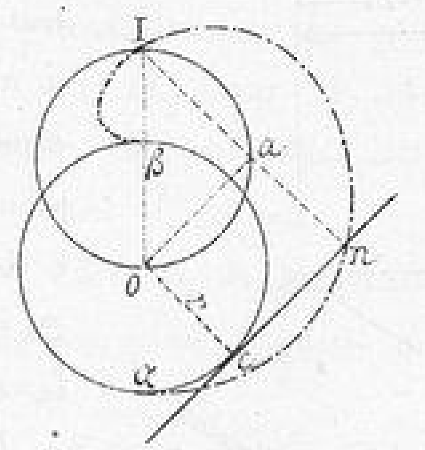
I est le centre de rayonnement.

Pour avoir un point n de la séparatrice on joint I au pôle de la génératrice, lequel est situé à l'infini sur une perpendiculaire à cette droite ; cela revient donc à abaisser du centre de rayonnement une perpendiculaire Ig sur la génératrice et à prendre en n, (rappelé en n'), l'intersection avec cette génératrice.

Nota. - En cherchant directement en n, g l'ombre portée par la génératrice sur le sol, le point g devra tomber sur la trace $c\,v$ du paraboloïde droit de raccordement dont nous avons parlé plus haut.

(b) *Génération géométrique de la courbe d'ombre* (fig. 112). - La construction revient donc à abaisser d'un point fixe I, des perpendiculaires sur les diverses tangentes à un cercle fixe O, et à prendre le pied n de ces lignes.

Fig. 112.

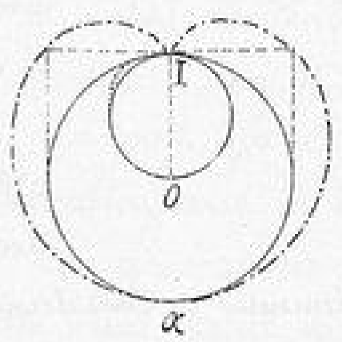


Or construisons sur OI comme diamètre, une circonférence. Elle est le lieu des points tels que a ; et de plus on a : $\overline{na} = 0c = r$.

Par conséquent le lieu des points n est la conchoïde du cercle OI, connue sous le nom de *Limaçon de Pascal*.

On voit, fig. 112, la moitié de cette courbe tracée en $\beta I n \alpha$. Elle peut affecter différentes formes suivant la position du point I, c'est-à-dire suivant que l'on aura δ plus petit ou plus grand que γ. Si l'on avait $\delta = \gamma$; on sait que $m = h \cot g.\, \delta$ et que $r = h.\cot g.\, \gamma$, on aurait donc $m = r$ et le centre de rayonnement tomberait en β, sur le cercle de base du noyau (fig. 113).

Fig. 113.



§ 78. - Surface de vis à filet carré.

(a) *Définition.* - C'est la surface engendrée par une droite rencontrant un axe et entraînée dans un mouvement hélicoïdal autour de cet axe. (Voir le croquis perspectif, fig. 99).

C'est un cas particulier de l'hélicoïde à plan directeur. Le cylindre noyau est réduit à son axe. - On peut la déduire encore de la surface de vis à filet triangulaire en supposant nul l'angle β des génératrices et du plan horizontal.

(b) *Paramètres.* - Le paramètre de distribution sera encore : $K = h$.

Le paramètre de tangence $q = h \cot g.\, \beta$ devient infini.

Le paramètre d'ombre $m = h \cot g\, \delta$ reste le même que pour les autres surfaces hélicoïdes.

(c) *Plan tangent.* - Le plan tangent se construira en appliquant la même méthode que pour la surface précédente.

§ 79. - Séparatrice d'ombre de la surface. (fig. 114).

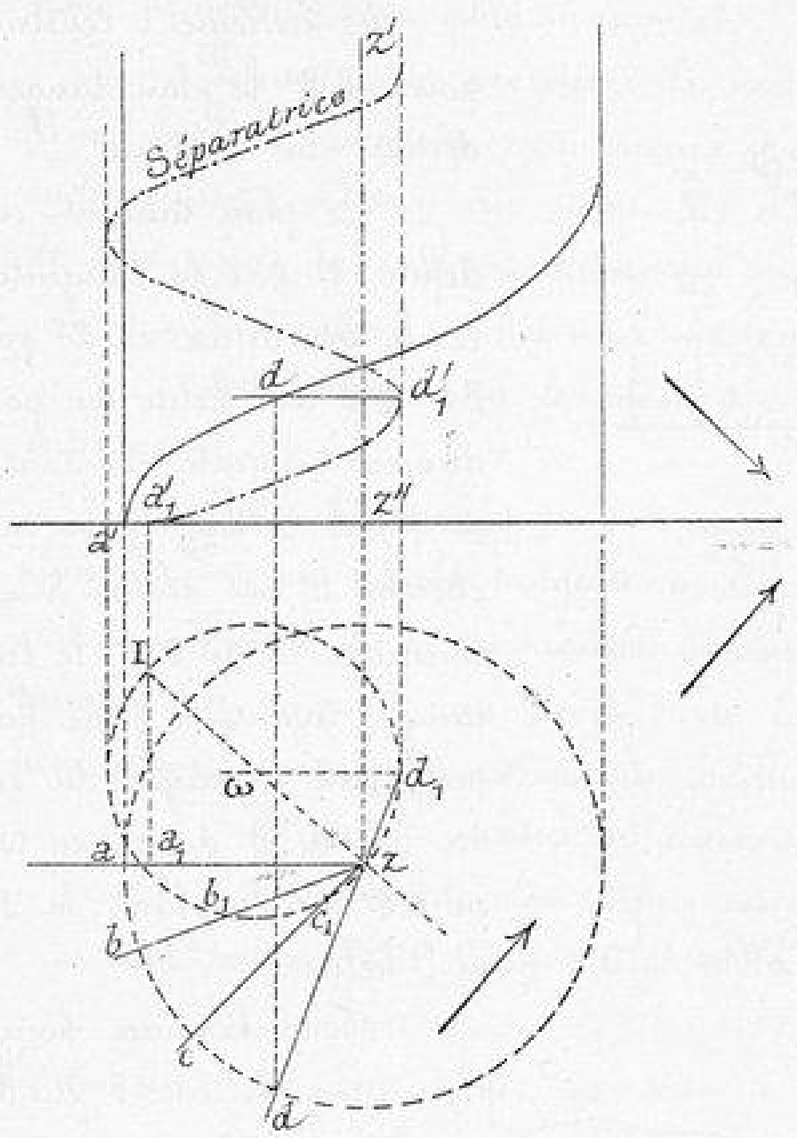
Déduisons sa construction de celle donnée par l'hélicoïde à plan directeur ; le cercle projection de l'hélice de striction se réduit à un point qui est le pied de l'axe. La courbe, en projection horizontale est donc le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre de rayon-

nement I, sur les droites passant par le point Z.

C'est le cercle décrit sur ZI comme diamètre.

La courbe, dans l'espace, est l'intersection du cylindre qui aurait ce cercle pour base, et de la surface de vis. Je dis que c'est une hélice.

Fig. 114.



En effet; considérons sur l'hélice directrice, des points a, b, c..... projetés à des intervalles égaux sur la circonférence de base. Les points correspondants de la courbe d'ombre seront projetés en $a_1 b_1 c_1$........ qui sont aussi à des intervalles égaux sur la seconde circonférence.

De plus, les hauteurs successives dont se sont élevés les points $a_1 b_1 c_1$ ..... sont égales et par suite la courbe dans l'espace est une hélice.

Son pas est moitié de celui de l'hélice directrice, car les points $a_1 b_1 c_1$ font deux tours quand les points a b c n'en font qu'un.

Contour apparent vertical. – On l'obtiendrait comme cas particulier du problème précédent; on supposera que les rayons lumineux qui deviennent ici des rayons visuels sont perpendiculaires au plan vertical.

Le paramètre d'ombre $m = h.\cot g\ \delta$, puisque $\delta = 0$, devient infini.

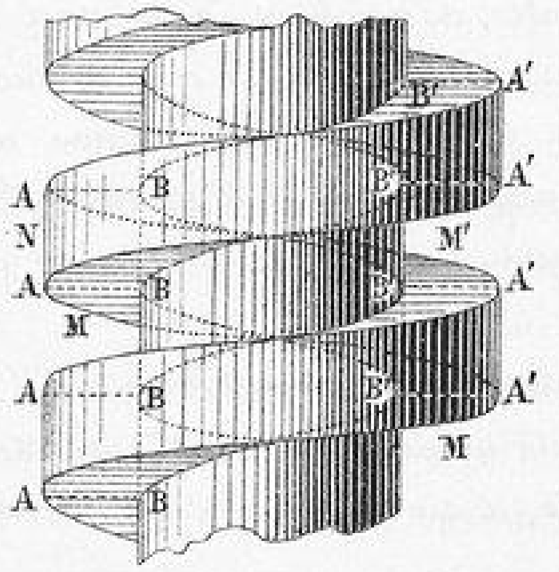
Le centre de rayonnement I est rejeté à l'infini sur une parallèle à la ligne de terre, et les pieds des perpendiculaires abaissées sur les projections des génératrices, sont à l'infini sur ces droites.

Le contour apparent vertical est donc tout entier à l'infini, c'est-à-dire qu'il n'existe pas.

Ce résultat se prévoyait facilement, puisque les plans projetant verticalement les génératrices sont parallèles au plan horizontal, qui est le plan directeur, sont tangents à l'infini.

§ 80. – Représentation d'une vis à filets carrés.

Fig. 115.



Un carré a b c d qui se déplace hélicoïdalement de telle sorte que son plan passe toujours par l'axe du mouvement hélicoïdal, engendre une vis à filets carrés. – La vis est à filet simple lorsque le pas est égal à la hauteur, a b, du carré.

1° On trace les carrés saillants N de gauche, au niveau des carrés rentrants M' de droite (fig. 115).

2° On dessine ensuite toutes les sinusoïdes des sommets saillants AA'-AA' et celles des sommets rentrants BB'-BB'...etc.

Remarque. – Les croisements apparents de toutes ces hélices sont sur l'axe.

§ 80 bis. – Vis Saint-Gilles.

(a) Définition. – On nomme ainsi la surface engendrée par le mouvement hélicoïdal d'un cercle II' dont le plan est vertical et passe toujours par l'axe Z (supposé vertical) du mouvement. On emploie cette surface comme intrados des voûtes des escaliers en tour ronde.

Fig. 115 bis.

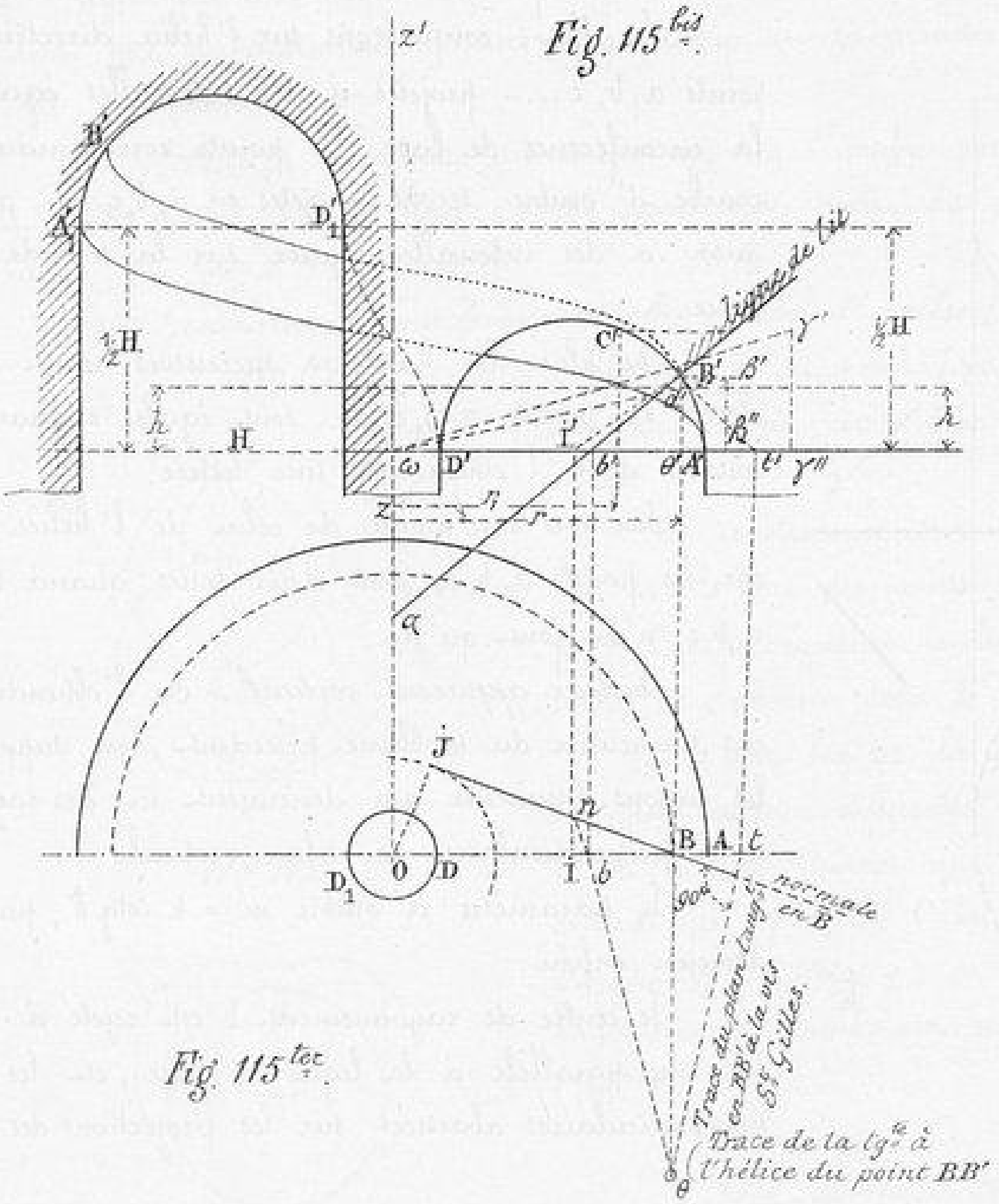


Fig. 115 ter.

(b) Problème. – Construire en un point BB' le plan tangent et en déduire la normale.

Le plan tangent en BB' sera défini : 1° par la tangente B't' - Bt au cercle générateur et 2° par la tangente Bθ - B'θ' à l'hélice du point B. Cette dernière tangente est dans un plan de profil. – Pour avoir sa trace θ, on cherche le pas réduit $h = \frac{H}{2\pi}$. – On construit en ω θ'd' le triangle rectangle ayant h pour hauteur et pour base r, rayon du cercle B. La cote de B' donne en ω β' (reportée en Bθ sur le plan) la sous-tangente à l'hélice.

Donc la trace horizontale du plan tangent est tθ, et B't' en est une ligne de front. – Donc la normale est Bn, perpendiculaire sur tθ et B'I' perpendiculaire sur B't'.

(c) Surface de lit. – Cette normale en tournant hélicoïdalement engendrerait la vraie surface de lit des voussoirs. C'est un hélicoïde gauche quelconque dont le noyau cylindrique aurait pour base le cercle OJ tangent à Bn prolongée (fig 115 ter).

(d) Autre surface de lit, plus simple. – On lui substitue la surface engendrée par la droite B'b' suivant laquelle le plan tangent en BB' à cet hélicoïde couperait le plan de front OA. Pour obtenir cette droite on cherche en n la trace horizontale de la normale, et joignant à la trace horizontale θ de l'hélice, on a en nθ, la trace du plan tangent à l'hélicoïde gauche. – D'où l'on déduit B'b'α, droite demandée, intersection avec le plan de front OA. En tournant hélicoïdalement, cette ligne engendre alors une vis à filet triangulaire, que l'on prend pour surface de lit plus simple. – Cette substitution peut se faire, car la vis à filet triangulaire a le même plan tangent en BB' que l'hélicoïde primitif (Voir la suite de cette question en stéréotomie).

Remarque. – Lorsque dans la vis St Gilles on appareille par des lignes telles que B'I' convergeant au centre du cercle, on commet une erreur et les angles dièdres suivant lesquels se rencontrent les surfaces de lit et la surface d'intrados ne sont pas des dièdres droits, ce qui est mauvais comme construction ; cela donne des angles trop fragiles.

Courbure des surfaces.

11ᵉ Leçon.

§ 81. _ Courbe Indicatrice.

Soit S une surface ; O un point de cette surface, et xy, le plan tangent en ce point, que nous prendrons pour plan horizontal.

Prenons pour axe des Z la normale au point O ; soit M un point voisin du point O et Mm, le Z de ce point. On pourra toujours développer la quantité Z en fonction des coordonnées indépendantes x et y du point M, et ordonner ce développement suivant les puissances croissantes de x et y, de la manière suivante :

(1) $Z = A + Bx + B'y + Cx^2 + C'xy + C''y^2 + Dx^3 + D'x^2y + D''y^2x + D'''y^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

Remarquons que le point O étant sur la surface, pour $Z = 0$, on a : $x = 0$ et $y = 0$, ce qui entraîne $A = 0$.

Mais le plan xy est tangent en O, et par suite, la section faite dans la surface par le plan Zx est une courbe tangente à l'axe des x.

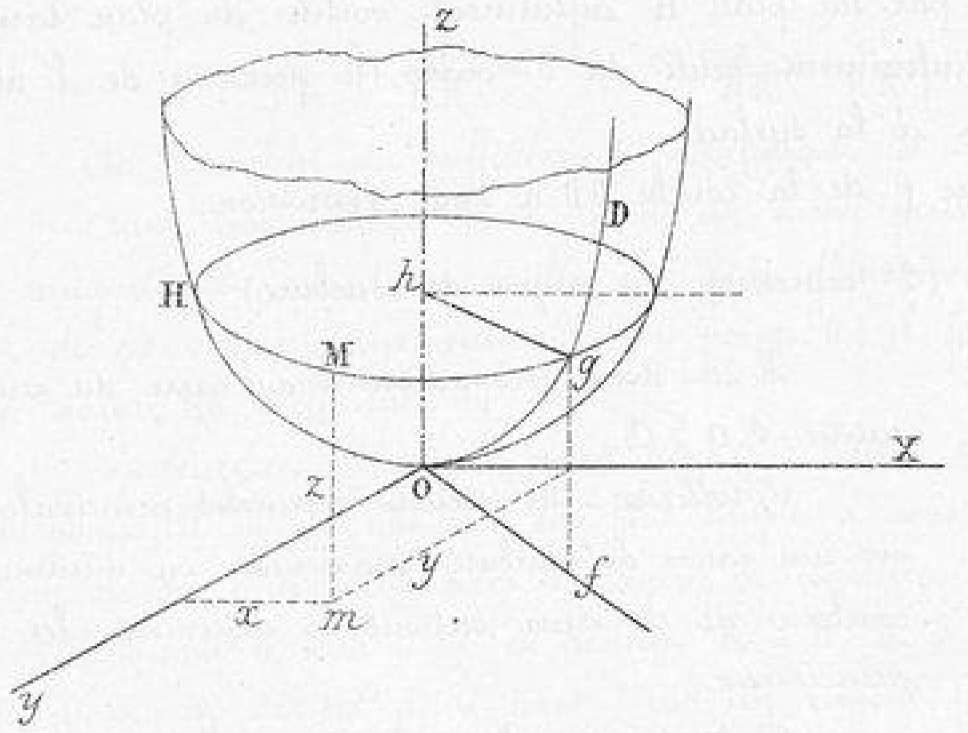
Faisons $y = 0$, et prenons la limite du rapport $\frac{Z}{x}$ qui sera le coefficient angulaire de la tangente à l'origine au point O de la section faite par le plan Zx ; nous devrons avoir : $\lim \frac{Z}{x} = 0$, pour $x = 0$, $y = 0$ et $Z = 0$, ce qui conduit à $B = 0$.

On aura de même en écrivant que l'axe des y est tangent à la surface : $C = 0$.

L'équation de la surface est donc :

(2) $Z = Cx^2 + C'xy + C''y^2 + Dx^3 + D'x^2y + D''y^2x + D'''y^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

Fig. 116.



Pour une valeur particulière de Z, cette équation sera celle de la section faite dans la surface par un plan parallèle au plan tangent et passant à une distance Z de ce plan.

Si nous supposons que x et y soient des infiniment petits du 1ᵉʳ ordre, la section précédente devient la section faite par un plan infiniment voisin du plan tangent ; et prend le nom d'Indicatrice infinitésimale de la surface, au point O.

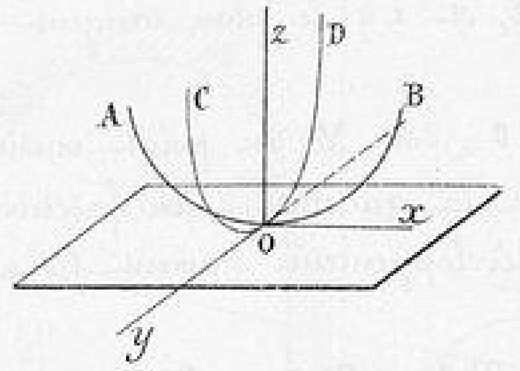
Z est infiniment petit du 2ᵉ ordre ; les quantités $x^2y - xy^2 \ldots$ sont du 3ᵉ ordre, et par conséquent, si nous les négligeons en présence des infiniment petits du 2ᵉ ordre qui entrent dans l'équation, cette dernière devient : $Z = Cx^2 + C'xy + C''y^2$.

C'est l'équation d'une conique de dimensions infiniment petites rapportée à son centre.

Au lieu de la quantité infiniment petite, Z, prenons une quantité finie, K ; l'équation deviendra $Cx^2 + C'xy + C''y^2 = K$, qui représentera une courbe semblable à l'indicatrice infinitésimale, et que nous nommerons _indicatrice finie_ de la surface au point O.

Il en existe une infinité, toutes semblables entre elles. – Nous verrons plus loin celle qu'il est le plus commode de choisir.

Fig. 117.



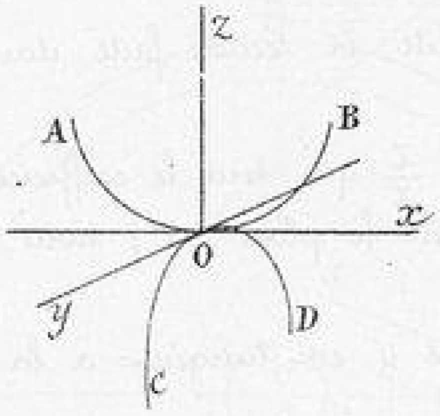
Rapportons la courbe précédente à ses axes ; son équation sera de la forme : $Ax^2 \pm By^2 = K$.

Celle de l'indicatrice infinitésimale eût été : $Ax^2 \pm By^2 = Z$.

Le signe + du coefficient B répond au cas où les deux sections AB et CD faites par les plans xz et yz qui passent par les axes de l'indicatrice, sont toutes deux d'un même côté du plan tangent. Dans ce cas, l'indicatrice est une ellipse.

Le signe – répond au cas où la section faite par le plan xz étant du côté des z positifs, la section faite par le plan zy serait du côté des z négatifs. – On dit, dans ce cas, que la surface est à courbures opposées. – L'indicatrice est une hyperbole. – Les deux sections normales, zx et zy qui passent par les axes de l'indicatrice se nomment les sections principales.

Fig. 117 bis.



§ 82. – Théorème. – *Les rayons de courbures des sections normales faites en un point d'une surface sont proportionnels aux carrés des rayons de l'indicatrice.*

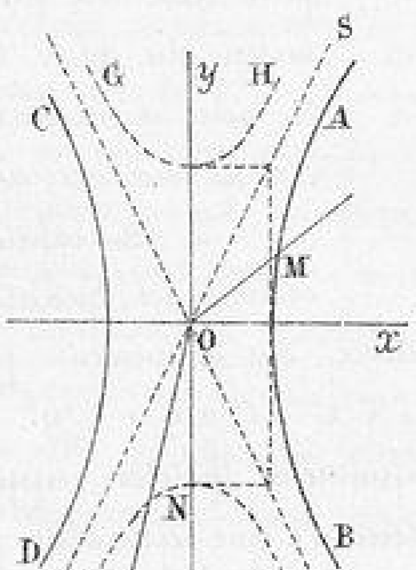
Soit ZOD, fig. 116, une section normale, et gh, la ligne suivant laquelle le plan de cette section coupe le plan de l'indicatrice. Nous avons dit que l'indicatrice était la section faite par un plan H infiniment voisin du plan tangent.

En négligeant les infiniment petits du 3e ordre, le point g de l'indicatrice peut être considéré comme appartenant à la surface.

Le rayon de courbure ρ de la courbe OD a pour expression :

$$\rho = \frac{\overline{hg}^2}{2gf} = \frac{\overline{hg}^2}{2z} \quad \text{(2e expression du rayon de courbure).}$$

Fig. 117 ter.



Il est donc proportionnel au carré du rayon $\overline{hg}$ de l'indicatrice. C. Q. F. D.

Corollaire. – Les sections normales principales sont celles qui ont un rayon de courbure maximum ou minimum. – Les rayons de courbure de ces deux sections se nomment les rayons de courbure principaux.

Discussion. – Dans le cas où l'indicatrice est une hyperbole, son équation infinitésimale est de la forme :

$$(1) \quad Ax^2 - By^2 = Z.$$

Soit AB, CD, fig. 117ter, la courbe qu'elle représente. Un plan normal qui aurait OM pour trace rencontre la courbe en M, ce qui veut dire que la section qu'il donnerait dans la surface serait située par rapport au plan tangent du côté des Z positifs.

Son rayon de courbure serait proportionnel au carré de OM.

Un plan ayant pour trace ON, ne rencontre pas l'indicatrice, et par suite ne coupe pas la surface du côté des Z positifs. Mais si nous changeons dans l'équation (1) Z en −Z, ce qui revient à étudier la surface de l'autre côté de son plan tangent, l'équation devient :

(2) $Ax^2 - By^2 = -Z$, qui représente l'hyperbole EFGH conjuguée de la précédente et coupée par toutes les traces telles que ON qui ne rencontraient pas la précédente hyperbole. Nous pouvons donc dire que l'indicatrice pour une surface à courbures opposées est représentée par les deux hyperboles conjuguées AB et GH, ayant les mêmes asymptotes OT et OS.

§83. – *Indicatrices finies.*

L'indicatrice infinitésimale sera remplacée, en dessin, par une indicatrice finie qui lui sera semblable, et dont l'équation rapportée à ses axes, sera :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (si c'est une ellipse),

et $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ (si c'est une hyperbole).

Le signe + du second membre répond à la section faite par un plan infiniment voisin, situé d'un côté du plan tangent et le signe − à une section faite de l'autre côté.

Soient R et R' les rayons de courbure principaux. Ces rayons sont proportionnels aux carrés des demi-axes de l'indicatrice infinitésimale et aussi à ceux de l'indicatrice finie qui lui est semblable. On aura donc, en désignant par K un coefficient arbitraire :

$$a^2 = KR \quad , \text{ et } \quad b^2 = KR',$$

et l'équation d'une indicatrice finie, sera :

$$\frac{x^2}{KR} + \frac{y^2}{KR'} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{x^2}{KR} - \frac{y^2}{KR'} = \pm 1.$$

De la valeur du coefficient K dépendront les dimensions de l'indicatrice finie.

Dans une même épure, si en un même point O, plusieurs surfaces différentes ont le même plan tangent et que l'on veuille à l'aide d'indicatrices finies étudier les particularités de l'intersection de ces surfaces aux environs du point O, il faudra donner, pour toutes les surfaces, une même valeur au coefficient K.

Indicatrice finie la plus simple. – Parmi toutes les indicatrices finies d'une même surface en un point, il en est une qui est plus simple à construire que les autres ; c'est celle qui aurait pour un de ses deux demi-axes le rayon de courbure de la section principale correspondante.

Faisons $a = R$, on en déduit $K = R$ et $b = \sqrt{RR'}$; il existe donc une indicatrice finie ayant pour un de ses demi-axes l'un des rayons principaux de courbure, et pour autre demi-axe une moyenne proportionnelle entre les deux rayons principaux. C'est celle-là dont nous nous servirons ordinairement dans nos épures, à moins d'indications contraires.

Remarquons que si l'on convient de donner le signe + au rayon de courbure d'une section principale quand son centre de courbure est d'un côté du plan tangent, et le signe − quand il est de l'autre côté, l'équation d'une indicatrice finie sera toujours :

$$\frac{x^2}{KR} + \frac{y^2}{KR'} = 1 .$$

Celle de l'indicatrice la plus simple sera :

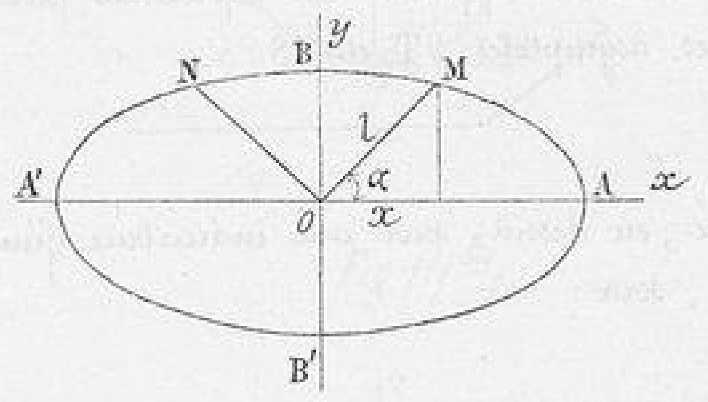
$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{RR'} = 1 .$$

§ 84. – Formule d'Euler. – Expression du rayon de courbure d'une section normale quelconque, en fonction des rayons de courbure des sections principales.

Rappelons une formule connue des courbes du second degré à centre.

Soit $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$, l'équation d'une ellipse ou d'une hyperbole rapportée à ses axes. Soit M un point quelconque de cette courbe ; $OM = l$ le rayon de ce point, x et y ses coordonnées ; α l'angle formé par OM avec le grand axe.

Fig. 118.



On a : $x = l.\cos\alpha$ et $y = l.\sin\alpha$.

Écrivons que le point M est sur la courbe, ce qui donnera :

$$\frac{l^2.\cos^2\alpha}{a^2} \pm \frac{l^2.\sin^2\alpha}{b^2} = 1 \quad \text{ou :}$$

$$(1) \qquad \frac{1}{l^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\alpha \pm \frac{1}{b^2}\sin^2\alpha.$$

Cela posé, revenons à la surface et à son indicatrice.

Nous avons vu que le rayon de courbure d'une section normale qui aurait la ligne OM pour trace de son plan sur celui de l'indicatrice est proportionnel au carré du rayon OM de cette indicatrice, que cette dernière soit infinitésimale ou finie.

Désignons par ρ le rayon de courbure de la section normale qui aurait OM pour trace ; par R et R' les rayons de courbure principaux, c'est-à-dire des sections normales ayant les axes OA et OB pour traces.

Les quantités ρ, R et R' seront proportionnelles aux quantités l^2, a^2 et b^2, et en substituant dans l'expression (1) qui est homogène,

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos^2\alpha \pm \frac{1}{R'}\sin^2\alpha.$$

Telle est la formule d'Euler.

Si l'on veut faire entrer dans cette expression les courbures au lieu des rayons de courbure, on sait que si nous désignons les courbures par les lettres c, C et C', on a :

$c = \frac{1}{\rho}$; $\quad C = \frac{1}{R}$; $\quad C' = \frac{1}{R'}$; ce qui donne :

$$(3) \qquad c = C\cos^2\alpha + C'\sin^2\alpha.$$

§ 85. – Courbure moyenne.

Prenons deux sections normales à angle droit l'une sur l'autre, ayant pour traces sur l'indicatrice les droites perpendiculaires entre elles OM et ON. Soient ρ et ρ' les rayons de courbure correspondants, on aura :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos^2\alpha + \frac{1}{R'}\sin^2\alpha \quad \text{(l'indicatrice étant une ellipse)}$$

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{R}\sin^2\alpha + \frac{1}{R'}\cos^2\alpha \quad \text{; ajoutant :}$$

$$(4) \qquad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}, \quad \text{ou en introduisant les courbures :}$$

$$(5) \qquad c + c' = C + C', \quad \text{d'où ce théorème :}$$

La somme des courbures de deux sections normales à angle droit l'une sur l'autre est constante et égale à la somme des courbures principales.

La quantité $\frac{C+C'}{2}$ se nomme courbure moyenne de la surface au point O.

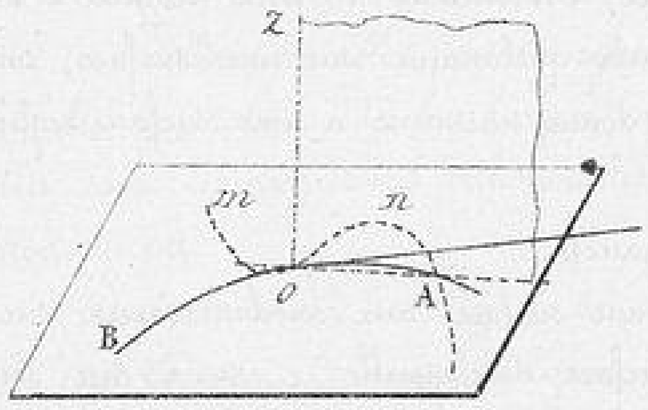
Ombilics. – Il peut se présenter, dans le cas où R et R' sont de même signe, des points pour lesquels R et R' sont égaux.

Dans ce cas, l'indicatrice est un cercle: toutes les sections normales ont le même rayon de courbure. – Ces points se nomment des ombilics.

§86. – Intersection d'une surface à courbures opposées, par son plan tangent.

Théorème. – Dans une surface à courbures opposées les asymptotes de l'indicatrice sont les tangentes de la courbe d'intersection de la surface par son plan tangent. fig. 119.

Fig. 119.



En effet, soit BOA la courbe d'intersection de la surface par son plan tangent, et OA une sécante passant par le point O.

La courbe de section normale m O n A, qui aurait OA pour trace serait tangente en O; au plan tangent, et le recouperait en A.

A la limite, si OA devient la tangente en O, à la courbe BOA, la section normale précédente aura, en O, 3 points réunis en un seul, elle présentera donc une inflexion et son rayon de courbure sera infini.

Mais pour que le rayon de courbure soit infini, il faut que le rayon de l'indicatrice le soit également, c'est-à-dire soit une asymptote. C.Q.F.D.

Conséquences. – Dans le paraboloïde et dans l'hyperboloïde, les génératrices de système différent qui passent par un même point sont les asymptotes de l'indicatrice de ce point.

§87. – Variation des courbures des sections obliques.

Théorème de Meusnier. – Une courbe quelconque tracée par un point O, sur une surface, a pour rayon de courbure la projection sur son plan osculateur du rayon de courbure de la section normale qui passe par la tangente en O à la courbe considérée.

En effet: fig. 120. Soit Q le plan osculateur d'une courbe MN; P le plan normal passant par la tangente OT; ON' la section normale faite par ce dernier plan, et α l'angle de ces deux plans. – Prenons sur la tangente commune aux 2 courbes une longueur Ob infiniment petite; et élevons dans les deux plans P et Q, des perpendiculaires à cette tangente jusqu'à la rencontre en N et N' avec les deux courbes.

Soit ρ, le rayon de courbure de la section normale ON' et ρ_1 celui de la courbe donnée ON, on aura:

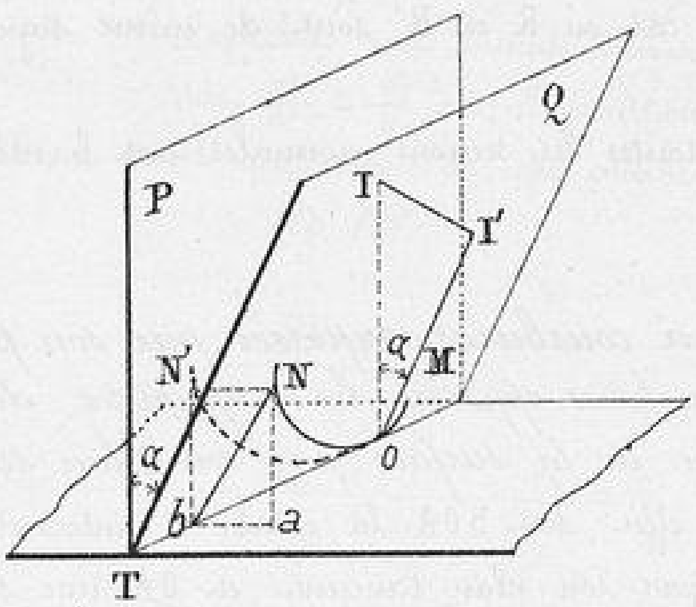
$$\rho = \frac{\overline{Ob}^2}{2\,bN'} \quad \text{et} \quad \rho_1 = \frac{\overline{Ob}^2}{2\,bN}, \text{ et par suite:}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{bN'}{bN}$$

Mais, à la limite, la droite NN' est une droite du plan tangent, et par suite est perpendiculaire sur bN'

Par conséquent: $\frac{bN'}{bN} = \cos\alpha$, et par suite: $\rho_1 = \rho.\cos\alpha$.

Fig. 120.



Soient OI et OI' les deux rayons de courbure, on aura:

$$OI' = OI \cos\alpha ;$$

et par suite le point I' sera la projection du point I sur le plan osculateur. C.Q.F.D.

Il résulte du théorème de Meusnier joint au théorème d'Euler que la connaissance des rayons de courbure principaux entraîne celle des rayons de courbure de toutes les sections normales ou obliques faites par des plans passant par le même point.

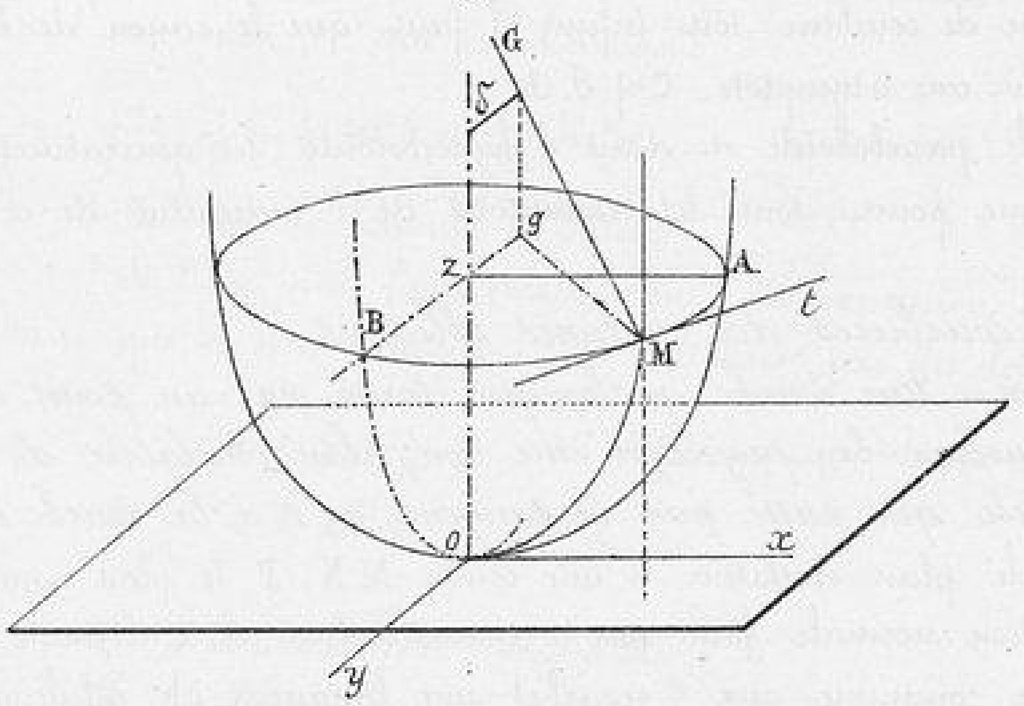
§ 88. – Lignes de courbure.

(a) *Normalies d'une surface.* – Si, après avoir pris une courbe quelconque sur une surface, on mène les normales à la surface par les différents points de la courbe, on donne naissance à une surface réglée qui se nomme une *Normalie*.

Cette normalie sera, en général, une surface gauche.

On donne le nom de *lignes de courbure* d'une surface aux courbes tracées sur elle et telles que les normalies qui leur correspondent forment une surface développable, c'est-à-dire soient à des distances infiniment petites, au moins du 3e ordre.

Fig. 121.



Soit O, un point de la surface, et M un point infiniment voisin pris sur l'indicatrice. Nous allons chercher dans quelle direction OM, il faut se déplacer sur la surface, pour que la normale MG au point infiniment voisin, rencontre la normale OZ, à un infiniment petit près du troisième ordre.

La normale en O, est la droite OZ, perpendiculaire au plan de l'indicatrice.

Soit MG la normale à la surface au point M. La projection Mg sur le plan de l'indicatrice est perpendiculaire sur la tangente Mt à cette courbe, et la plus courte distance δ des deux normales est projetée en vraie grandeur suivant la droite zg perpendiculaire menée sur Mg par le pied z de la normale en O.

Si le point M est un point quelconque de l'indicatrice, la distance zg n'est pas nulle. Elle est du même ordre qu'un arc pris sur l'indicatrice. Elle est donc du 1er ordre.

Mais si l'on prend le point en A ou en B, aux sommets de l'indicatrice, ces points sont les seuls pour lesquels la normale passe par le centre de la courbe. Par conséquent, c'est en A ou en B qu'il faut prendre le point M, infiniment voisin du point O, pour que les deux normales MG et OZ se rencontrent.

En réalité leur distance est infiniment petite de l'ordre des quantités négligées dans la construction

de l'indicatrice, c'est-à-dire du 3ème.

Nous conclurons de là que en chaque point de la surface il passe deux lignes de courbure OA et OB, tangentes aux sections principales, c'est-à-dire tangentes aux deux axes de l'indicatrice.

Il existe deux séries de lignes de courbure. Les unes sont les trajectoires orthogonales des autres; et par conséquent, la connaissance des premières entraîne celle des secondes.

S'il existe des ombilics, c'est-à-dire des points pour lesquels l'indicatrice est un cercle, dans ce cas, deux normales infiniment voisines se rencontrent toujours, et l'on y trouve des directions de lignes de courbure dans tous les sens. - En ces points les directions des lignes de courbure sont indéterminées.

§89.- Lignes de courbure des surfaces développables.

(a) *Développables quelconques.* - Sur ces surfaces, les lignes de courbure de la première série sont les génératrices de la surface, puisque les normales le long des génératrices forment un plan. Les autres sont les trajectoires orthogonales des premières, c'est-à-dire les développantes de l'arête de rebroussement.

(b) *Cylindres.* - Les lignes de courbure sont les génératrices et les sections droites du cylindre.

(c) *Cônes.* - Ce sont les génératrices et les sections faites dans le cône par des sphères ayant leurs centres au sommet du cône.

Pour les cônes, les cylindres et les surfaces développables, un des rayons de courbure principaux étant infini, l'indicatrice est formée par deux lignes parallèles.

§90.- Surfaces de révolution.

(a) *Lignes de courbure.* - Les lignes de courbure sont les méridiens et les parallèles. - En effet, le long des méridiens, les normales forment un plan qui est le plan méridien, et le long d'un parallèle, elles forment un cône.

(b) *Direction des sections principales.* - En un point M M', fig. 122, les plans des sections principales sont donc 1° le plan méridien et 2° le plan perpendiculaire au plan précédent mené par la normale en ce point, c'est-à-dire ayant pour trace sur le plan méridien la normale M'I'.

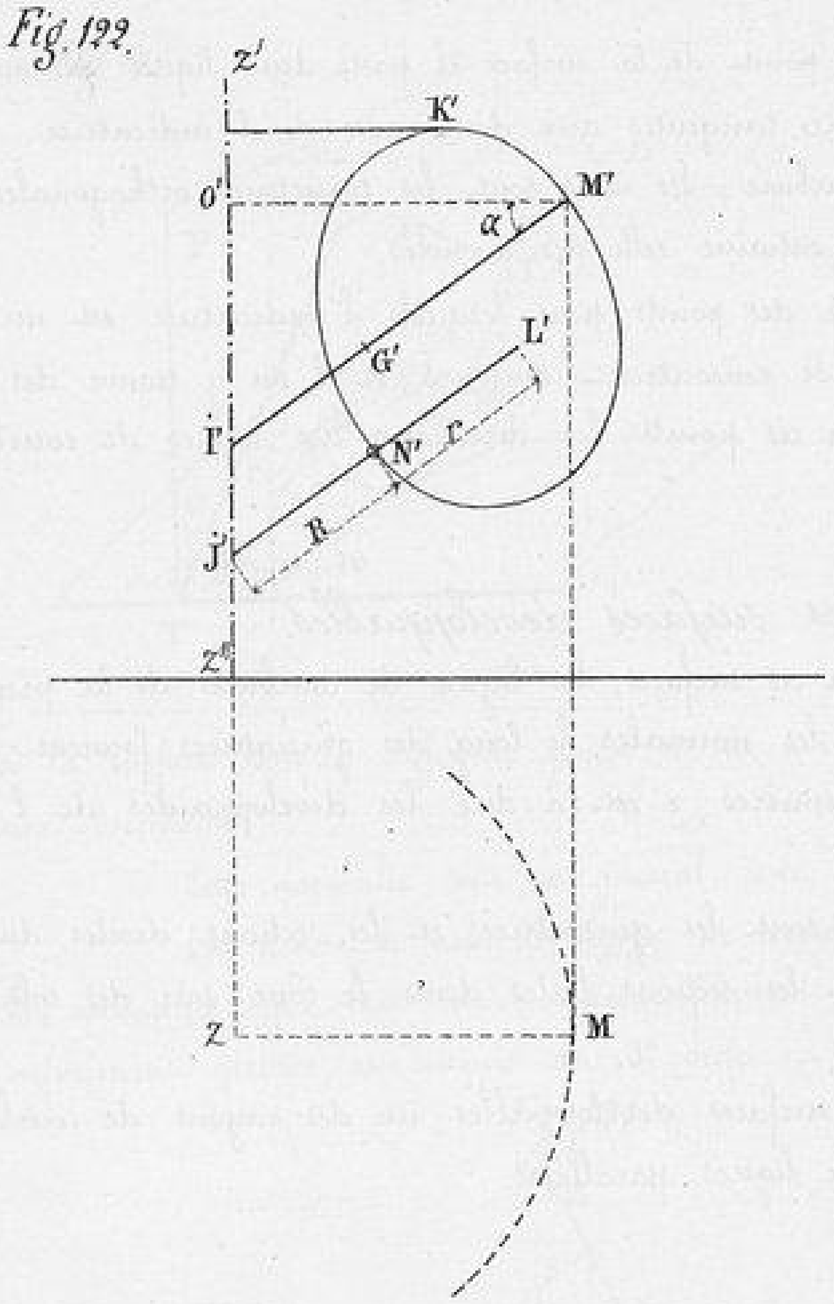
(c) *Rayons de courbure principaux.* - D'après le théorème de Meusnier, le rayon de courbure de la section méridienne étant M'G', par exemple, je dis que celui de la 2e section principale sera M'I'.

On aura, en effet : M'O' (rayon du parallèle) = M'I' Cos. α, ce qui est l'application de la formule de Meusnier.

Par conséquent, dans une surface de révolution, les deux rayons de courbure principaux sont : l'un le rayon de courbure du méridien, l'autre la portion de la normale au méridien comprise entre ce méridien et l'axe.

Si le méridien a sa convexité tournée du côté de l'axe, comme cela se présente pour le point N', les centres de courbure sont situés de part et d'autre du plan tangent. La surface est à courbures opposées et l'indicatrice est une hyperbole. - Au point M', l'indicatrice est elliptique. Au point K', à tangente horizontale séparant la partie concave de la partie convexe

Fig. 122.



du méridien, le 2e rayon principal est infini, puisque la normale au méridien rencontre l'axe à l'infini.

L'indicatrice se compose de deux lignes parallèles.

§ 90 bis. – Lignes de courbure sur les surfaces enveloppes de sphères.

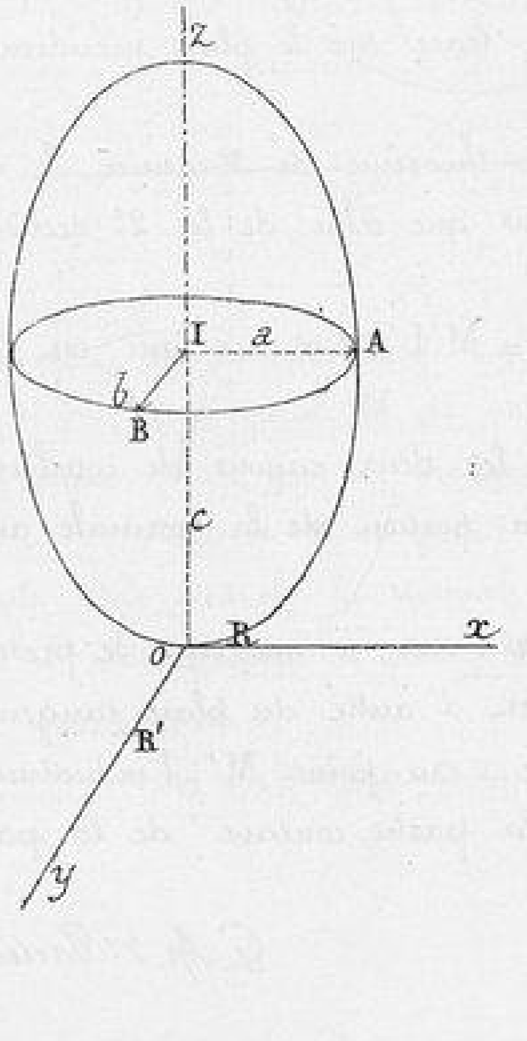
Toute caractéristique étant la limite de l'intersection de deux sphères infiniment voisines, est un cercle de la sphère génératrice. Les normales à la surface aux différents points d'une caractéristique sont aussi normales à la sphère et concourent à son centre; elles forment donc un cône, et par suite, les caractéristiques forment la première série des lignes de courbure. La seconde série est formée par les trajectoires orthogonales des lignes précédentes.

§ 91. – Surfaces osculatrices.

Une surface est dite osculatrice d'une autre en un point O, lorsqu'elle a même plan tangent en ce point, et les mêmes rayons de courbure pour toutes les sections faites par ce point.

D'après les théorèmes d'Euler et de Meusnier, il suffit que les deux surfaces aient mêmes rayons principaux, c'est-à-dire même indicatrice, pour être osculatrices. Une sphère ne peut être osculatrice en un point, à moins que ce dernier ne soit un ombilic.

Fig. 123.



Il existe, au contraire, une infinité de surfaces du second degré qui peuvent être osculatrices de la surface donnée en un point O. – En effet, prenons le cas où la surface est convexe. – Soient R et R' ses rayons principaux. La surface osculatrice sera un ellipsoïde, fig. 123.

Sur la normale prenons arbitrairement le centre de cet ellipsoïde en I, à une distance $OI = c$. – Soient a et b les demi-axes de son ellipse principale, parallèle au plan tangent.

L'ellipse xoz aura pour demi-axes les quantités c et a. Son rayon de courbure au sommet O, doit être égal à R, et est donné par la formule connue :

$$R = \frac{a^2}{c}, \text{ d'où } a^2 = cR \text{ et } a = \sqrt{cR};$$

de même, le rayon de courbure en O de la section par le plan

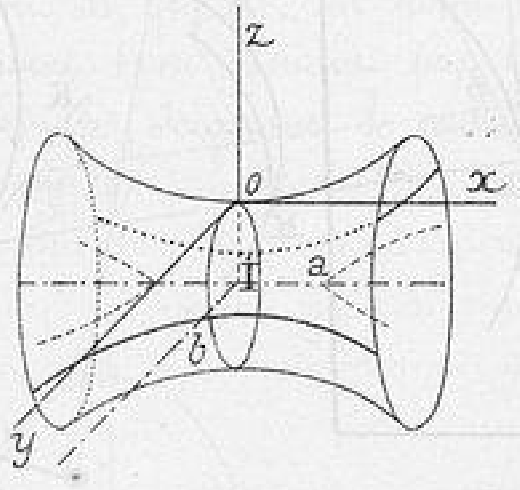
yOz, doit être égal à R' et donné par la formule :

$$R' = \frac{b^2}{c} \quad \text{d'où} \quad b^2 = cR' \quad \text{et} \quad b = \sqrt{cR'} ;$$

Les deux demi-axes a et b, sont donc déterminés.

On peut profiter de l'indétermination laissée sur c pour rendre l'ellipsoïde de révolution.

Fig. 124.



Si l'on fait $a = c$, l'ellipsoïde sera de révolution, et aura son axe parallèle à OY.

Dans ce cas, les formules deviennent :

$$a^2 = aR, \text{ d'où } a = R \text{ et } b = \sqrt{RR'}, \quad c = a.$$

On voit facilement que l'ellipse principale AB est semblable à l'indicatrice.

Si la surface est à courbures opposées, la surface osculatrice est un hyperboloïde. (fig. 124).

On se donnera arbitrairement OI, distance du centre, compté sur la normale.

On calculera le demi-axe réel Ib comme ci-dessus, et le demi-axe imaginaire Ia.

Si le centre I eût été placé au-dessus du plan tangent xy, au lieu d'être au-dessous, l'axe réel eût été parallèle à OX et l'axe imaginaire parallèle à OY. On peut également disposer de OI pour rendre de révolution l'hyperboloïde osculateur.

Nota. – Il faut bien remarquer que lorsque par le choix fait pour le demi-axe c, de l'ellipsoïde ou de l'hyperboloïde osculateur, on rend la surface de révolution, ce n'est jamais autour de la normale OZ comme axe.

§ 92. – Hyperboloïde osculateur de raccordement d'une surface gauche (fig. 125).

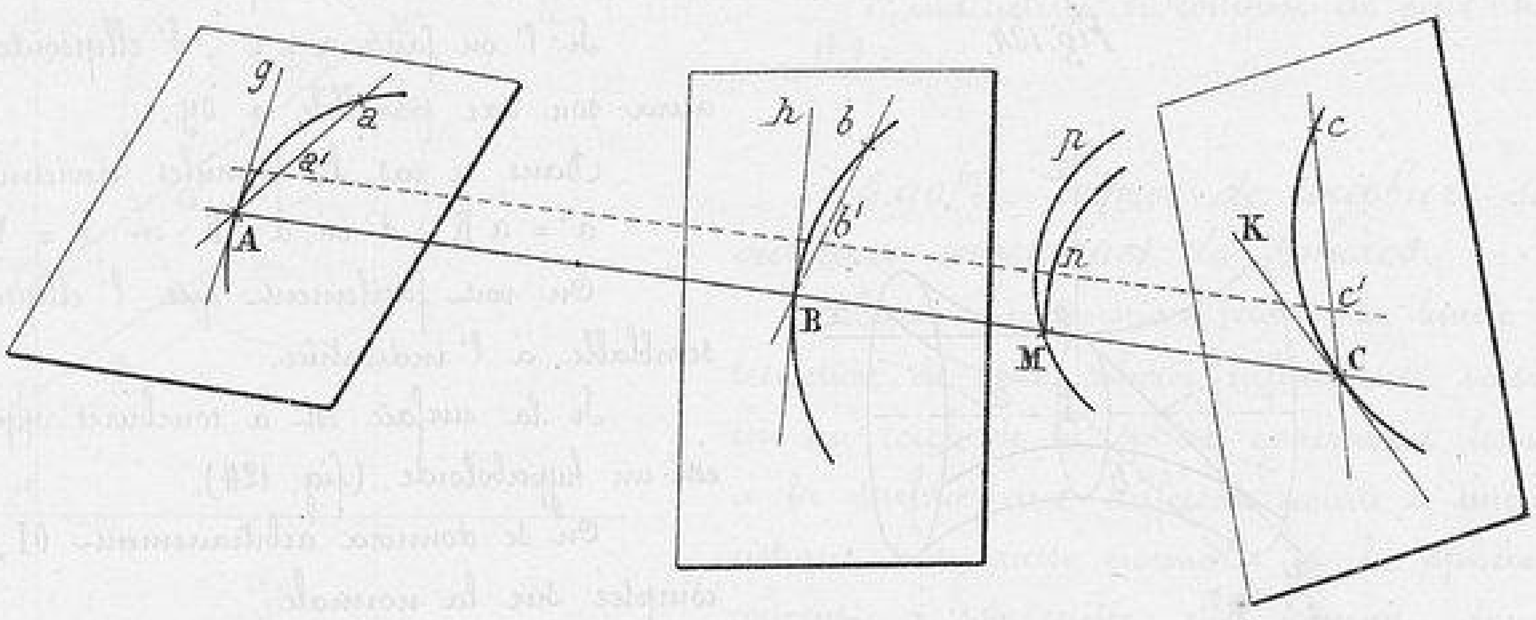
Parmi tous les hyperboloïdes de raccordement que l'on peut mener à une surface gauche le long d'une génératrice, il en est un qui sera osculateur en tous les points. Pour en comprendre la génération, rappelons que 3 tangentes à la surface menées en trois points A, B, C de la génératrice, peuvent être prises pour directrices de l'hyperboloïde ; rappelons également qu'une surface gauche est coupée par son plan tangent suivant la génératrice et suivant une courbe ; et que les asymptotes de l'indicatrice sont, d'une part, la génératrice et de l'autre, la tangente à la courbe de section, § 86. Cela posé : aux trois points A, B, C, prenons comme directrices de l'hyperboloïde les trois droites Aa, Bb, Cc, non tangentes aux sections faites par les trois plans tangents ; je dis que cet hyperboloïde ne sera pas osculateur en tous les points de la génératrice.

En effet, cet hyperboloïde aura bien en ABC deux génératrices confondues en une seule et communes avec la surface ; mais la génératrice infiniment voisine $a'b'c'$ de cet hyperboloïde ne peut être confondue avec la génératrice infiniment voisine de la surface. Par conséquent, toute section MN, faite par un plan quelconque donnera dans les deux surfaces des courbes qui n'auront pas trois points communs confondus en un seul, et par conséquent qui ne posséderont pas le même rayon de courbure.

Si, au contraire, on prend comme directrices les trois tangentes ag, bh et ck aux sections faites par les plans tangents, alors les deux surfaces auront trois génératrices communes, confondues

en une seule ; toutes les courbes de section auront trois points confondus en un seul et par suite auront le même rayon de courbure.

Fig. 125.



Remarque. – En chacun des points de la génératrice, les deux génératrices de l'hyperboloïde sont les asymptotes de l'indicatrice de la surface, et sont, de plus, tangentes aux intersections de la surface par son plan tangent.

Ce qui nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème. Les asymptotes des indicatrices aux différents points d'une même génératrice, forment un hyperboloïde osculateur de raccordement.

Autre énoncé : Les tangentes aux sections faites dans une surface gauche par des plans tangents aux différents points d'une même génératrice, forment un hyperboloïde osculateur de raccordement.

Si la surface est à plan directeur, l'hyperboloïde osculateur deviendra un paraboloïde dont les deux directrices seront les tangentes aux sections faites dans la surface par deux plans tangents, ou, ce qui revient au même, les asymptotes de deux indicatrices.

Fig. 126.

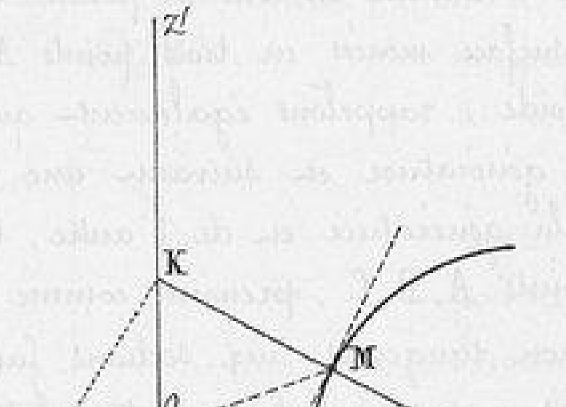
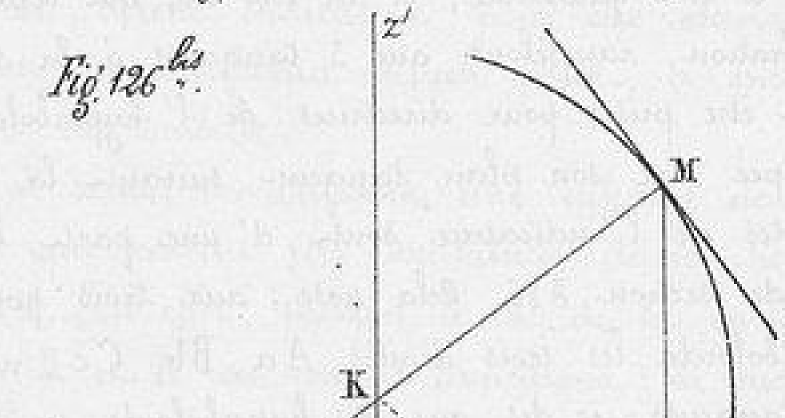


Fig. 126 bis.



§ 93. – Surface du second degré osculatrice d'une surface de révolution, le long d'un parallèle.

Soit M, fig. 126, un point pris sur le méridien d'une surface de révolution ; MI le rayon de courbure du méridien ; I son centre de courbure. On sait que MI est un des rayons prin-

cipaux, et que MK, portion de la normale au méridien comprise entre ce méridien et l'axe, est le second rayon de courbure. Cherchons une conique qui aurait pour axe l'axe de la surface, et qui soit osculatrice en M au méridien, c'est-à-dire qui lui soit tangente en ayant même centre de courbure. En faisant tourner cette conique, elle engendrera une surface osculatrice de la première en tous les points du parallèle M.

Rappelons la construction suivante du rayon de courbure d'une conique (Voir plus haut §5).

Soit M, fig. 127, un point; O, le centre; MN la normale, et I le centre de courbure. On a le point I en menant par le point C où la normale rencontre l'axe, une perpendiculaire à cette normale. Joignant le centre de la conique au point M, et du point K de rencontre avec la perpendiculaire précédente, abaissant une perpendiculaire sur l'axe.

Fig. 127.

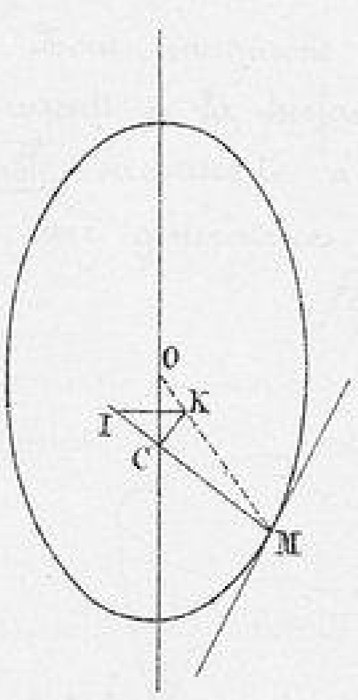
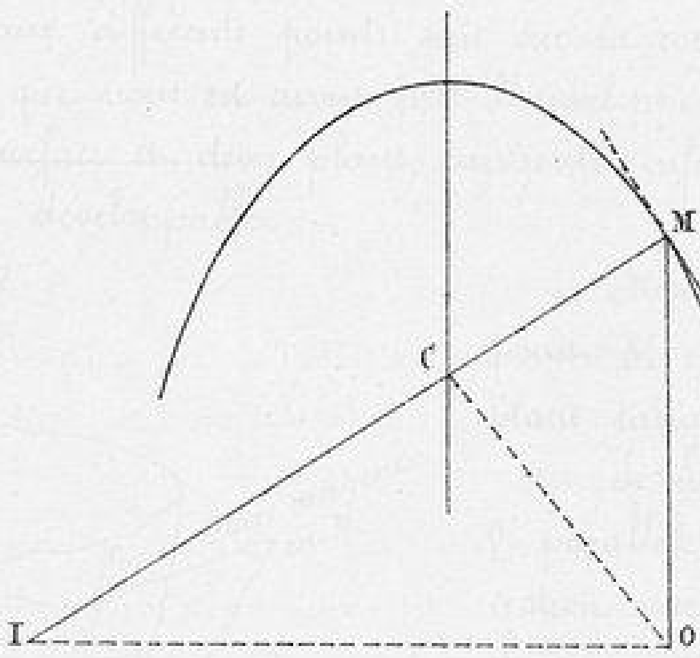


Fig. 128.



Sa rencontre avec la normale donne en I le centre de courbure.

Cette construction se fait aussi bien sur le petit axe que sur le grand. Elle est générale pour les 3 coniques. — Pour la parabole (fig. 128) le centre étant à l'infini, elle se modifie de la manière suivante:

Par le point M, on mène la normale MI et la parallèle à l'axe MO.

Par le point C, rencontre de l'axe et de la normale, une perpendiculaire CO à cette normale, jusqu'à la rencontre en O avec la parallèle à l'axe.

Enfin, du point O, on mène une perpendiculaire à l'axe OI, qui donne en I le centre de courbure.

Cela posé, (fig. 126) appliquons pour le méridien donné la construction précédente, mais en la faisant en sens inverse.

I étant le centre de courbure du méridien, et par suite, de la conique cherchée; Z'Z' son axe: Menons KC perpendiculaire sur la normale, IC perpendiculaire sur l'axe. Prenons la rencontre C de ces deux droites et joignons CM, nous aurons en O, à la rencontre avec l'axe, le centre de la conique.

Cette dernière est donc déterminée, puisque l'on connaît son centre, ses deux axes en direction, un point M et la tangente en ce point.

Remarque. — Si la position I du centre de courbure est telle (fig. 126 bis) que MC soit parallèle à l'axe, la conique osculatrice sera une parabole.

Ayant la conique osculatrice, en la faisant tourner autour de l'axe, elle engendrera une surface du 2^e osculatrice de la surface donnée en tous les points d'un même parallèle.

§ 94. – (a) *Lignes asymptotiques.* – On nomme ainsi les lignes tracées sur une surface et tangentes aux asymptotes des indicatrices de tous les points par lesquels elles passent sur la surface.

(b) *Lignes géodésiques.* – Ce sont les lignes les plus courtes que l'on puisse tracer d'un point à un autre sur une surface.

Nous n'étudierons pas ces lignes dans ce cours élémentaire.

Complément de la théorie générale des ombres.

12e Leçon.

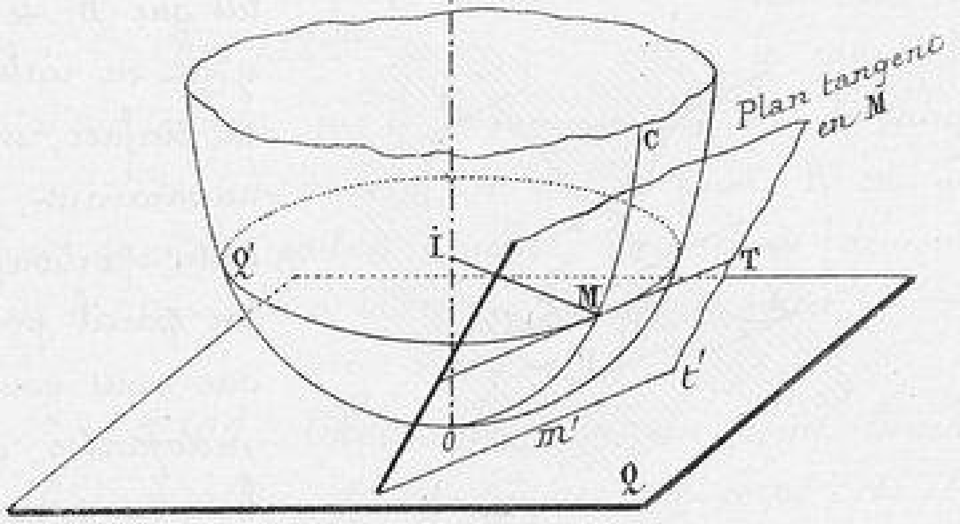
§ 95. – Théorème des tangentes conjuguées.

Lorsqu'une surface développable est circonscrite à une surface quelconque, la tangente à la courbe de contact et la génératrice de la développable sont deux diamètres conjugués de l'indicatrice. (fig. 129).

En effet, soit O, un point de la surface; Q, le plan tangent en ce point; M, un point infiniment voisin, situé sur une courbe OC.

Nous imaginons que aux différents points pris sur la courbe OMC, nous avons mené les plans tangents à la surface et que nous en avons pris l'enveloppe. Cette enveloppe constitue une développable circonscrite à la surface et deux plans tangents infiniment voisins se recoupent suivant une génératrice de la développable.

Fig. 129.



Menons donc le plan tangent au point M, et cherchons l'intersection des plans tangents en M et en O.

Si nous menons par M un plan Q' parallèle au plan Q, il donnera comme section une courbe semblable à l'indicatrice. Le plan tangent en M aura pour trace sur le plan Q' la tangente MT à l'indicatrice et parallèle à son intersection m't' avec le plan tangent en O. Cette droite MT devient donc à la limite, l'intersection des deux plans tangents, c'est-à-dire la génératrice d'une développable qui serait l'enveloppe de ces plans tangents.

D'un autre côté, la courbe de contact, c'est-à-dire le lieu des points de tangence, est la courbe OMC, dont la tangente est, à la limite, le diamètre IM de l'indicatrice.

Or, dans une conique, un diamètre IM et la tangente MT à son extrémité sont conjugués; le théorème est donc démontré.

§ 96. – Conséquences pour les lignes d'ombre, ou de perspective.

1° La tangente à la courbe d'ombre propre d'une surface est conjuguée du rayon lumineux du point de contact.

2° La tangente au contour apparent d'une surface est conjuguée du rayon visuel du point de contour apparent.

3° Lorsque deux surfaces sont simplement tangentes en un point, les lignes d'ombres propres n'ont pas les mêmes tangentes; mais si les surfaces sont osculatrices, alors elles ont la même indicatrice, et par suite les séparatrices d'ombre sont tangentes entre elles.

Remarque. – La propriété des tangentes conjuguées se conserve en projection, car une

conique et deux de ses diamètres conjugués se projettent suivant une autre conique et deux de ses diamètres conjugués.

§ 97. – Lignes d'ombre ou de perspective sur des surfaces à courbures opposées. – Classification des branches de courbes.

Supposons que nous ayons à chercher la séparatrice d'ombre propre d'une surface quelconque. Appliquons la méthode des plans sécants et coupons la surface par un plan ; nous obtiendrons ainsi une section plane. Si le plan sécant passe par le point lumineux, les tangentes menées du point éclairant à la section sont les rayons lumineux tangents au corps et situés dans ce plan. Les points de contact de ces tangentes sont des points de la séparatrice d'ombre propre sur le corps.

On classera ces points suivant la manière dont le rayon lumineux vient y rencontrer la surface ; nous aurons :

1° des points réels utiles, tels que A et A, caractérisés par ce fait que le rayon lumineux y est, aux environs, extérieur à la surface.

Fig. 130.

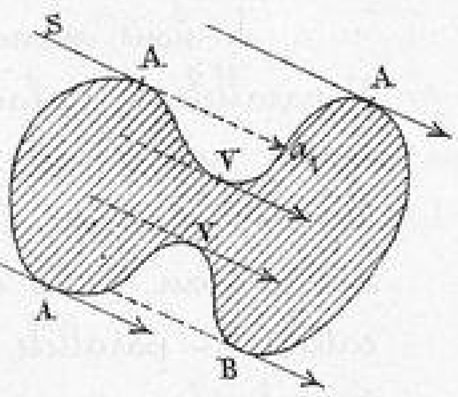
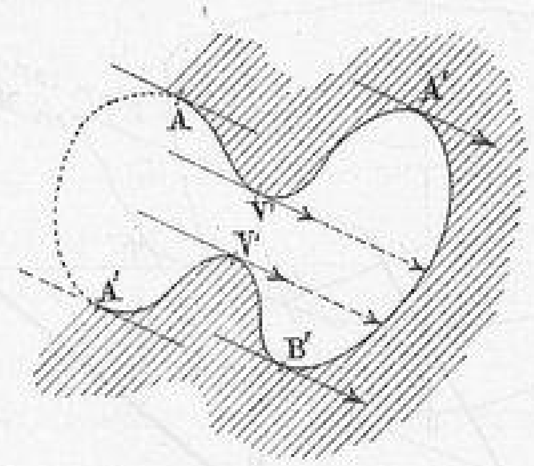


Fig. 131.



2° des points réels noyés, tels que B. Le rayon lumineux y est en réalité extérieur à la surface, mais il a été, auparavant, arrêté par une autre portion de la surface. Un pareil point est dans ce que nous nommerons l'ombre autoportée, c'est-à-dire dans l'ombre portée par la surface sur elle-même.

3° des points virtuels, tels que V. Le rayon lumineux y est, aux environs, intérieur à la surface.

Nous aurons donc trois espèces de branches de courbes séparatrices. Les branches réelles utiles (ou simplement branches réelles). – Les branches réelles noyées (ou simplement branches noyées) et les branches virtuelles.

Si l'on prolonge un rayon réel tel que A, il pourra se faire qu'il aille rencontrer, en a_1, la surface. Le point a_1 sera un point de la courbe d'ombre autoportée.

§ 98. – Surfaces en creux.

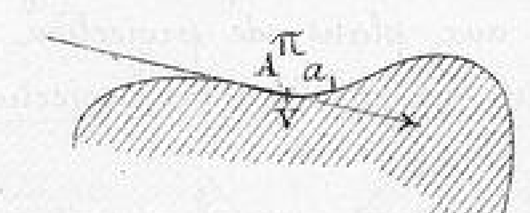
Prenons (fig. 131) une surface en creux qui soit, pour ainsi dire, le moule de la surface précédente ; et coupons-la par le même plan sécant. Il est facile de voir que tous les points tels que A qui (fig. 130) étaient réels, deviennent maintenant (fig. 131) des points virtuels A', A', B', tandis que les points virtuels V, V, deviennent, au contraire, réels.

§ 99. – Passage des courbes réelles aux courbes noyées, aux courbes virtuelles

et aux lignes d'ombres autoportées.

On conçoit facilement qu'en faisant varier convenablement le plan sécant il soit possible de réduire de plus en plus l'étendue de la portion de section AVa_1 de la figure 130. De telle sorte qu'à la limite les trois points A, V et a_1 étant réunis en un seul la section présente l'aspect de la figure 132. Alors le point π ainsi obtenu prend le nom de point limite ; en ce point il y a inflexion de la courbe de section et le rayon lumineux qui lui correspond est tangent au point d'inflexion.

Fig. 132.



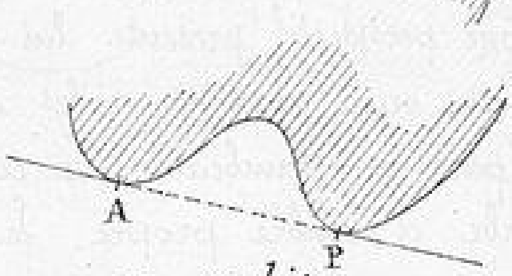


Fig. 132 bis

Cette discussion prouve que la branche virtuelle, lieu des points V, tend à se réunir à la branche réelle lieu des points A, de même que l'ombre autoportée lieu des points a_1. Cette triple réunion se fait en un même point π, qui se nomme un point limite.

Nous démontrerons au paragraphe suivant qu'en ce point limite π, les trois courbes qui se réunissent ont une même tangente qui est le rayon lumineux.

Quant à la branche noyée, lieu des points B, elle cesse à un moment donné d'être noyée, lorsque le rayon lumineux (fig. 132 bis) qui était tangent en A' est aussi tangent en P, autrement dit est bi-tangent.

On voit dans ce cas que le point P est un point de perte, tel que nous l'avons défini dans les ombres usuelles. Nous avons démontré qu'en tout point de perte le rayon lumineux est tangent à la courbe d'ombre portée.

§ 100. – *Théorème.* – *En un point limite, le rayon lumineux est une asymptote de l'indicatrice de la surface du corps, et il est tangent à la courbe d'ombre propre.*

En effet, puisqu'il s'agit d'un point limite si on le considère comme appartenant à l'arc réel qu'il termine, il appartient à une tangente extérieure, mais il appartient aussi à une tangente intérieure, comme étant l'extrémité d'un arc virtuel. Le rayon lumineux est donc d'un côté, intérieur, de l'autre côté, extérieur à la surface. En ce point, la section faite par le plan auxiliaire présente une inflexion, fig. 132, et le rayon lumineux est tangent en ce point d'inflexion.

Or, si la section faite par le plan sécant auxiliaire présente une inflexion, c'est que son rayon de courbure y est infini. – La section normale qui passerait par le rayon lumineux aura donc aussi, d'après le théorème de Meusnier un rayon de courbure infini. – Mais l'indicatrice a ses rayons vecteurs proportionnels aux rayons de courbure des sections normales. Il faut donc que le rayon vecteur de l'indicatrice qui répond au rayon lumineux soit infini ; autrement dit il faut que le rayon lumineux soit une asymptote de l'indicatrice.

Cela posé : D'après le théorème des tangentes conjuguées, la tangente de la séparatrice est conjuguée du rayon lumineux. Mais, dans une hyperbole l'asymptote est à elle-même sa conjuguée ; on voit donc ainsi qu'aux points limites, les rayons lumineux sont tangents à la courbe d'ombre propre. C. Q. F. D.

Réciproquement : Si du point lumineux on mène une tangente à la courbe d'ombre, le point de contact sera un point limite.

En effet, la conjuguée du rayon lumineux se confond avec le rayon lumineux lui-même. Donc, celui-ci est une asymptote de l'indicatrice; par suite, il est osculateur à la surface, et le point où il touche cette surface est un point limite, car toute section qui contiendrait le rayon lumineux présenterait une inflexion comme sur la figure 132.

Dans la pratique du dessin, si des projections du point éclairant on mène des tangentes aux projections de la séparatrice d'ombre, les points de contact sont les projections des points limites. Toutefois il faut s'assurer que les plans tangents à la surface aux points déterminés ne sont pas perpendiculaires aux plans de projection, car dans ce cas, la tangente à la projection de la courbe peut ne pas être la projection de la tangente à la courbe de l'espace.

On a vu que si une courbe a sa tangente passant par le point visuel, cette courbe présente en perspective un rebroussement, et que le cône perspectif présente lui-même un rebroussement le long de cette tangente. Ce fait est vrai aussi pour les ombres, c'est-à-dire pour le cas où le point visuel est remplacé par un flambeau. Le cône d'ombre est formé par les rayons qui s'appuient sur la courbe d'ombre propre. Les génératrices qui sont tangentes à la courbe d'ombre sont donc, comme en perspective, des génératrices de rebroussement pour ce cône. Ainsi, les rayons lumineux limites, c'est-à-dire qui aboutissent aux points limites sont des génératrices de rebroussement du cône d'ombre.

§ 101. – Construction de la tangente en un point de la courbe d'ombre portée.

Soit le rayon lumineux SA, fig. 130, qui donne le point a_1 de la courbe d'ombre portée. La tangente à l'ombre autoportée en a_1 est l'intersection du plan tangent en ce point à la surface, et du plan tangent au cône d'ombre le long de la génératrice SA. Or ce plan est le même que le plan tangent au point A de la surface. Donc la tangente au point a_1 est l'intersection de deux plans tangents à la surface, l'un au point A, l'autre, au point a_1.

En un point limite, tel que π (fig. 132) ces deux plans tangents ont leurs points de contact A et a_1 infiniment voisins, et d'après le théorème des tangentes conjuguées, ils se coupent suivant une droite conjuguée de la ligne qui joint leurs points de contact, laquelle est le rayon lumineux Aa_1. Mais nous venons de voir que au point π le rayon lumineux est l'asymptote de l'indicatrice. Donc : La tangente à la courbe d'ombre portée au point limite π est, elle aussi, le rayon lumineux.

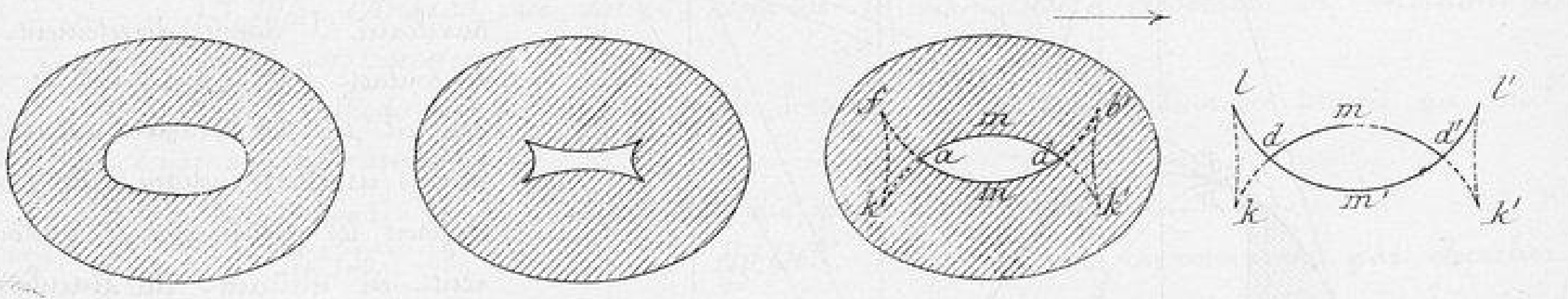
Résumé. – Aux points limites, trois courbes (séparatrice réelle, séparatrice virtuelle, ombre portée), viennent se rencontrer, et elles ont pour tangente commune le rayon lumineux. De plus, le cône d'ombre propre y présente une génératrice de rebroussement.

§ 102. – Généralisation aux contours apparents perspectifs ou projectifs.

Les principes précédents s'étendent aux contours apparents en perspective et en projection;

mais certaines parties de ces courbes utiles en projection et en perspective peuvent ne plus l'être dans le cas des ombres. Prenons pour exemple le tore, et supposons qu'on le projette sur le plan du tableau, en le plaçant obliquement par rapport à ce plan. Nous le considérons comme enveloppe d'une sphère dont le centre reste sur une circonférence fixe. Cette circonférence se projette suivant une ellipse, et la sphère mobile a, à chaque instant, pour contour apparent une circonférence de cercle dont le centre est sur cette ellipse. L'enveloppe se compose donc de deux courbes parallèles à l'ellipse, dont on a déjà étudié la forme, et que rappellent les figures suivantes. Ces courbes sont des développantes de la développée de l'Ellipse.

Fig. 133.



l et l' sont les points limites séparant la partie réelle de la partie virtuelle. Les arcs lk et l'k' sont des arcs virtuels kd et k'd' sont des arcs réels, mais cachés; (ils répondent aux arcs noyés des courbes d'ombre); d et d' sont les traces de deux rayons bi-tangents à la surface. Les arcs ld, l'd', utiles si l'on considère la projection de la surface, cessent de l'être si l'on cherche seulement l'ombre portée (1).

§ 103. – Ombres des surfaces de révolution.

Nous reprendrons, mais alors à un point de vue tout à fait général, le problème des ombres pour les surfaces de révolution. Cherchons la séparatrice d'ombre d'un ellipsoïde de révolution, éclairé par un flambeau FF'. fig. 134.

1ère Méthode dite des enveloppées coniques. – Trouver le point de la séparatrice (ou ligne de contact) situé sur un parallèle donné N° 1. – 1° On considère le cône de révolution S'A'B', circonscrit à la surface le long du parallèle donné. – 2° On lui mène un plan tangent par le point F'F'. – La meilleure manière pour cela c'est de mener le plan horizontal H, qui

---

(1) Il serait facile de déterminer très exactement ici les points limites l, l', k et k'. Ce sont en projection, les rebroussements de la courbe lkdm ...... laquelle est une développante de la développée de l'ellipse. En ces points la développante rencontre donc la développée, et aux points correspondants de l'ellipse, le rayon de courbure ρ est précisément égal au rayon r de la sphère génératrice du tore.

Prenons la formule du § 4 : $\rho = \frac{a'^3}{ab}$.

Écrivons que $\rho = r$, cela donne : $a'^3 = abr$.

Ce qui permet de calculer a', c'est-à-dire le diamètre conjugué a' de celui (b') qui passerait par le point cherché de l'ellipse.

On en déduirait ensuite facilement ce point de l'ellipse.

passe par F'F ; de construire le cercle a'b'-ab suivant lequel il coupe le cône ; de lui mener par le point F les deux tangentes Fm-Fn ; de tracer les génératrices de contact zm-zn ; de les prolonger jusqu'en M et N, sur le parallèle donné AB. M et N sont les points cherchés rappelés verticalement en M' et N'.

Fig. 134.

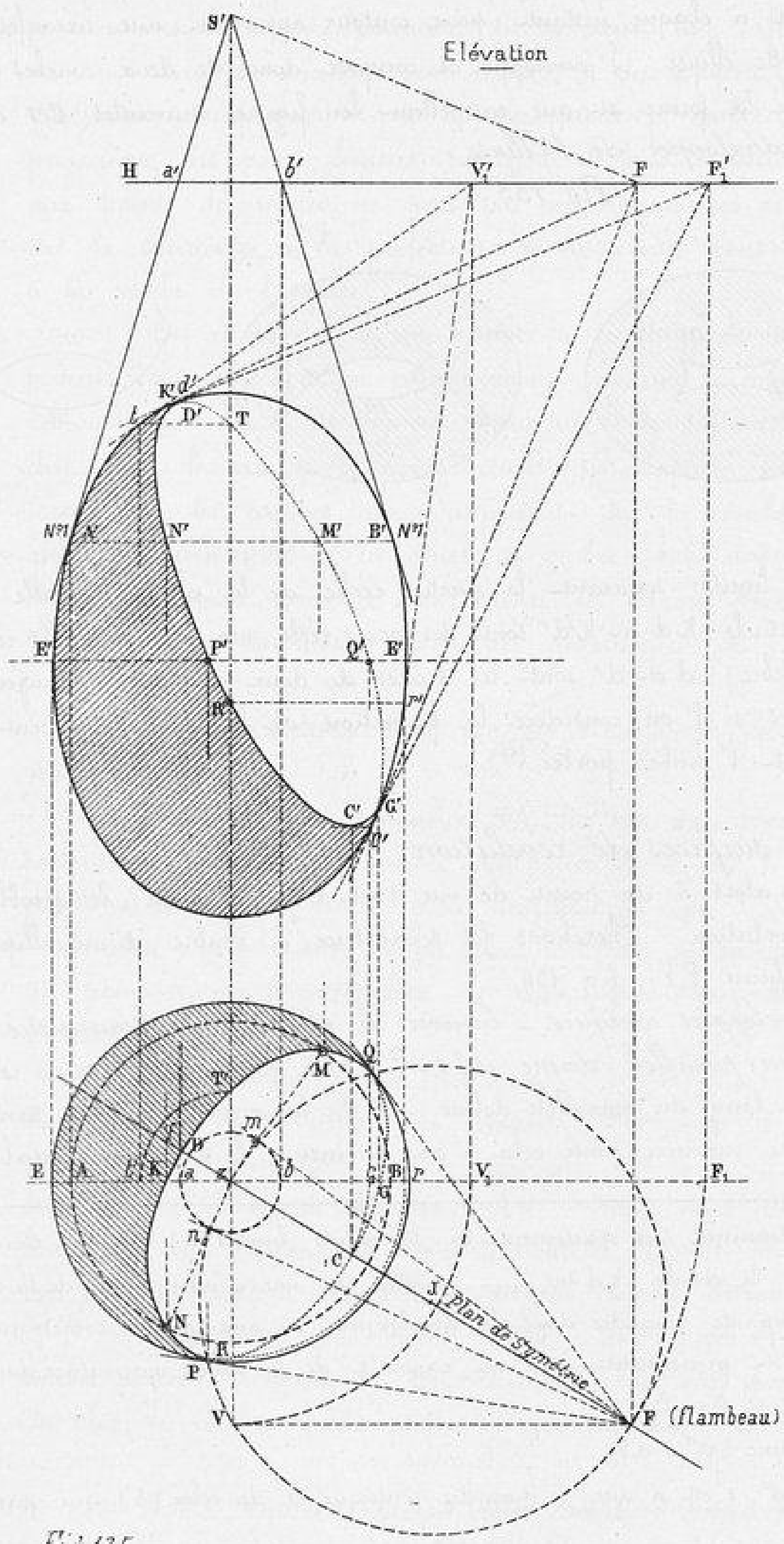


Fig. 135.

Remarque : Tous les points de contact tels que m, n, P, Q sont sur un cercle décrit sur zF comme diamètre.

Points sur l'équateur PP'-QQ'. — C'est un cas particulier du précédent. Le cône se ramène à un cylindre vertical. Le cercle auxiliaire J donne directement les points de contact PQ. D'ailleurs le théorème général sur les contours apparents (voir ombres usuelles) indique que l'on obtient toujours les points sur le contour apparent en menant du flambeau des tangentes à ce contour.

Point le plus haut ou le plus bas. — Le premier (ou le dernier) parallèle donnant des points de l'ombre propre sera celui pour lequel le cercle ab-a'b' passera par le point F'F ; donc, menons en plan, un cercle F_1F passant par F ; rappelons F_1 en F'_1 sur l'élévation ; menons les tangentes méridiennes par le point F'_1 et nous aurons en C' et D' les parallèles limites donnant en CC' et DD' le point le plus bas ou le point le plus haut.

2ème Méthode : Dite des enveloppées cylindriques. — Trouver le point de la séparatrice situé sur un méridien donné.

1er cas. — Le méridien donné est le méridien principal. Ce méridien étant le contour apparent vertical de la surface, on a immédiatement les points cherchés G'K' rappelés en G et K en plan, sur le méridien de front ; en menant de F', élévation du flambeau, les tangentes au contour apparent vertical.

2e cas. — Le méridien est quelconque :

Choisissons par exemple, le méridien de profil ZV. On ramène au cas précédent par une rotation : ZV est ramené de front en ZF_1, en entraînant le flambeau : A cet effet, le flambeau F (fig. 125) est projeté en V sur le méridien ZV, et il suffit d'entraîner le point V en $V_1 V_1'$. On mène les tangentes méridiennes $V_1 r'$ et $V_1 t'$ (fig. 134) et par une rotation inverse on ramène rr' en tt' en RR' et TT'.

3e cas. – Point dans le méridien de symétrie ZF. – La marche est la même. On fait tourner directement F en $F_1 F_1'$. – On mène les tangentes méridiennes $F_1' c'$ et $F' d'$; – On ramène en place par une rotation inverse et on retrouve ainsi les points le plus haut (DD') et le plus bas (CC') obtenus tout à l'heure par d'autres considérations.

§ 104. – Ombres au soleil ; emploi de la sphère inscrite, ou méthode des enveloppées sphériques.

Cette méthode est surtout applicable lorsque l'on veut avoir l'ombre propre, au soleil, en élévation seulement.

Soit (fig. 136 bis) la direction RR' du rayon lumineux.

Fig. 136.

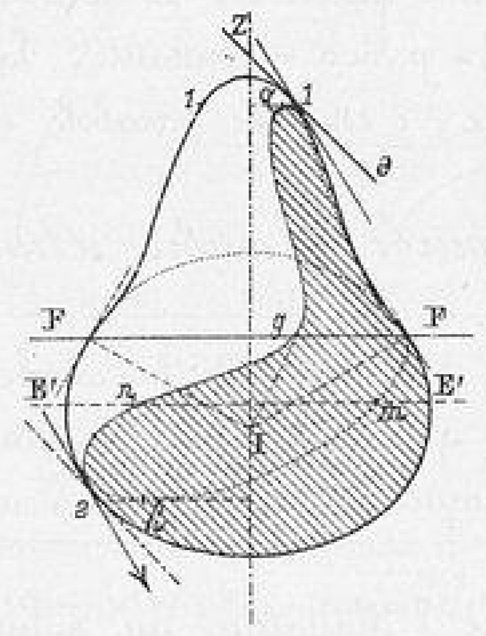
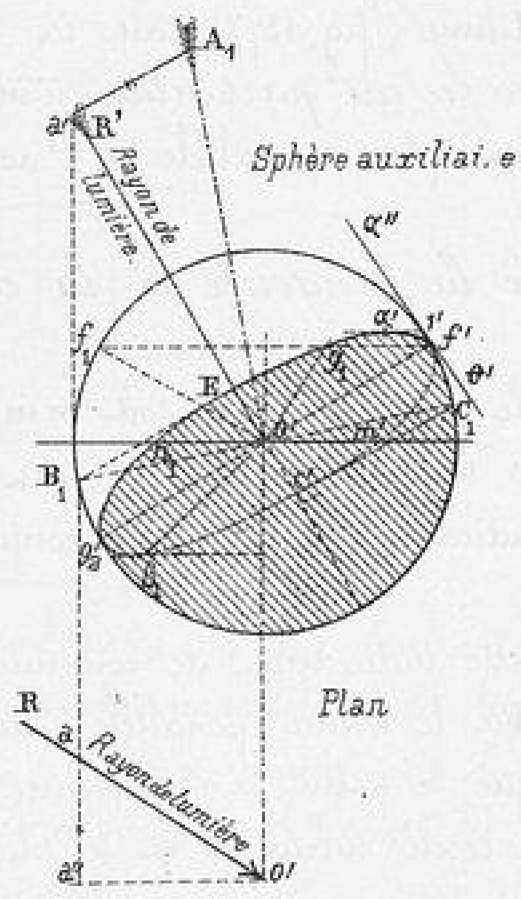


Fig. 136 bis.



(a). On commence par chercher l'ombre propre d'une sphère OO' de rayon quelconque. Cette épure préparatoire se fait ainsi : 1° On rabat en $A_1 O'$ sur le plan méridien principal de la sphère, le rayon lumineux. – ($a'A_1 = aa''$ du plan). 2° On mène $B_1 O' C_1$ perpendiculaire sur $A_1 O'$, ce qui donne la direction du plan de la séparatrice de la sphère. 3° C_1 ramené en c' et B_1 ramené en b' donnent les extrémités du petit axe de l'ellipse d'ombre propre ; et le grand axe est f'g', perpendiculaire sur b'c'.

(b). Cela fait : soit à obtenir (fig. 136) le point de la séparatrice de la surface situé sur le parallèle F. 1° On mène la tangente en F à la méridienne et on en déduit la normale FI. 2° On imagine construite la sphère qui aurait I pour centre et IF pour rayon ; elle est inscrite dans la surface tout le long du parallèle F. Son ombre propre serait, en élévation, une ellipse semblable à l'ellipse f'g'c'b' de la figure 136 bis. – Il est inutile de la construire. 3° On mène (fig. 136 bis) sur la sphère auxiliaire, le rayon $O'f_1$ parallèle à IF ; on en déduit le parallèle $f_1 f'$; lequel recoupe l'ellipse d'ombre de la sphère en g_1. 4° On prend sur FF (fig. 136) l'homologue du point g_1 de la figure 136 bis, ce qui se fera soit : en appréciant à vue d'œil le rapport dans lequel g_1 partage le parallèle $f_1 f$ et plaçant g de manière à diviser dans le même rapport le parallèle FF ; soit : en menant le rayon O'g (fig. 136 bis) et traçant (fig. 136) Ig parallèle

Nota. — Au point le plus haut α_1, sur la sphère, répond le point le plus haut α sur la surface. — Le parallèle 1,1 qui le contient sur la surface est obtenu en menant à la méridienne une tangente 1θ, parallèle à la tangente $1'\theta'$, à la sphère ..... etc.....

§ 105. — Même problème : Le rayon lumineux est de front.

Fig. 137.

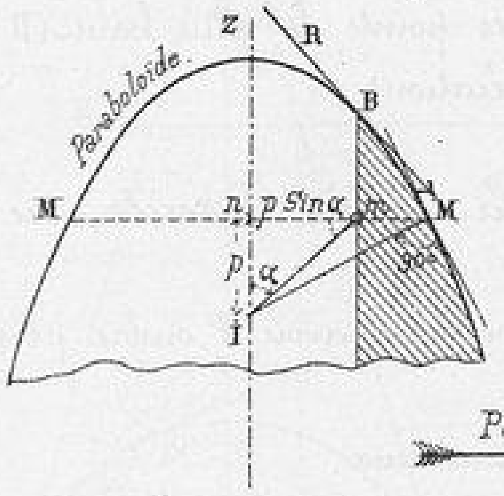
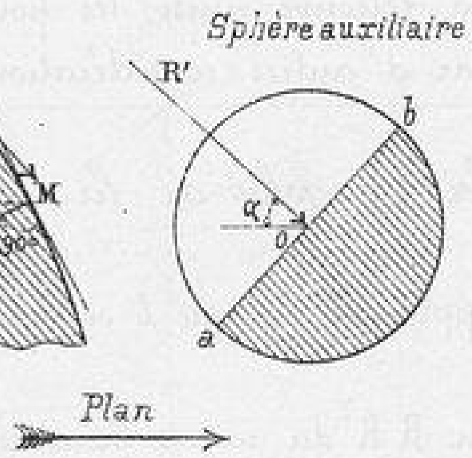


Fig. 137 bis



Dans ce cas, fig. 137, sur la sphère auxiliaire O, l'ellipse d'ombre propre est réduite à une droite ab, perpendiculaire au rayon lumineux. La construction se simplifie ; il n'est même plus besoin de tracer cette sphère auxiliaire : On opère ainsi : 1° On prend un parallèle quelconque MM. 2° En M on mène la tangente méridienne et on en déduit la normale MI. 3° Par le point I, sur l'axe, on mène Im, perpendiculaire sur le rayon lumineux ; m est un point de la séparatrice.

Remarque. — La méridienne (fig. 137) était ici une parabole ; la sous-normale nI est constante ($= p$) : On a donc, dans ce cas particulier ; $\overline{nm} = p \sin\alpha =$ constante. La séparatrice est la section de la surface par un plan parallèle à l'axe ; c'est une parabole dans l'espace.

§ 106. — Recherche de la tangente à la courbe d'ombre d'une surface de révolution.

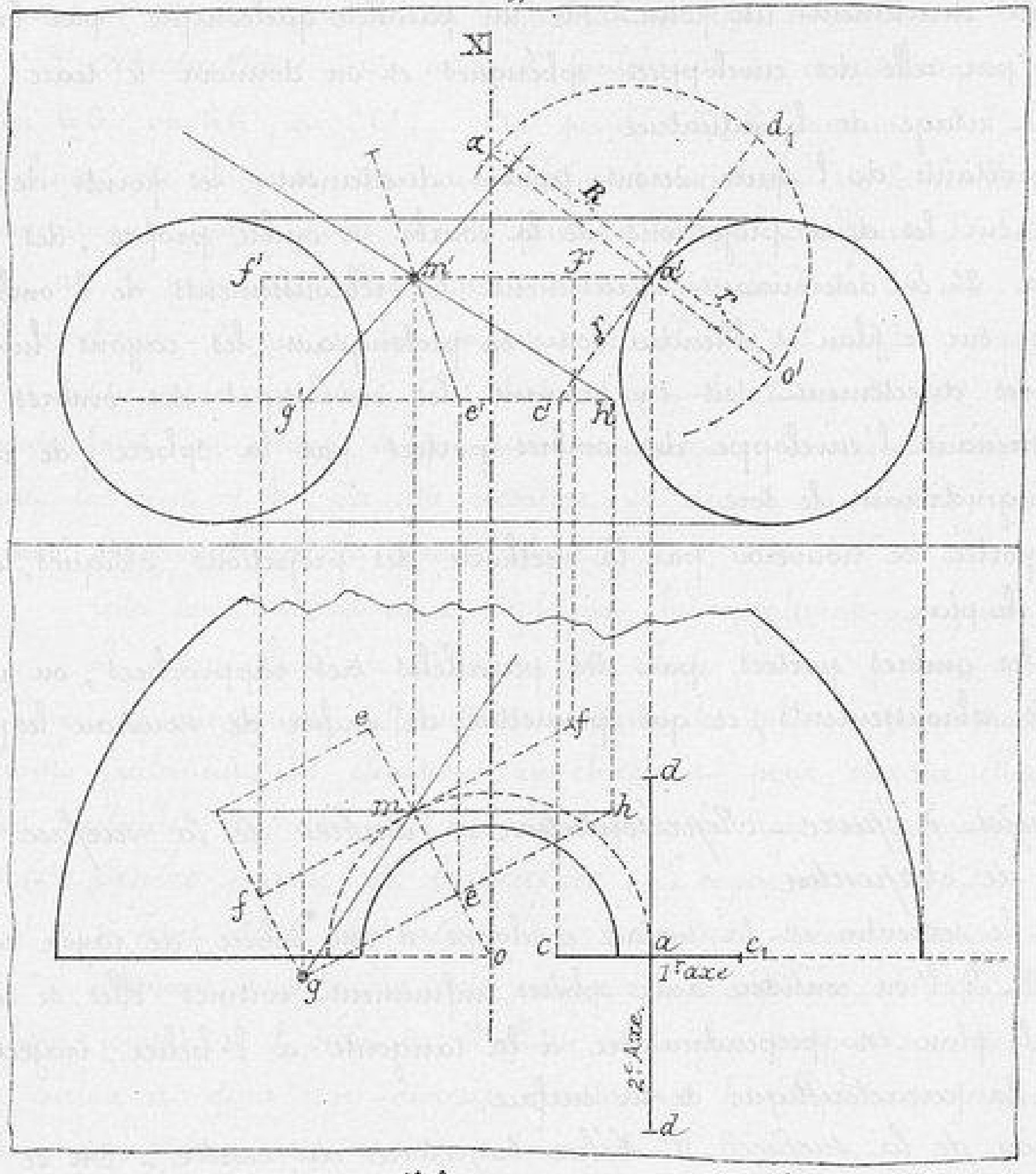
Prenons pour exemple le tore fig. 138. — Soit mm' un point de la courbe d'ombre, obtenu par une quelconque des trois méthodes ; on sait que la tangente en un point à la courbe d'ombre est, dans l'indicatrice, la direction conjuguée du rayon lumineux qui passe par ce point.

Il suffit, pour avoir cette indicatrice, de construire l'indicatrice au point aa' situé dans le méridien de front et sur le même parallèle que mm' et de la ramener par une rotation inverse de manière que le point aa' revienne au point mm'. Les plans principaux, au point a, sont le plan du cercle méridien et le plan perpendiculaire au plan vertical mené par $a'o'$. Les axes de l'indicatrice sont, en direction, les intersections du plan tangent en aa' avec ces deux plans principaux. L'un de ces axes est donc perpendiculaire au plan vertical, et sa projection horizontale est la tangente en a au parallèle ; l'autre a pour projection verticale la tangente en a' au cercle méridien, et pour projection horizontale la droite oa. — Parmi toutes les indicatrices finies que nous pourrions choisir et qui sont toutes semblables entre elles, et à l'indicatrice infinitésimale, choisissons une des deux que nous considérons comme les plus simples. On sait (§ 83) que si l'on prend pour un de ses axes a le rayon de courbure R de la section normale principale correspondante, son autre axe b est une moyenne proportionnelle ($b = \sqrt{Rr}$) entre les deux rayons de courbure principaux.

Je prends donc pour longueur du premier axe le rayon du cercle méridien. Comme

cet axe est parallèle au plan vertical, il suffit de porter $a'c' = a'o'$ sur la tangente en a'. Le second axe est moyen proportionnel entre les deux rayons de courbure principaux, c'est-à-dire entre $a'o'$ et $a'\alpha$. Car nous savons que les rayons de courbure principaux r et R, sont (§ 90) les longueurs $a'o'$ et $a'\alpha$. Si donc on décrit sur $\alpha o'$ comme diamètre, une circonférence, et si l'on prend son intersection d_1 avec la tangente $a'c'$, on aura en $a'd_1$ la longueur du second axe de l'indicatrice ($a'd_1 = \sqrt{Rr}$).

Fig. 138.



En portant sur la tangente en a au parallèle une longueur $ad = a'd_1$, on aura en ad la projection du second axe de l'indicatrice. Je fais tourner la figure autour de l'axe X, de manière que le point a vienne en m, et j'ai, en me, mf, les projections horizontales des axes de l'indicatrice. Les diagonales du rectangle construit sur me, mf, seront les projections horizontales mg, mh, des asymptotes de l'indicatrice.

Pour avoir les projections verticales de ces asymptotes, on remarque que gh, parallèle à mf, est une horizontale du plan de l'indicatrice. La projection verticale de cette horizontale est la parallèle à la ligne de terre menée par c', puisque le point cc', dans la rotation, n'a pas changé de hauteur. Les points g et h sont donc projetés verticalement en g' et h', et $m'g'$, $m'h'$ sont les asymptotes de la projection verticale de l'indicatrice.

Si l'on faisait tourner en ee' et ff' les extrémités cc' et d des axes de l'indicatrice au point a, on aurait encore en projection horizontale en me et mf, les axes de l'indicatrice au point m; mais en élévation cela donnerait en $m'e'$ et $m'f'$ deux diamètres conjugués.

En prenant dans les indicatrices ainsi déterminées les directions conjuguées des projections du rayon lumineux qui passe par le point mm', on aura les projections de la tangente à la courbe d'ombre.

Suivant que l'indicatrice sera elliptique ou hyperbolique cela conduira à un tracé différent, mais toujours facile, qui se ramènera au problème suivant :

Une conique étant définie par deux de ses diamètres conjugués, déterminer dans cette conique, mais sans tracer la courbe, la direction conjuguée d'une direction donnée.

§ 107. – Objet d'une épure. – Ombres d'un tore.

Énoncé. – On demande de trouver les ombres propres et autoportées d'un tore, ainsi que ses ombres portées sur un plan qui pourra être le plan horizontal, en supposant les rayons lumineux parallèles entre eux et au plan vertical.

On déterminera directement un point sur un parallèle quelconque, par la méthode des enveloppées coniques ou par celle des enveloppées sphériques et on donnera le tracé de la tangente en ce point, en faisant usage de l'indicatrice.

Les points importants de l'épure seront trouvés directement. Les points de passage seront obtenus : 1° en menant, sur les deux projections de la courbe d'ombre propre, des tangentes parallèles au rayon lumineux. 2° En déterminant directement les rebroussements de l'ombre portée.

L'ombre portée sur le plan s'obtiendra soit en prolongeant les rayons lumineux des points de l'ombre propre trouvés directement, soit en prenant les enveloppes des ombres portées par les parallèles, soit en prenant l'enveloppe des ombres portées par la sphère, de rayon constant, qui, par sa rotation, engendrerait le tore.

L'ombre autoportée se trouvera par la méthode des projections obliques, en se servant de l'ombre portée sur le plan.

En prenant les ombres portées par des parallèles très rapprochées, on verra l'enveloppe de ces ombres accuser des rebroussements, ce qui permettra de vérifier de nouveau les points de passage.

§ 108. – 2e Sujet d'épure. – Représentation et ombres de la surface hélicoïdale connue sous le nom de Serpentin.

(a) *Définition.* – Le serpentin est la surface enveloppe d'une sphère, de rayon constant, qui se déplace hélicoïdalement. Si l'on considère deux sphères infiniment voisines elles se coupent suivant un grand cercle dont le plan est perpendiculaire à la tangente à l'hélice, trajectoire du centre (§ 22), et qui constitue la caractéristique de la surface.

(b) *Représentation de la surface.* – 1° *Hélice trajectoire du centre.* – On se donne sur le plan (fig. B) le cercle A, B, C, D, ... projection de l'hélice trajectoire du centre de la sphère. – On fera bien de prendre huit points par spire pour déterminer cette hélice (sur l'épure cette hélice est dextrorsum). On divise aussi le pas H en huit parties égales et l'on en déduit en A'B'C'..... sur l'élévation les projections verticales des huit points. On peut tracer, dès lors, la sinusoïde, projection verticale de l'hélice. Sur l'épure cette trajectoire du centre est figurée en trait mixte _._._._._.

2° *Contour apparent vertical.* – En élévation, des différents points de la sinusoïde précédente, comme centres, on trace des cercles, qui sont les contours apparents de la sphère mobile. D'après un théorème connu le contour apparent du serpentin sera l'enveloppe des contours apparents de la sphère mobile.

On obtiendra de cette façon une courbe qui sera une développante de la développée de la sinusoïde. Dans les environs des sommets A', E' ..... A'', E'' de la sinusoïde on devra prendre les centres des cercles assez rapprochés ; en traçant alors, avec soin, les arcs de cercle du côté de la partie concave, ces arcs très serrés les uns contre les autres feront apparaître facilement les rebroussements δ' δ' ..... de leur enveloppe. Nous avons vu (§ 99) que ces points servent de passage entre les branches

réelles et les branches virtuelles de la ligne de contact des rayons visuels, c'est-à-dire du contour apparent vertical. On voit en plus grand, fig. D, le détail de ces points de passage. De t en δ' (fig. D) le contour apparent est <u>réel</u> et <u>vu</u>; de δ' en δ'' entre les deux rebroussements, il est virtuel; de δ'' en t, il redevient réel, mais il est caché; enfin de t en S il est réel et vu.

3° *Caractéristique.* – On construit facilement la caractéristique sur la sphère quand elle occupe la position GG', ou GG'', ou CC'...... Au point GG'' la tangente à l'hélice est la droite de front $G''\theta'$. Pour obtenir cette tangente, nous avons (fig. A, en haut de la feuille) construit la sous-tangente $\mathcal{E}'\theta'$, en remarquant que le point θ' est pris au niveau du point E' qui est de un quart de tour en retard sur le point G''. Nous avons donc porté de $\mathcal{E}'$ en θ', une longueur égale au quart de cercle GFE développé. Ce qui se fait soit par le calcul $\left(\mathcal{E}'\theta' = \frac{\pi r}{2}\right)$, soit au compas, en rectifiant une série de très petites cordes inscrites. Dès lors, ayant la tangente $G''\theta'$ à l'hélice, en lui menant $\alpha'G''\beta'$ perpendiculaire on obtient ce que nous nommerons la *caractéristique principale*, projetée en élévation suivant la droite $\alpha'\beta'$. De cette élévation on déduit en $\alpha G \beta$, sur la sphère principale G, l'ellipse projection horizontale de la caractéristique.

Cette caractéristique en se déplaçant hélicoïdalement engendrerait le serpentin.

Il serait facile de découper cette ellipse sur un patron et de la redessiner égale à elle-même, mais avec des orientations différentes sur toutes les sphères-génératrices en projection horizontale. On en déduirait facilement les élévations, en cherchant pour chaque ellipse deux diamètres conjugués, projections verticales des diamètres qui donnent les axes des projections horizontales.

(C) *Ombre propre de la surface* (*Le rayon est à 45°*).

1° *Point de la séparatrice situé sur une caractéristique donnée en projection horizontale.*

Dessinons en O ce que nous nommerons la *sphère centrale*, elle est égale à la sphère génératrice. Cherchons, comme à l'ordinaire, l'ellipse d'ombre propre de cette sphère.(1) Reproduisons de plus à sa surface et dans leurs diverses orientations les ellipses, projections des caractéristiques des huit sphères génératrices que nous considérons en A, B, C........

En réalité, à ces huit caractéristiques des huit sphères ne répondront que 4 ellipses sur la sphère centrale. Ces ellipses seront toutes égales entre elles, et l'on pourrait les tracer avec un patron. Seulement elles auront des orientations différentes.

Cela posé: Soit à trouver le point de la séparatrice situé sur la sphère F.

Déplaçons cette sphère et faisons-la coïncider, en O, avec la sphère centrale. Sa caractéristique prend la position $gf''g$..... et recoupe en f'' et f'' la séparatrice de la sphère centrale.

Remettons en place la sphère, et transportons f'' et f'' en f et f; nous aurons ainsi en f et f des points de la séparatrice.

On voit que cela revient à mener par le point F une corde fFf parallèle et égale à la corde $f''Of''$ qui, sur la sphère centrale est commune à la séparatrice et à la caractéristique transportée.

---

(1) Sur l'épure le rayon est à 45°. On obtiendra donc, fig. E cette ellipse d'ombre propre, ainsi que l'ellipse d'ombre portée sur le plan horizontal, par le tracé simplifié indiqué aux ombres usuelles. Mais si le rayon lumineux était quelconque, on ferait, à part, l'épure des ombres (propres et portées) de la sphère centrale.

Fig. 139.

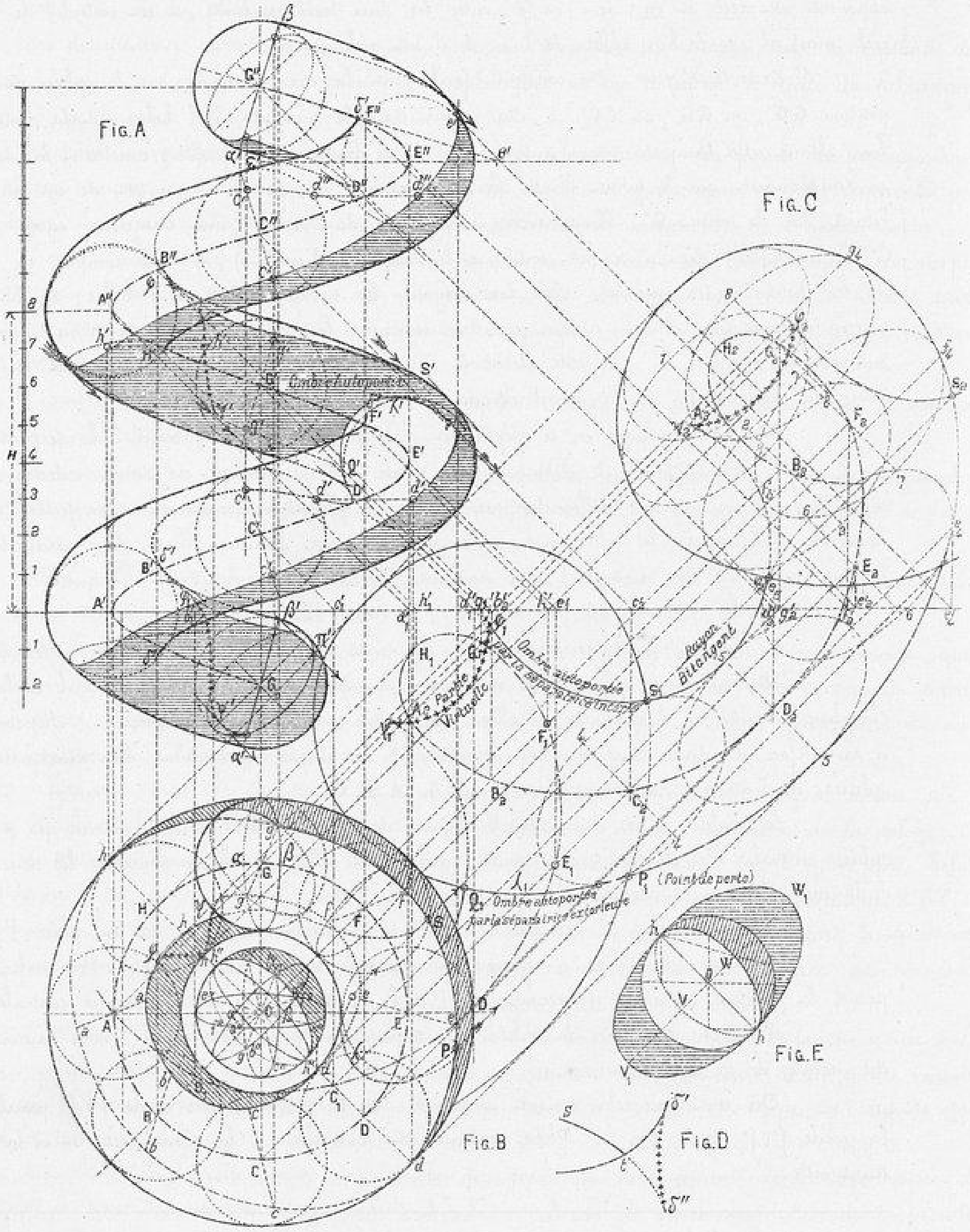


Fig. A
Fig. B
Fig. C
Fig. D
Fig. E
Ombre autoportée
(Point de perte)
Rayon tangent

2° Point de la séparatrice, en élévation. – Le point une fois connu en projection horizontale, on en déduit la projection verticale par la condition que ce point appartient à une sphère donnée. Nous n'avons pas indiqué cette construction très simple. On remarquera que pour la sphère dans la position à 45° D, ou H, on obtient les points d d, ou h h sur le contour apparent horizontal du serpentin. En élévation ces points sont en d'd', et h'h' sur l'horizontale qui passe par les points H' et H'.

3° Points de passage φ et ψ. – Ces points se trouveront naturellement en cherchant entre la sphère A et la sphère G, c'est-à-dire aux environs de la sphère à 45°, H, des points très rapprochés les uns des autres sur la séparatrice. Ces points φ et ψ se reconnaîtront à ce que la séparatrice y a pour tangente un rayon lumineux. D'ailleurs leur position sera vérifiée plus loin en se servant de l'ombre portée sur le sol.

(d) – Ombre portée par la surface sur le plan horizontal.

1° Ombre de l'hélice trajectoire du centre. – On cherche en $A_1 B_1 C_1 D_1$ les traces horizontales des rayons lumineux menés par les points A, B, C, ... de l'hélice, et l'ombre de cette hélice est une courbe $A_1 B_1 C_1$ ..... (tracée en trait mixte) que l'on démontre facilement être une cycloïde.

2° Ombres des sphères. – On cherche (fig. E) l'ellipse h h $V_1 W_1$, ombre portée sur le sol par une sphère égale à la sphère génératrice.

3° Enveloppe des ombres des sphères. – On découpe, dans une feuille de carton, un patron ayant très exactement la forme de l'ellipse précédente, on place le centre de cette ellipse aux points $A_1 B_1 C_1$.. etc. en dirigeant le grand axe à 45° et on suit le contour du patron avec la pointe d'un crayon taillé très fin. Il ne reste plus ensuite qu'à prendre l'enveloppe de toutes ces ellipses pour avoir l'ombre portée totale du serpentin.

4° Points de passage. – Quand on opérera en déplaçant le centre du patron elliptique sur la boucle $F_1 G_1 H_1 A_2$ ...... on verra, comme pour le contour apparent vertical, l'enveloppe présenter deux rebroussements φ_1 et ψ_1 lesquels doivent être les ombres portées des points de passage φ et ψ. – Cela constitue une vérification de ces points et permet, par des rayons lumineux inverses, de les déterminer en φ' et ψ' sur l'élévation.

Nota. – Pour rendre l'épure plus claire nous n'avons pas mis de hachures sur l'ombre portée horizontale et même nous l'avons traitée comme une vue faite par un spectateur placé à la source de lumière, c'est-à-dire en perspective cavalière avec parties vues et parties cachées, ce qui permet de mieux reconnaître les portions de la surface qui sont touchées, en premier, par les rayons lumineux.

(e) Ombres autoportées.

On reconnaît en suivant la branche de courbe $\varphi_1 S_1$ sur l'ombre portée horizontale, que les rayons lumineux qui ont touché la surface le long de sa séparatrice intérieure, donnent une ombre autoportée φS - φ'S'. Le point de départ de cette ombre autoportée est le point de passage φφ' et le point de brisure S_1 remonté par un rayon inverse en SS' sur la séparatrice extérieure en donne le point de perte (avec tangente lumineuse). On fera bien de chercher un ou deux points intermédiaires de cette ombre autoportée.

On voit de même sur l'ombre portée horizontale, qu'à la branche de courbe $Q_1 P_1$ répond une ombre PQ - P'Q' portée sur la surface, mais, cette fois, par la séparatrice

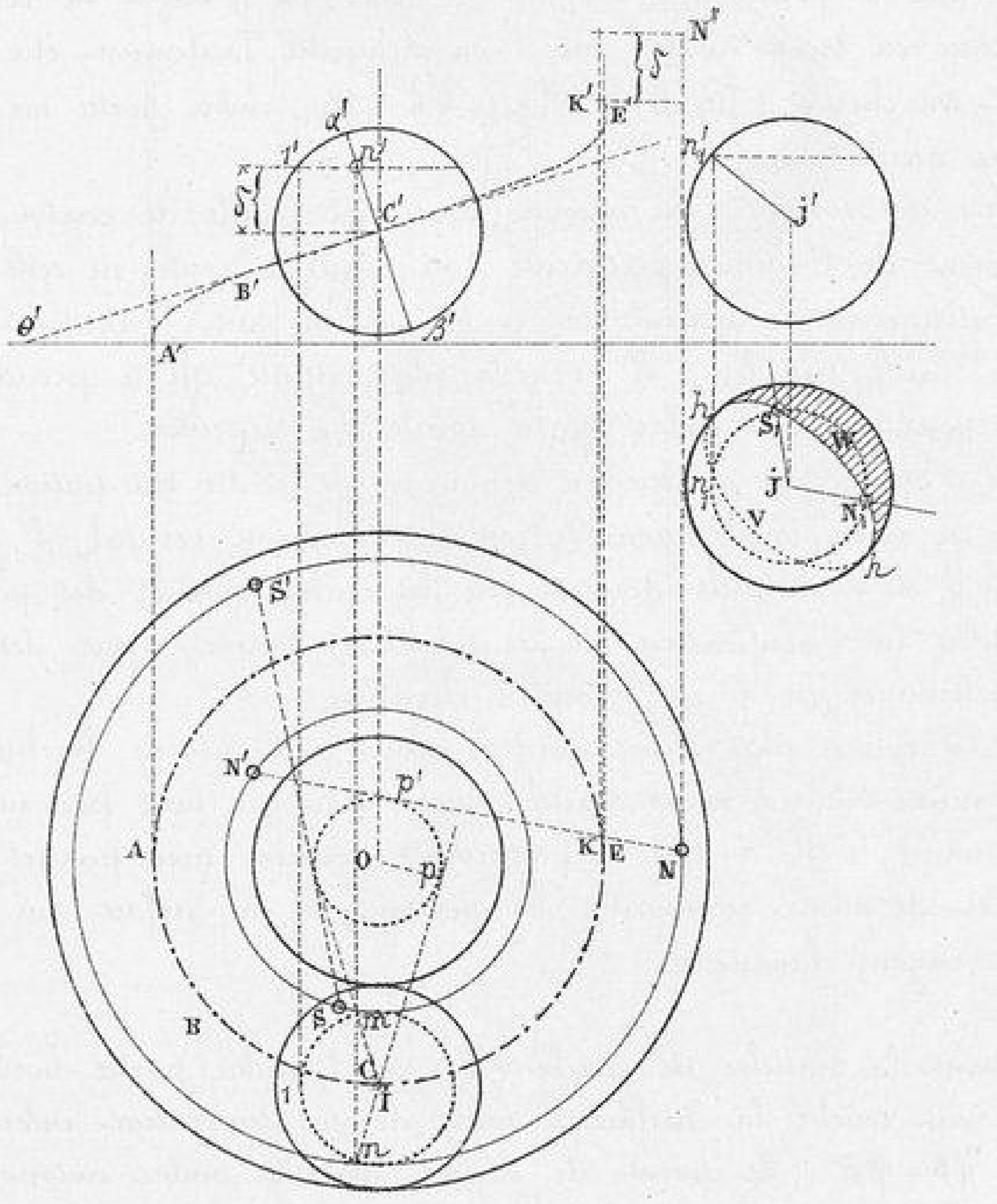
extérieure. – Les points de perte sont P_1 et Q_1 remontés en PP' et QQ'.

Nota. – On a supposé qu'au premier point G_0 et au dernier G'', c'est-à-dire après deux spires d'hélice, le serpentin était terminé par la sphère génératrice. C'est pourquoi on voit en haut et en bas la séparatrice du serpentin se continuer (mais sans raccordement tangentiel) par les séparatrices de ces deux sphères terminales.

§ 109. – Recherche directe d'un point de l'ombre propre situé sur une hélice donnée de la surface. (fig. 140).

Prenons la sphère dans la position principale CC'. – Soit $\alpha'\beta'$ la caractéristique projetée en ligne droite et n' un de ses points. – On aura la projection horizontale n, du point n' en traçant le petit cercle 1,1' de la sphère auquel il appartient. L'hélice qui passerait par le point nn' a pour projection horizontale le cercle nNS.

Fig. 140.



Cela posé : Sur une sphère auxiliaire JJ', égale à la sphère génératrice, traçons d'une part l'ellipse d'ombre propre hWh, et d'autre part le petit cercle $n_1S_1N_1$ reproduction du petit cercle $n1m$ de la sphère principale.

Le petit cercle $n_1N_1S_1$ rencontre la séparatrice en N_1 et S_1 ; à ces points répondent des normales JN_1 et JS_1 sur la sphère auxiliaire.

Or, sur la sphère principale I, la normale nI à cette sphère est aussi normale au serpentin, puisque en n le plan tangent est commun aux deux surfaces. Déplaçons le point n sur son hélice nNS, la normale se déplacera avec lui et fera toujours le même angle avec le plan horizontal. En réalité elle engendrera un hélicoïde gauche quelconque qui aurait pour noyau le cylindre dont la base serait le cercle op, tangent à nI prolongé.

Il y aura un moment où cette normale occupera la position $p'N$ parallèle à la normale JN_1 de la sphère auxiliaire. Alors au point N qui lui correspond sur l'hélice le plan tangent au serpentin est parallèle au plan tangent en N_1 à la sphère auxiliaire ;

il contient donc des rayons lumineux et N est le point cherché de la séparatrice du serpentin.

Il est facile de voir que l'on obtiendra en N' un second point, et deux autres points S et S' en menant des parallèles à l'autre normale JS de la sphère auxiliaire.

Nota. – On fera bien de chercher l'intersection de la surface par un plan horizontal et de résoudre ensuite le problème suivant :

Un point de la surface étant donné par une de ses projections, trouver l'autre projection.

Surfaces topographiques.

Leçon supplémentaire.

§ 110. – Définitions.

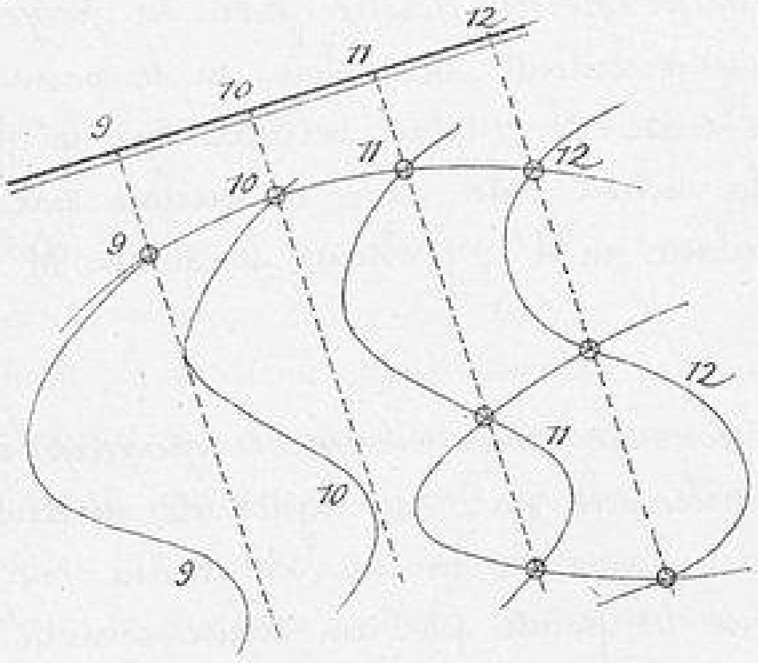
L'étude des surfaces topographiques est le complément de la méthode des projections cotées.

On nomme surfaces topographiques, les surfaces formées par le sol. Généralement elles ne sont rencontrées par une verticale qu'en un seul point.

Les sections horizontales faites dans ces surfaces se nomment des lignes de niveau. On représente les surfaces topographiques par un certain nombre de lignes de niveau équidistantes et cotées. La surface n'est pas ainsi rigoureusement déterminée ; elle ne l'est qu'approximativement. Il en résulte que tous les problèmes concernant les surfaces topographiques ne sont susceptibles que de solutions approximatives.

§ 111. – Déterminer la section faite dans une surface topographique par un plan quelconque.

Fig. 141.



Le plan est défini par une ligne de pente cotée (fig. 141).

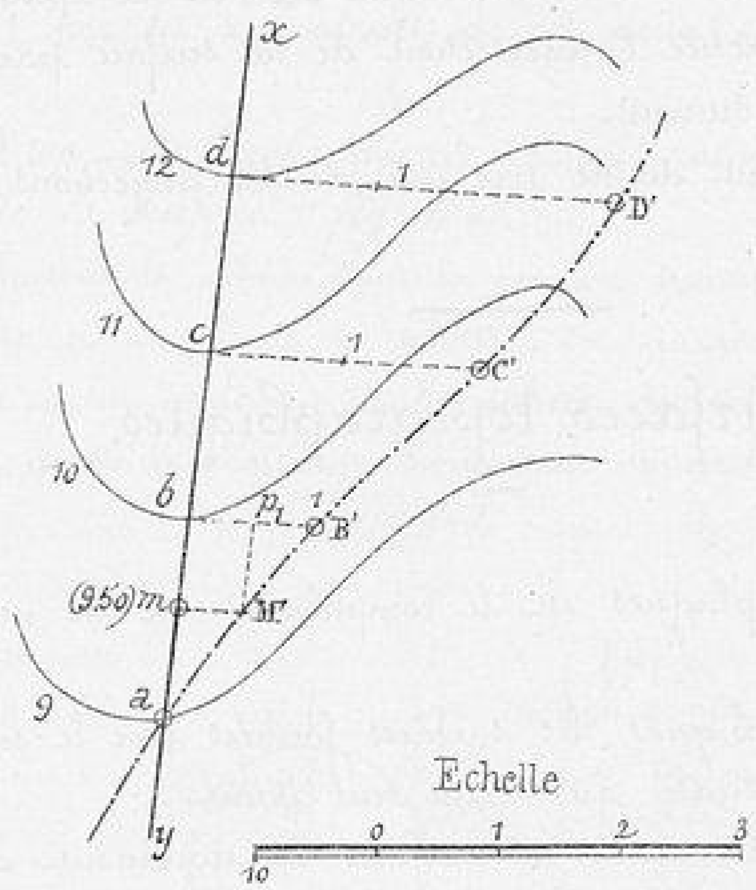
On mène les horizontales du plan dont les cotes sont les mêmes que celles des lignes de niveau de la surface. Les points d'intersection de ces droites avec les lignes de niveau correspondantes sont des points de l'intersection cherchée. On joint ces points par un trait continu, et l'on regarde la ligne ainsi tracée comme la section de la surface par le plan donné.

Supposons (fig. 142) que le plan donné soit vertical et défini par sa trace XY. On peut alors rabattre la section sur un plan horizontal quelconque.

Rabattons, par exemple, sur le plan horizontal coté 9.

Le plan coupe la ligne de niveau (10) en un point b qui se rabat en B_1 tel que bB_1 = l'unité de l'échelle de dessin.

Fig. 142.



Ce plan coupe de même la ligne de niveau (11) en un point qui se rabat en C_1, tel que cC_1 = deux unités de l'échelle du dessin.

On voit comment on obtiendrait les rabattements des points d'intersection du plan avec les autres lignes de niveau, en joignant la suite des points A_1 B_1 C_1...... on aura approximativement le profil de la section.

Pour avoir la position du point de la section ayant une cote donnée, la cote 9,50 par exemple, je prends le milieu p_1 de bB', j'élève en p_1 une perpendiculaire à bB'. Cette droite rencontre le profil de la section en un point M' qui est le point cherché, dont la projection est m.

Si je fait la même construction pour un certain nombre de plans verticaux, j'aurai une suite de points de cote 9,50. En joignant ces points, j'aurai une ligne de niveau comprise entre les lignes de niveau (10) et (9).

Une ligne ainsi comprise entre deux lignes de niveau données s'appelle ligne *intercalaire*.

§ 112. – *Trouver la cote d'un point donné par sa projection horizontale.*

Reportons-nous à la figure précédente 142. Soit m le point donné, je mène par m un plan vertical. Soit XY la trace de ce plan vertical sur le plan horizontal (9).

Je construis le profil de la section faite dans la surface par ce plan, et en élevant ensuite en m une perpendiculaire mM', j'obtiens le point M'. mM' détermine la cote du point m.

§ 113. – *Trouver l'intersection de deux surfaces topographiques.*

Ces deux surfaces sont représentées par des lignes de niveau.

Les points d'intersection des lignes de niveau de même cote sont des points de l'intersection cherchée. On joint tous les points par un trait continu, et l'on obtient ainsi la ligne cherchée.

§ 114. – *Trouver l'intersection d'une surface topographique et d'une droite.*

On mène par la droite un plan quelconque, on cherche l'intersection de la surface

et du plan, et l'on prend les intersections de la droite avec la section ainsi déterminée.

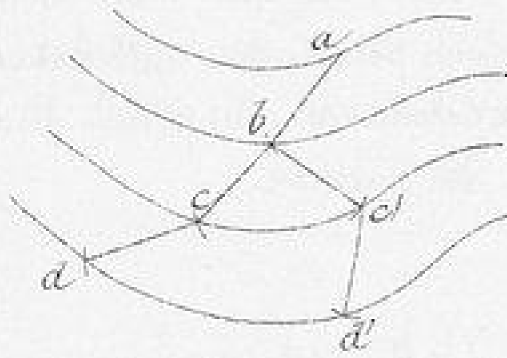
Ce procédé est applicable si au lieu d'une droite on a une courbe quelconque. On mène par la ligne une surface auxiliaire; on cherche l'intersection de cette surface avec la première, et ensuite les points d'intersection de cette ligne avec la ligne donnée.

On choisit de préférence, comme surface auxiliaire un cylindre ayant pour directrice la courbe donnée, et dont les génératrices sont horizontales. Les intersections de ces génératrices avec les lignes de même cote de la surface donnée, servent alors à résoudre facilement le problème.

§ 115. – Lignes d'égale pente.

On appelle ligne d'égale pente d'une surface topographique, une ligne telle que la tangente en chacun de ses points a la même inclinaison sur le plan horizontal; si nous considérons le cylindre vertical qui projette cette ligne, les tangentes font constamment le même angle avec les génératrices. La ligne d'égale pente sera donc une hélice tracée sur ce cylindre. On ne peut tracer qu'approximativement une ligne d'égale pente sur une surface donnée. On ne connaît exactement que les intersections de la surface par des plans horizontaux équidistants, et l'on admet que les cordes d'intersection de la ligne d'égale pente sont également inclinées sur le plan horizontal: comme, du reste, leurs extrémités sont à des niveaux dont la différence est constante, il s'ensuit que les longueurs de leurs projections sont égales. Ainsi, pour tracer de a (fig. 143) une ligne ayant une pente donnée; il suffira de décrire de a un arc de cercle de rayon égal à la projection de la corde qui fait l'angle donné avec le plan horizontal; de chercher son intersection b avec la ligne de niveau suivante; de même pour c et ainsi de suite. On obtient ainsi en général deux directions à partir de chaque point. De b, par exemple, on pourrait prendre la seconde direction bc' au lieu de bc, et l'on aurait obtenu c' en faisant ce que l'on appelle un lacet.

Fig. 143.



§ 116. – Tracer une ligne d'égale pente partant d'un point A, et aboutissant à un point donné L. (fig. 144).

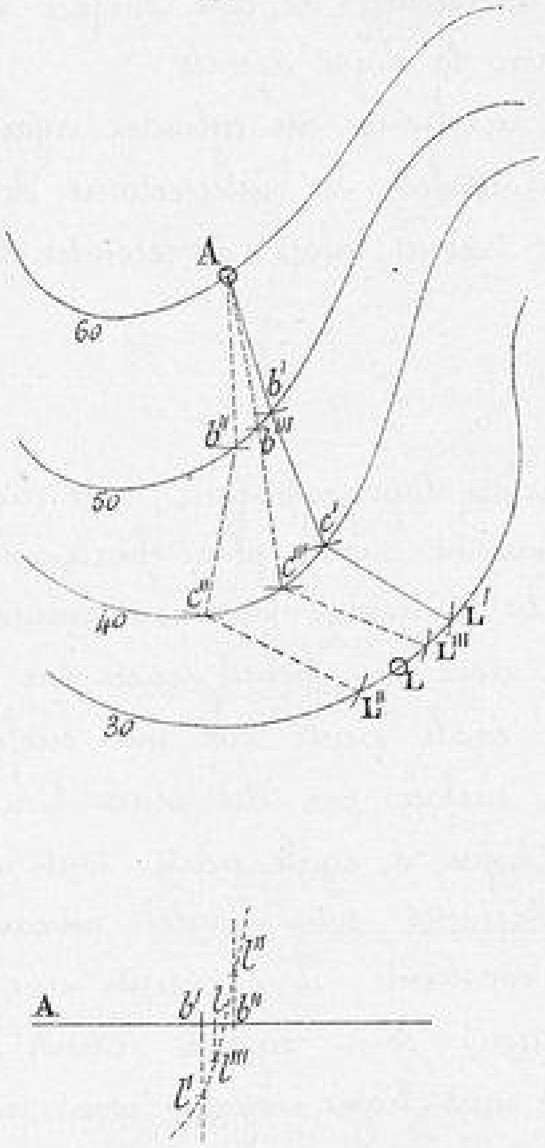
Dans le problème précédent on se donnait une pente déterminée et partant d'un point quelconque a on obtenait facilement un cheminement a b c d, avec ou sans lacets, dont tous les éléments avaient la pente voulue. Mais de cette façon, on ne connaît pas, à priori, le point d ou d' auquel on aboutira.

Dans le problème actuel, on se donne un point de départ A, un point d'arrivée L, et l'on demande avec quelle pente constante il faut cheminer sur la surface et quel chemin il faut prendre pour aller de A en L.

On connaît la distance AL en ligne droite et la différence des cotes des deux points A et L; on connaît donc à peu près la pente qu'il faudra choisir pour arriver près de L.

Soit p cette pente approximative.

Fig. 144.



On en déduit approximativement un intervalle Ab' que l'on prendra comme rayon ; on sait que l'on a : $i = Ab' = \frac{1}{p}$; avec ce premier rayon et en procédant comme au § 115, on arrivera à un point L' voisin de L. On conclut de ce premier essai que l'on avait pris un rayon trop petit. On l'augmentera un peu et pour un second essai on arrivera en un point L'', qui n'est pas encore le point L. Cette fois nous avions pris un rayon trop grand.

Pour déduire de ces deux essais le véritable rayon, portons maintenant sur une droite AX à partir d'un point quelconque A, les longueurs Ab', Ab'', Ab''', égales aux rayons d'essai, et des points b', b'', b''', élevons des ordonnées égales aux erreurs LL', $L'L''$, en ayant soin de les porter positives quand les erreurs à l'arrivée sont commises d'un côté du point donné L et négatives quand elles sont de l'autre côté. La courbe formée par les points $l'l''l'''$ ainsi obtenus, est ce que l'on nomme une courbe d'erreur ; on prend son intersection avec la droite AX, et la distance du point A au point d'intersection donne la longueur du rayon qui répond à la question.

§ 117. – Lignes de plus grande pente.

On nomme ligne de plus grande pente une ligne telle qu'elle ait pour tangente en chacun de ses points la ligne de plus grande pente du plan tangent en ce point, ce sera donc la trajectoire orthogonale des lignes de niveau.

Une goutte d'eau qui, partant du repos, coulerait sur une surface topographique, suivrait dans le premier moment, une ligne de plus grande pente. Dans la suite sa vitesse acquise se combinant avec celle qu'elle tend à prendre en chaque point, fait que la véritable trajectoire d'une goutte d'eau n'est pas une ligne de plus grande pente.

Quand la surface est à courbures opposées et que le plan tangent est horizontal, on a ce que les topographes appellent un col.

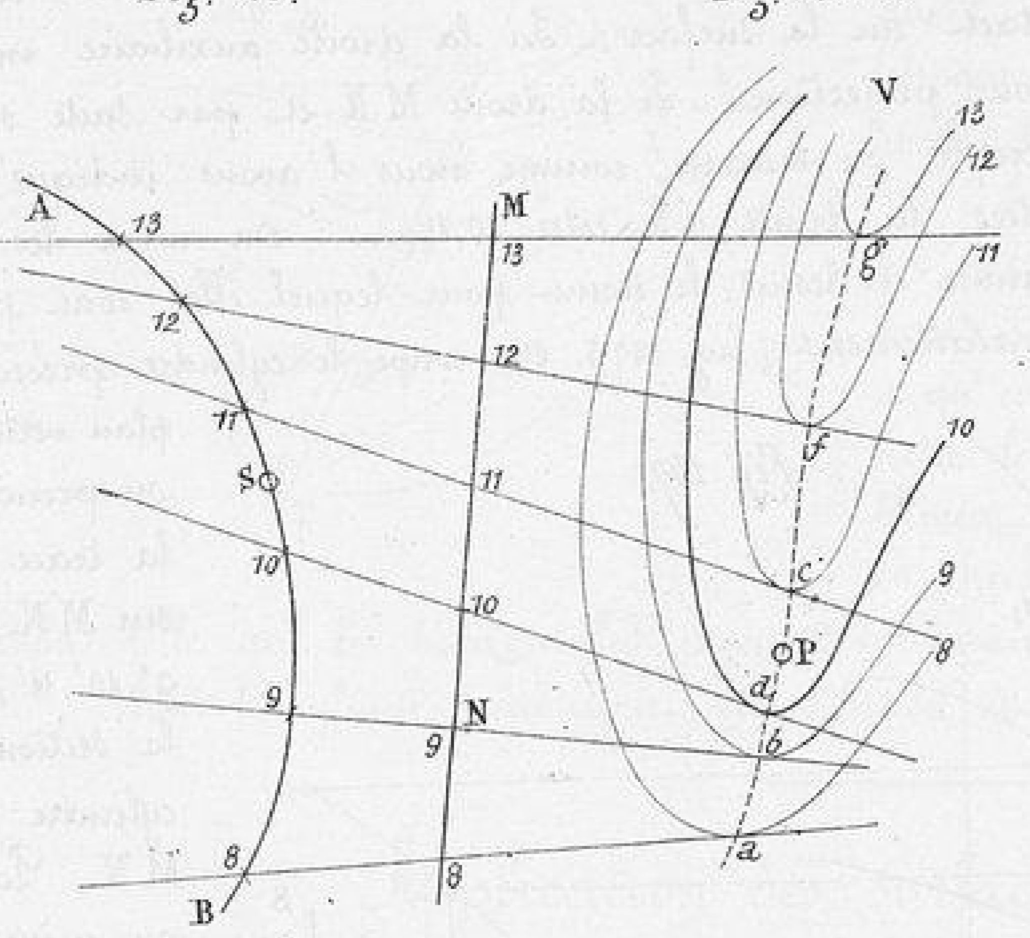
§ 118. – Problème. – Mener un plan tangent à une courbe cotée et passant par une droite donnée (fig. 145).

Joignons les points de même cote, sur la droite MN et sur la courbe ; nous obtenons ainsi des horizontales s'appuyant à la fois sur la droite et sur la courbe ; nous les considérerons comme les génératrices d'un conoïde dont le plan directeur serait le plan horizontal. – Si l'on connaissait le point de contact sur la courbe, en ce point, le plan tangent au conoïde serait le même qu'au

point de la génératrice situé sur la droite.

Mais d'après une remarque faite à propos du conoïde § 62, c'est ce qui caractérise une génératrice singulière, c'est-à-dire une génératrice telle que la génératrice infiniment voisine lui soit parallèle.

Fig. 145. Fig. 145 bis.

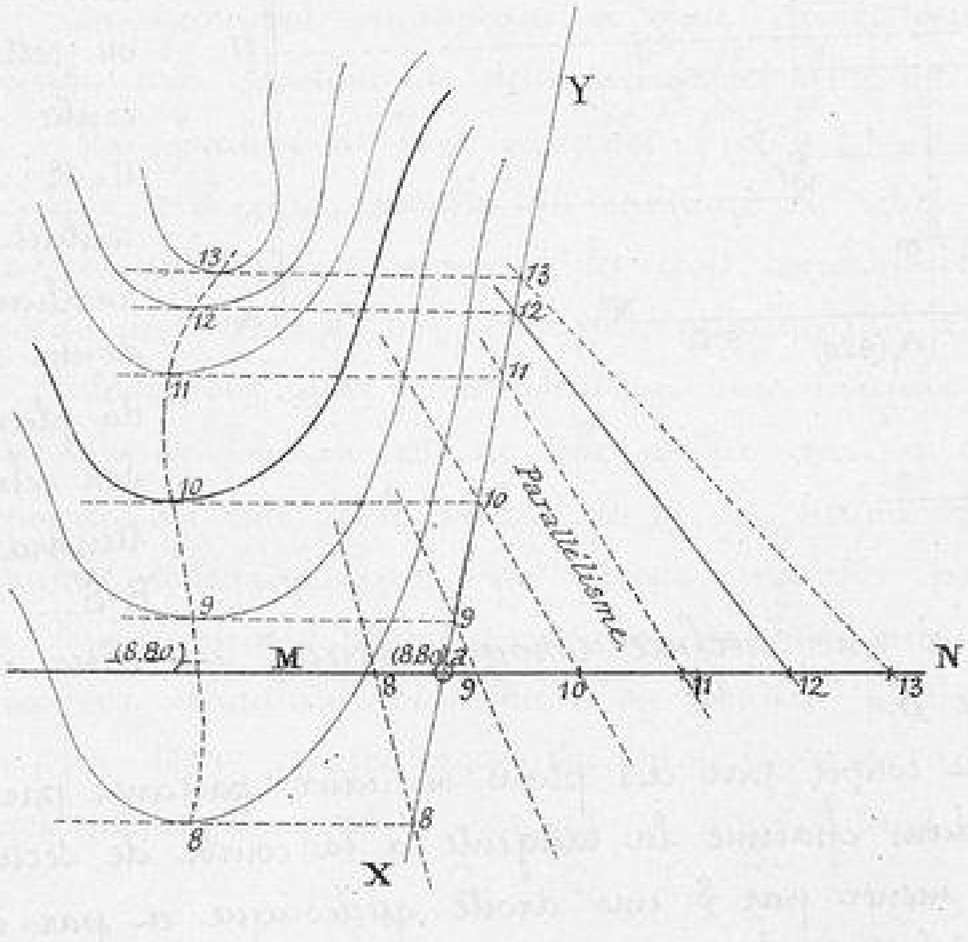


Il suffira de voir pour quelle cote deux génératrices voisines seront sensiblement parallèles ; le point de contact se fera entre les deux points correspondants de la courbe. Ici le point cherché est approximativement à la cote 10,50, entre les deux horizontales parallèles 10 et 11.

§ 119. – Mener par une droite donnée, MN, un plan tangent à une surface topographique V, déterminée par ses lignes de niveau. (fig. 145 bis.)

La solution est tout à fait analogue. Pour avoir le plan tangent, on mène par les points de la droite des tangentes aux courbes de même niveau, et on cherche parmi ces horizontales celles pour lesquelles on a sensiblement des droites parallèles. – Ici les droites sont parallèles entre 10 et 11. Le point de contact est sensiblement le point P. (10;50).

Fig. 146.



§ 120. – Même problème : La droite donnée est horizontale. La construction précédente n'est plus applicable.

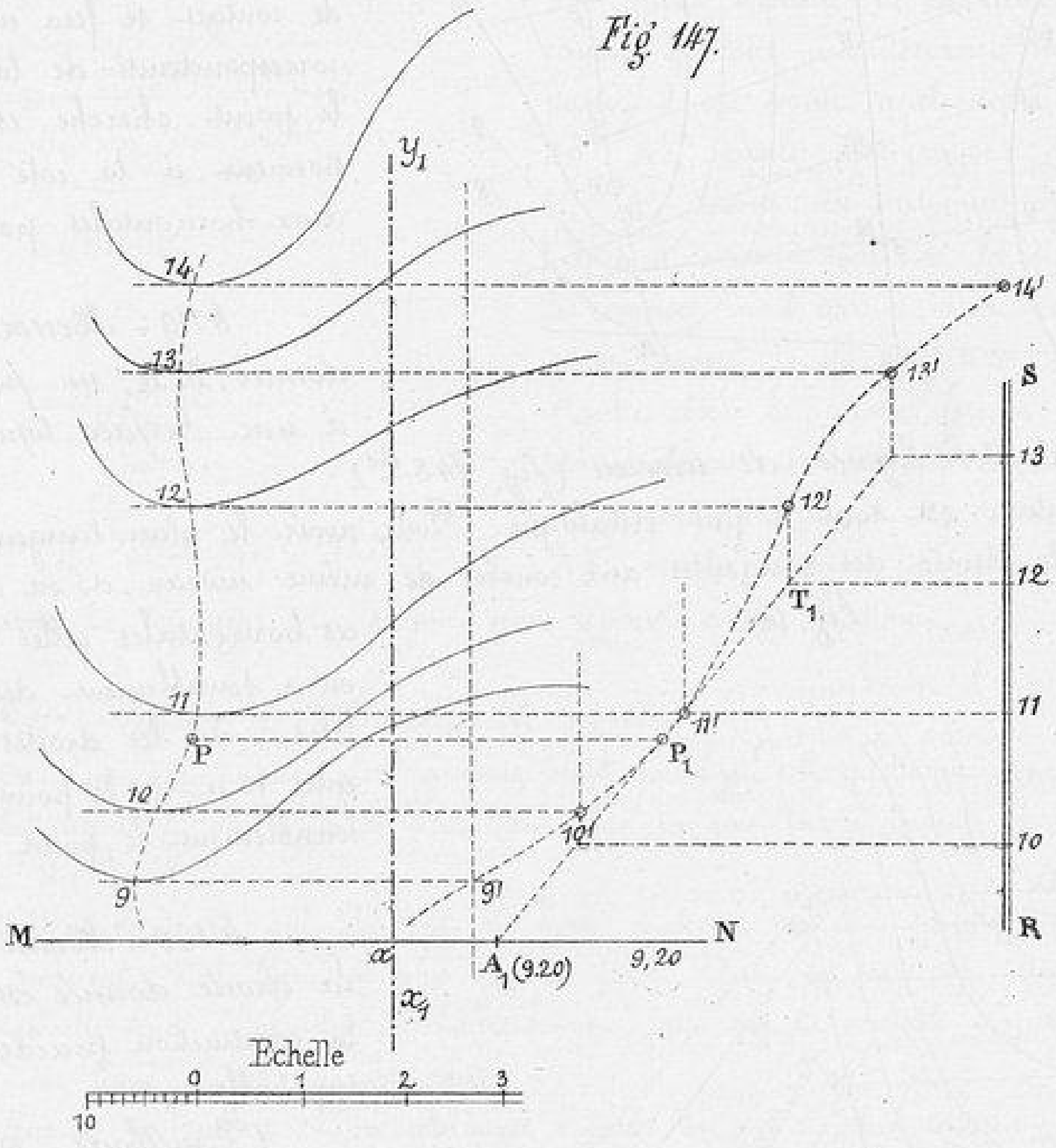
1ère méthode. – On mène alors (fig. 146) des tangentes aux courbes de niveau, parallèles à la ligne donnée ; elles déterminent un cylindre circonscrit à génératrices horizontales. Le plan tangent mené à ce cylindre sera tangent à la surface. Pour le déterminer, faisons une section dans ce cylindre par un plan vertical XY ; ce plan rencontre la droite en un point a, et il coupe le plan tangent demandé suivant une droite qui doit être tangente à l'intersection. – Or, quelle que soit la droite qu'on mène par a,

si par cette droite on mène un plan tangent à la courbe d'intersection, on aura toujours le même point de contact.

Menons alors par a une droite que nous cotons, et le problème est ramené au cas précédent, ayant le point de contact sur la courbe, la génératrice correspondante donnera le point de contact sur la surface. - Ici la droite auxiliaire menée par a a été prise ayant MN pour projection. - Si la droite MN et par suite si le point a a pour cote 8,80, par exemple, on tracera, comme nous l'avons indiqué dans la méthode des projections cotées, la droite aN, cotée 10, 11...... On mène les droites 10-10' 11-11'..... et on cherche comme ci-dessus le point pour lequel elles sont parallèles.

2e méthode : Par rabattement (fig. 147). On coupe le cylindre précédent par un plan vertical X_1Y_1 dont on prend, de préférence, la trace perpendiculaire sur MN. On rabat en 9', 10', 11', 12'.... et en A_1 la section faite sur ce cylindre et sur la droite MN. Par le point A_1 on mène une tangente A_1T_1 à cette section, et l'on a en P_1 le point de contact, donnant en P_1P la génératrice de contact. - Le point P où cette génératrice rencontre la ligne 9-10-11-12...... des points de contact du cylindre auxiliaire et de la surface, donne le point de contact du plan tangent cherché. Son échelle de pente s'obtiendra facilement en RS.

Fig. 147.



§ 121. - Circonscrire à une surface topographique un cône ayant pour sommet un point donné S.

1ère Méthode. - On peut couper par des plans verticaux passant par le point S, rabattre les sections et déterminer dans chacune la tangente à la courbe de section.

2e Méthode. - On peut mener par S une droite quelconque et par cette droite un plan tangent à la surface (§ 119) ; le point de contact est un des points cherchés ; en faisant varier la droite, on aura autant de points que l'on voudra, de la courbe de contact.

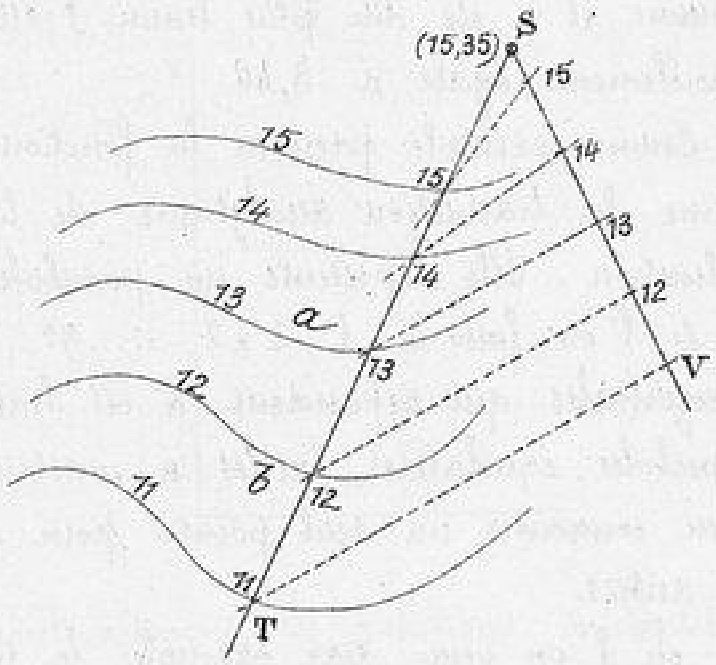


Fig. 148.

3e Méthode. – Prenons une seule droite auxiliaire SV. Cotons cette droite, et par elle, menons des plans tangents aux diverses sections que l'on peut faire par des plans verticaux tels que ST, passant par S, problème que nous avons déjà traité.

Si l'on veut avoir un point de contact sur une certaine zone ab, on fait tourner la droite ST, trace de la section verticale, jusqu'à ce qu'en joignant les points de même cote entre les limites ab, on ait des droites sensiblement parallèles. Dans le cas de la figure, on cherchera à donner au plan vertical une position telle que les horizontales 12 et 13 deviennent parallèles.

Pour le cylindre circonscrit, la solution est tout à fait analogue.

Application des surfaces topographiques à la représentation des tables et à l'exécution des calculs par les méthodes graphiques.(1)

§ 122. – Principe de la méthode.

La géométrie analytique à deux dimensions donne le moyen de représenter par une courbe une fonction de deux variables $f(x \cdot y) = 0$.

Une fonction de trois variables $f(x \cdot y \cdot z) = 0$ serait représentée par une surface et l'on conçoit que, s'il était possible de construire en relief cette surface et de disposer de moyens de mesure très exacts pour apprécier les trois coordonnées d'un point, la connaissance de deux des coordonnées x et y par exemple, entraînerait celle de la troisième z.

Convenons que x représentant une largeur et y une profondeur, z indique une hauteur. Si la fonction est de telle nature que, à des valeurs déterminées de x et de y, ne réponde qu'une seule valeur de z, la surface $f(x \cdot y \cdot z) = 0$ pourra être assimilée à une surface topographique, qui n'est rencontrée par une verticale qu'en un point. Cette surface topographique sera représentée, graphiquement, par des courbes de niveau que l'on rapprochera d'autant plus que l'on voudra plus de précision. En réalité ces courbes de niveau (fig. 149) représenteront les projections horizontales des sections faites dans la surface par des plans horizontaux menés à des hauteurs déterminées.

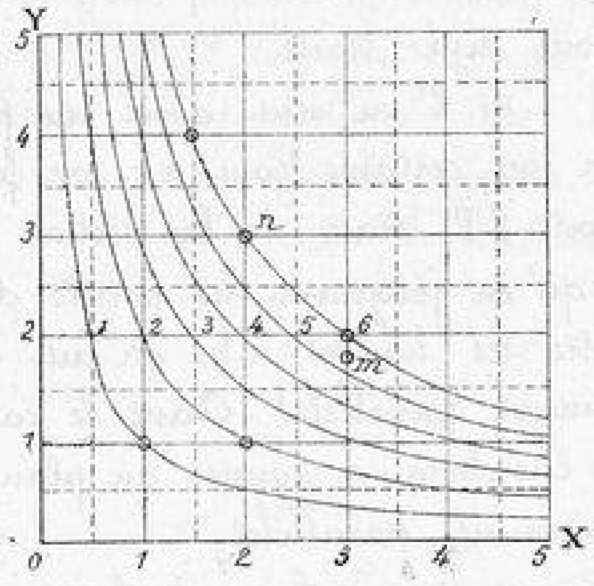
$$z = z_0, z_1, z_2, z_3 \ldots\ldots\ldots$$

---

(1) Les méthodes graphiques de calcul n'ont été rendues réellement pratiques qu'après les travaux de M. L. Lalanne, Inspecteur Général des Ponts & Chaussées, et grâce à l'introduction qu'il y a faite des anamorphoses géométriques.

Si à l'aide de cette table graphique on veut la valeur de z qui répond à des valeurs données $x = 3$, $y = 1.80$ par exemple des autres coordonnées, on prend le point m répondant à $x = 3$ et $y = 1.80$ et l'on calcule comme il a été dit plus haut § 112 la cote de hauteur du point M (Ici cette cote est sensiblement égale à 5,40.

Fig. 149.



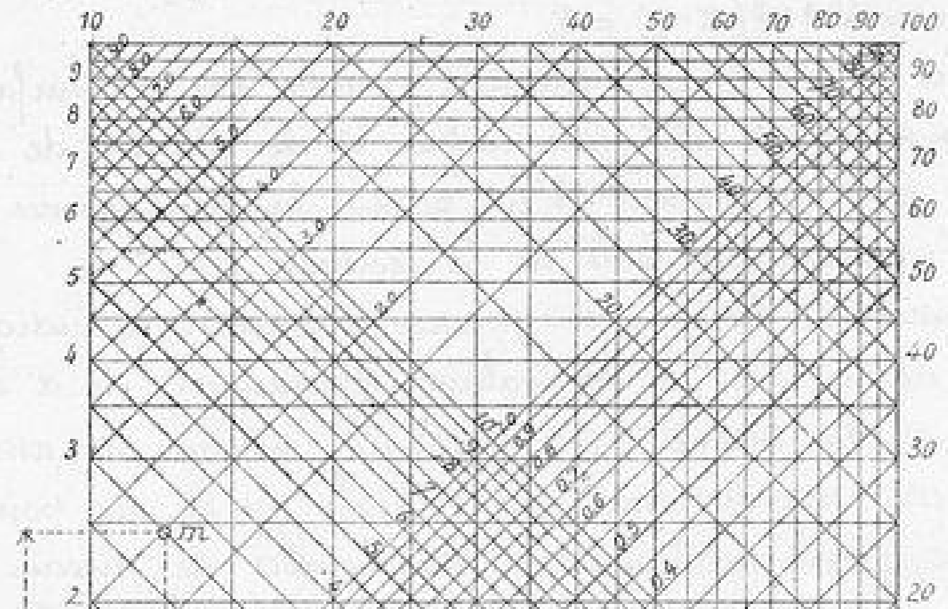
Comme exemple prenons la fonction $Z = xy$, laquelle donne la traduction analytique de la table de multiplication. Elle représente un paraboloïde hyperbolique et si l'on fait $Z = 1$, $Z = 2$ ......&c., les diverses sections horizontales qui répondent à ces hauteurs sont des hyperboles équilatères, faciles à construire, car il suffit d'en connaître un seul point pour en déduire tous les autres.

Si l'on veut, par exemple, le produit 3×2, on prendra le point n dont l'abscisse est 2 et dont l'ordonnée est 3 et on reconnaîtra qu'il tombe sur la courbe de niveau coté 6.

§ 123. – Anamorphoses.

Les courbes précédentes sont pénibles à tracer et il serait bien préférable de leur substituer des lignes droites. C'est ce qui a conduit M. Lalanne à imaginer ce qu'il nomme des anamorphoses. Ces anamorphoses consistent à substituer aux variables z, x et y, des fonctions z' x' y' de ces variables qui soient telles que la fonction $Z = f(x \cdot y)$ se transforme en une fonction $Z' = \varphi(x' \cdot y')$, qui soit linéaire.

Fig. 150.



Dans le cas actuel de la fonction $Z = xy$ posons $z' = \log. Z$, $x' = \log. x$, $y' = \log. y$, la fonction anamorphosée devient :

$$z' = x' + y'.$$

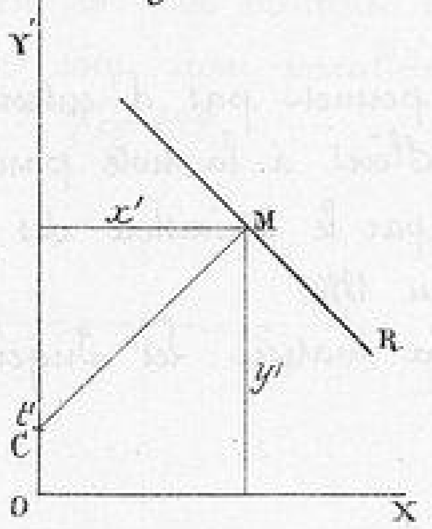
Alors au lieu de porter sur les axes ox et oy des longueurs égales entre elles et représentant les nombres 1, 2, 3, 4 ...... on y porte des longueurs inégales mais proportionnelles aux logarithmes de ces nombres. On dit alors que les coordonnées sont graduées. On obtient ainsi l'abaque à transversales représentée dans son ensemble sur la figure 150.

On voit, fig. 151, le diagramme figuratif des relations fondamentales entre les cotes des quatre cours de lignes de l'abaque. Une ligne telle que MR, perpendiculaire sur la bissectrice des axes, a pour équation

$x'+y'=z'$. Elle répond à la relation primitive,

$$(1)\quad z = xy \quad \text{de la figure 149.}$$

Fig. 151.



Une droite telle que MC, parallèle à la bissectrice des axes a pour équation : $y' = x'+t'$,

d'où l'on déduit, $\log. y = \log. x + \log. t$,

et $\log. t = \log. y - \log. x$, et $t = \frac{y}{x}$.

Les transversales telles que CM, seraient les lignes de niveau d'une autre surface topographique traduisant par anamorphose, la fonction :

$$(2)\quad t = \frac{y}{x}.$$

Éliminant de toutes les manières possibles une des quatre quantités x, y, z et t entre les équations 1 et 2, nous obtenons les relations suivantes, répondant aux opérations arithmétiques consignées au tableau ci-dessous :

Tableau des opérations possibles.

Produits $\begin{cases} z = xy \\ z = tx^2 \end{cases}$, $\quad y = tx$.

Quotients $\begin{cases} x = \frac{z}{y} \\ z = \frac{y^2}{t} \end{cases}$, $\quad \begin{matrix} t = \frac{y}{x} \\ t = \frac{z}{x^2} \end{matrix}$

Racines carrées. $y = \sqrt{zt}$, $\quad x = \sqrt{\frac{z}{t}}$

Soit M (fig. 151) un point qui est la projection horizontale d'un point distinct de chacune des surfaces topographiques t' et z'. Il passe une ligne de niveau z' et une autre ligne de niveau t', qui, sauf exception, n'ont pas la même cote.

Il y a donc une verticale donc le pied est en M, et qui recoupe les deux surfaces t' et z' à des hauteurs différentes ; mais entre les quantités x' y' z' et t' il existe des relations qui entraînent pour les quantités x y z et t, dont elles sont les anamorphoses, une quelconque des équations consignées au tableau. C'est ainsi que l'on aura la relation :

$$y^2 = zt \quad \text{ou } y = \sqrt{zt}.$$

Ce qui se traduirait en disant que le produit des deux hauteurs de la verticale du point M, est égal au carré de l'abscisse de ce point.

Par conséquent, soit à trouver la valeur de l'expression $\sqrt{2\times 3}$.

On prend sur la surface t, la ligne de niveau cotée 2, $(t=2)$ sur la surface z, la ligne de niveau coté 3 $(z=3)$ ce qui donne sur l'abaque, (fig. 150) un point de croisement m, dont l'ordonnée y, paraît être 2,45 ; on a $2{,}45 = \sqrt{2\times 3}$.

Le calcul exact aurait donné 2,449.

Si l'on prend la relation $x^2 = \frac{z}{t}$, d'où $x = \sqrt{\frac{z}{t}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, l'abaque donne pour l'x du point m, une longueur sensiblement égale à 1,23 ; ce qui est très sensiblement la valeur de $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

M. Lalanne indique dans le mémoire qui accompagne l'abaque à transversales, comment cet ingénieux tableau graphique permet de trouver les puissances fractionnaires d'un nombre quelconque.

L'étendue restreinte de ces leçons ne nous permet pas d'entrer dans plus de détails sur cette intéressante question. Nous renvoyons les Élèves à la note parue sous le titre de « Méthodes graphiques » dans le catalogue publié par le Ministère des Travaux publics à l'occasion de l'Exposition universelle de Melbourne, en 1880.

Cette notice constitue un véritable traité de la matière. Les Ingénieurs auront, dans beaucoup de cas, à en tirer un très grand parti.

Éléments de Topographie.

§ 124. - Définition de la Topographie.

La Topographie est l'art de construire et de dessiner, au moyen de certaines conventions, une représentation exacte d'une portion de la surface de la terre avec tous les objets naturels ou artificiels qui s'y rencontrent. Le dessin topographique est une figure semblable à la projection horizontale du terrain.

§ 125. - Échelle.

(a) L'échelle est le rapport constant qui existe entre les longueurs horizontales sur le terrain et leurs homologues sur le plan.

Dans le dessin on traduit ce rapport par une ligne droite à laquelle on donne par extension le nom d'échelle et sur laquelle est figurée une série de longueurs égales à l'unité, réduites à l'échelle du plan. Nous avons indiqué plus haut sa construction à l'occasion des projections cotées.

(b) *L'échelle détermine les détails à représenter et les procédés de lever.*

On admet, que sur un dessin, une longueur de $\frac{1}{8}$ de millimètre est inappréciable à l'œil. Par conséquent, il sera inutile de s'inquiéter, dans un lever, des objets dont les dimensions, réduites à l'échelle du dessin auront moins de $\frac{1}{8}$ de millimètre. Il sera de même inutile d'employer pour les levers, des instruments donnant les longueurs, à une quantité près qui, réduite à l'échelle du plan, sera inférieure à $\frac{1}{8}$ de millimètre.

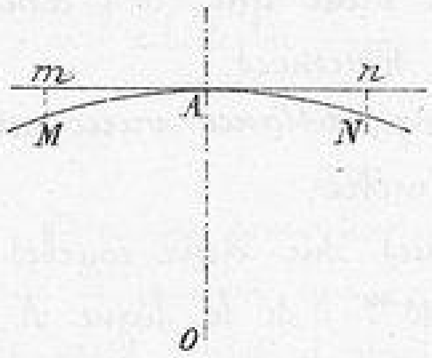
Par un calcul bien simple, il est facile de déduire de là les erreurs que l'on peut suivant l'échelle, commettre sans inconvénient, soit sur une longueur, soit sur un angle, et de choisir, en conséquence, les instruments plus ou moins expéditifs dont on pourra se servir dans le lever.

§ 126. - Méthode de projection.

On n'emploie que la projection horizontale et les cotes sont indiquées par des nombres écrits près des points ou des courbes de niveau que l'on veut coter.

En topographie, la portion MN de la surface de la terre que l'on veut représenter est toujours assez restreinte, et voisine du plan tangent mn mené à la terre au point moyen A de cette région. C'est le plan tangent qui est pris comme plan de projection. Les projetantes telles que Mm, – Nn sont donc parallèles à la verticale AO du point moyen A. Le dessin topographique est donc une réduction à l'horizon des côtés et des angles qu'on obtiendrait en joignant par des droites les points caractéristiques du terrain.

Fig. 152.



La géodésie a donné les points dits de 1er ordre, sommets de très vastes polygones formant le réseau géodésique d'une contrée.

Dans ce réseau géodésique, on opère une nouvelle triangulation, à mailles plus serrées, avec des sommets dits de 2e ordre, bien choisis, faciles à voir et à retrouver et ayant des garanties de longue durée. C'est alors que dans ces triangles de 2e ordre on vient opérer topographiquement en projetant sur le plan tangent au point moyen de ces triangles. – Cette opération topographique nécessite le choix de nouveaux points dits de 3e ordre, et la création de nouveaux triangles; mais on les relève à l'aide de procédés plus expéditifs, dans le détail desquels nous n'entrerons pas, car ils feront l'objet d'un cours spécial.

Il est même facile de voir que si la plus grande dimension du polygone qui fait l'objet de la carte topographique n'excède pas 100 kilomètres, et si on en fait le dessin à l'échelle de $\frac{1}{20.000}$e, les erreurs maxima de niveau Mm commises en supposant la terre exactement plane dans cette étendue, erreurs ramenées à l'échelle, ne dépassent pas l'erreur de 1/5 de millimètre que l'on commet involontairement dans le dessin de la carte.

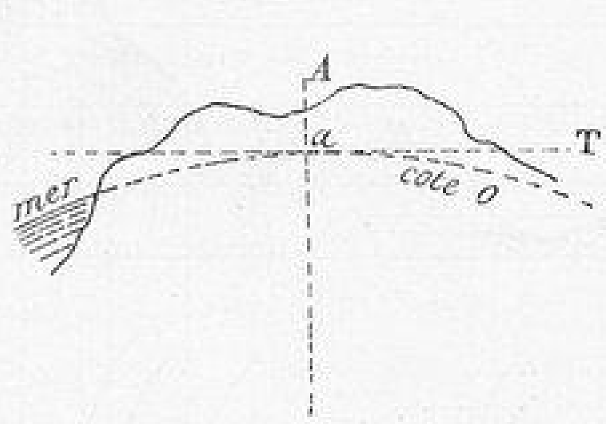
§ 127. – Planimétrie – Nivellement.

La Planimétrie est la réduction à l'horizon des longueurs et des angles du terrain.

Le Nivellement a pour but de déterminer les hauteurs relatives des différents points au-dessus d'un même plan horizontal de comparaison.

On prend pour surface de comparaison la surface du niveau moyen des mers prolongée par la pensée à travers les terres jusqu'au-dessous de la verticale Aa qui passe par le point moyen de la région que l'on veut représenter. Le plan horizontal de comparaison, de cote 0, est donc le plan aT, tangent en a, au sphéroïde de mer moyenne supposé prolongé jusqu'au-dessous de A.

Fig. 153.



Les procédés de nivellement seront indiqués dans un cours spécial.

§ 128. – Lignes de niveau. – Lignes de pente. – Equidistance.

Le terrain une fois relevé et nivelé, est figuré à l'aide de ses lignes de niveau et souvent aussi à l'aide de lignes de pentes plus ou moins espacées, comme nous le dirons plus loin.

Les lignes de niveau ont des différences d'altitude qui sont constantes, et ces différences d'altitude se nomment l'Équidistance.

Cette équidistance doit évidemment varier avec l'échelle du dessin, et lui être pour ainsi dire inversement proportionnelle.

Ordinairement, à l'échelle de $\frac{1}{1000}$, l'équidistance est de 10 mètres.

On nomme Équidistance graphique, la longueur vraie qui, à l'échelle du dessin représenterait l'équidistance réelle de deux courbes de niveau successives.

Ainsi, par exemple, à l'échelle de $\frac{1}{10.000}$, si l'équidistance vraie est de 10 mètres, l'équidistance graphique sera $10 \times \frac{1}{10.000} = 0^{m},001$ soit 1 millimètre.

Soient A et B deux points dans l'espace, situés sur deux courbes de niveau successives et par conséquent dont les cotes diffèrent de 10^{m}; si la ligne AB est inclinée à 45°, c'est-à-dire à une pente $p = \frac{100}{100}$, les points a et b, en projection, seront à 10^{m} en réalité, et en dessin à $0^{m},001$.

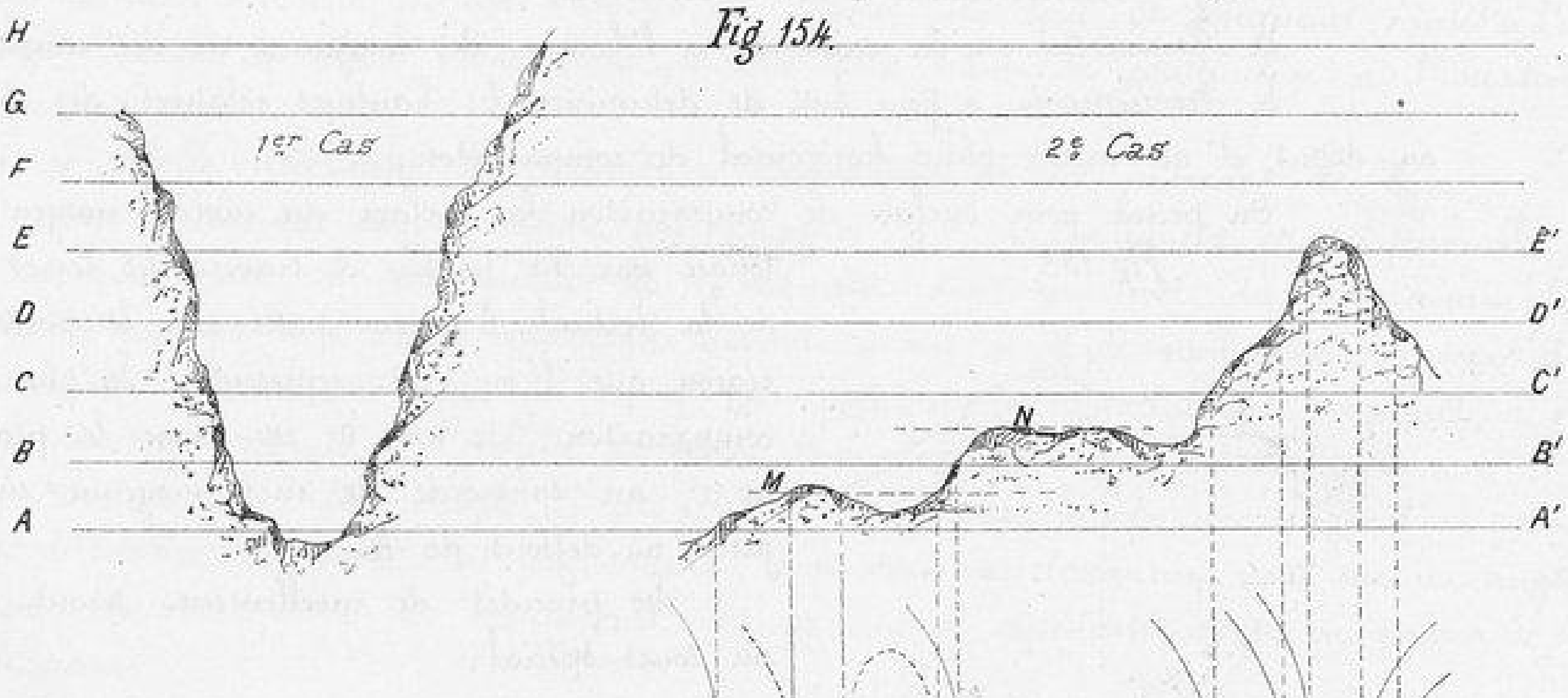
La longueur a b sera donc égale à l'équidistance graphique.

Il est des cas, où dans une même carte, il faut adopter des équidistances différentes suivant les régions que l'on veut représenter.

Supposons en effet (1er cas) que nous ayons une région montagneuse, à pentes rapides. Si l'on fait des sections horizontales A, B, C, D, de 10^{m} en 10^{m}, par exemple, on rendra compte d'une manière bien suffisante de tous les mouvements de terrain, et de plus, les courbes en projection, seront tellement rapprochées qu'en les multipliant davantage on arriverait à la confusion.

Prenons les mêmes plans horizontaux A' B' C'...... dans une région plus plate (2e cas). Nous aurons des plis de terrain, tels que M et N...... qui échapperont aux plans sécants et qui ne seront pas accusés sur la carte.

Fig 154.



On devra donc dans ce second cas intercaler des courbes de 5ᵐ en 5ᵐ et même de 2ᵐ,50 en 2ᵐ,50, mais seulement dans les parties peu accidentées, où d'ailleurs, les lignes principales, celles de 10ᵐ en 10ᵐ sont largement espacées. On tracera ces lignes intercalaires, soit en ponctué, soit en trait discontinu pour éviter la confusion.

Le Dépôt de la Guerre, en France, a adopté pour l'équidistance vraie dans les levers, les nombres suivants, donnant les équidistances graphiques suivantes:

à l'échelle de $\frac{1}{10,000}$, 2ᵐ,50 —— équidistance graphique = $\frac{2,50}{10,000}$ = 2ᵐᵐ,5.

$\frac{1}{20,000}$, 5ᵐ,00 —— ....id............ = $\frac{5^m}{20,000}$ = 2ᵐᵐ,5.

$\frac{1}{40,000}$, 10ᵐ,00 —— ....id............ = $\frac{5^m}{40,000}$ = 2ᵐᵐ,5.

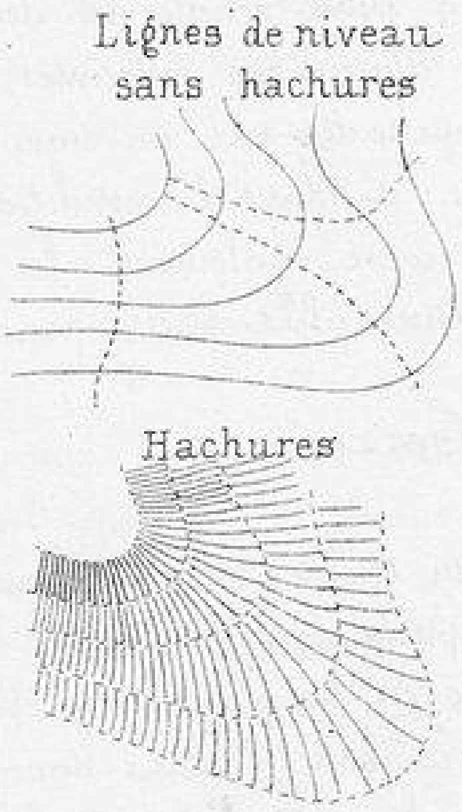
Avec ces conventions, on voit que l'équidistance vraie est prise égale à $\frac{1}{4000}$ de dénominateur de la fraction qui représente l'échelle et que l'équidistance graphique est la même pour toutes les cartes faites d'après ce principe, de telle sorte que sur tous les levers du dépôt de la Guerre, une pente de 45° est marquée par une distance horizontale de 2ᵐᵐ,5 comptée sur la carte. On verrait facilement que dans ce système une même pente est marquée par une même distance horizontale quelle que soit l'échelle de la carte.

Sur les cartes gravées, l'équidistance a été prise égale à $\frac{1}{2000}$ du dénominateur de la fraction qui donne l'échelle. Ainsi pour la carte à $\frac{1}{80,000}$ l'équidistance est de $\frac{80.000}{2000}$ soit 40 mètres.

§ 129. – Dessin des Cartes.

(a). *Lignes de niveau. – Lignes de pente.* – Dans le dessin des cartes topographiques, on utilise à la fois les lignes de niveau et les lignes de plus grande pente. Les premières suffisent pour tous les travaux des Ingénieurs. – Les secondes servent à donner plus de relief au dessin; mais alors on ne trace pas les lignes de pente dans toute leur longueur et on les interrompt à la rencontre des horizontales, ce qui dispense de représenter ces dernières par un trait continu. Ainsi réduites, ces portions de lignes se nomment *hachures*. En les serrant plus ou moins ou en les faisant plus ou moins épaisses, on peut produire avec leur aide des effets d'ombre et de lumière, donnant du relief au dessin.

Fig. 155.



(b). *Lumière oblique et lumière zénithale.* – Deux systèmes sont adoptés pour l'éclairement conventionnel du terrain. Dans le premier, qui est le système de la *lumière oblique*, on suppose les rayons lumineux obliques, inclinés à 45° sur le plan horizontal, et arrivant de l'angle gauche supérieur du cadre. Ce système donne beaucoup de relief au dessin; mais il a l'inconvénient d'être difficile à exécuter et de ne pas permettre, à première vue, l'appréciation exacte des pentes, puisque sur la même carte, le même mouvement de terrain peut être représenté par des intensités de teintes très différentes suivant le sens où il est dirigé par rapport aux rayons lumineux (Voir la carte de Suisse par le Général Dufour).

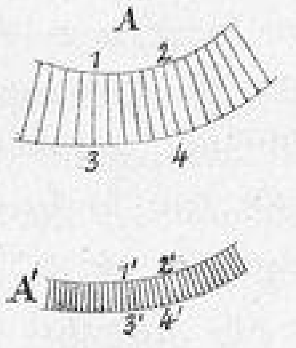
Dans le second système, dit de la *lumière zénithale*, on suppose que les rayons lumineux sont

verticaux: De cette façon, deux surfaces également inclinées, seront éclairées de la même manière, quelle que soit leur position sur le terrain. Les surfaces horizontales seront les plus blanches, et les surfaces inclinées seront grises ou noires.

On admet qu'une pente inférieure à $\frac{1}{64}$ est considérée comme horizontale, et que tout terrain plus roide que $\frac{1}{1}$ est considéré comme escarpement et figuré d'après un mode particulier.

La grosseur à donner aux hachures et leur espacement sont variables suivant les pentes: Elles sont fonction de la distance qui sépare deux lignes de niveau.

Fig. 156.



Soient sur une même carte deux séries de lignes de niveau A et A'. – La distance des deux premières A comptée sur la ligne de pente 1.3. est plus grande que celle des deux autres A'. – La pente est donc plus douce dans le premier cas que dans le second, par suite la teinte en A doit être plus claire qu'en A'.

On arriverait d'une manière simple à réaliser ces nuances, en convenant de faire les hachures d'un trait égal, dans tous les cas, mais de les espacer d'une façon constante (du quart par exemple) de la distance 1-3, ou 1'-3'.

Dans les dessins expédiés on se conforme à cette convention. Dans la gravure des cartes, on convient en outre de grossir le trait quand les hachures sont rapprochées. – Cela peut se faire soit au sentiment, soit en se conformant à des modèles établis une fois pour toutes et auxquels on donne le nom de *Diapasons de hachures*.

(c) *Emploi du Lavis.* – Dans les minutes on laisse subsister le trait des lignes de niveau et on fait les teintes au lavis, ce qui va plus vite et surcharge beaucoup moins la carte.

(d) *Signes conventionnels.* – Dans les cartes à petite échelle, les détails que l'on veut représenter seraient, le plus souvent, à cause de leurs dimensions restreintes, très difficiles à figurer. Il faut ou bien les grandir ou bien les représenter par un signe conventionnel. On trouve ces signes dans tous les traités de topographie, et dans l'instruction sur la lecture des cartes, publiée par le Ministère de la Guerre. On y trouve également les conventions faites pour figurer sur une carte les divers genres de cultures (bois. forêts. prairies. etc.).

Mouvements de Terrain.

§ 130. – *Éminences de la terre.*

Une *Montagne* est une masse de terrain qui s'élève considérablement au-dessus du sol environnant. Le *Sommet* ou la *Cime*, en est la partie la plus élevée. Les *Flancs* de la montagne sont les pentes qui en descendent. La *Base* est le plan ou la plaine, peu incliné, sur lequel elle repose, et le *Pied* est le périmètre de ce plan, c'est-à-dire la ligne, assez peu définie d'ailleurs, qui sert de passage entre la base à pente douce de la montagne, et les flancs à pente plus rapide.

Un *Plateau* est une plaine plus ou moins étendue située sur une montagne.

Un *Monticule* est une petite montagne. – Les plus petits prennent le nom de *Butte* ou *mamelon*.

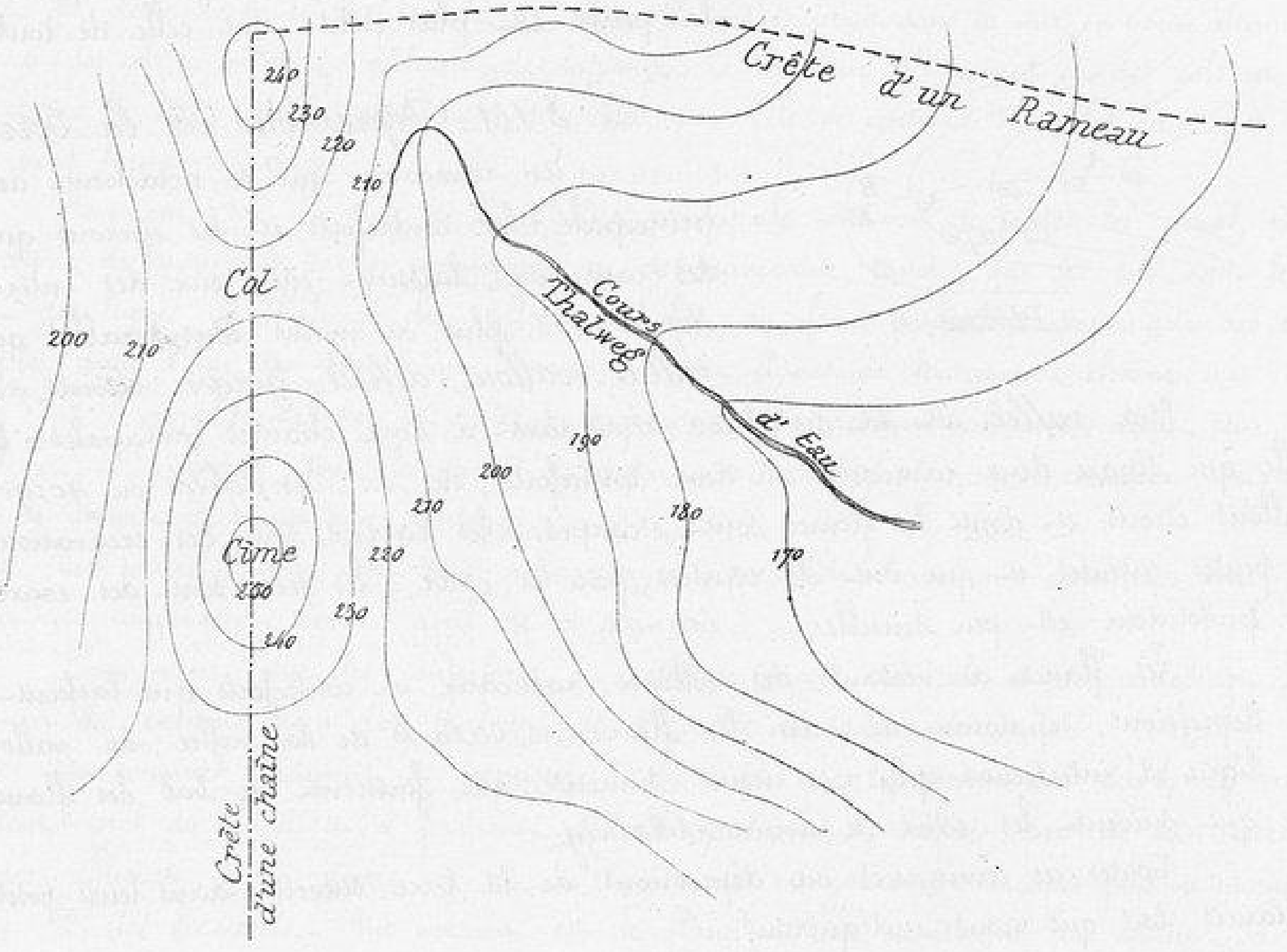
Lorsque la cime d'une montagne est arrondie elle forme un *Dôme*. – Si ses pentes sont abruptes, on la nomme *Pic*; si elle forme une pointe aiguë très élancée, on lui donne le nom d'*Aiguille*.

Les montagnes forment ordinairement des séries, que l'on nomme Chaînes de Montagnes, qui s'étendent dans des directions déterminées et jettent des ramifications à gauche et à droite.

Le faîte d'une chaîne est la ligne qui passe par les crêtes et par les sommets de toutes les montagnes qui la composent.

Les flancs forment les Versants de la chaîne. En se déplaçant sur le faîte d'une chaîne, on trouve alternativement des élévations qu'on nomme Cimes et des abaissements qu'on nomme Cols.

Fig. 157.



Aux environs des cimes, la surface du sol est convexe. Aux environs des cols elle est à courbures opposées. Les formes affectées par les courbes de niveau sont analogues à celles qui sont dessinées sur le croquis ci-dessus. fig. 157.

Les versants d'une chaîne forment des surfaces très ondulées, et dont la pente est très variable. Ordinairement, la pente moyenne d'un des deux versants est plus petite ou plus grande que l'autre.

Le faîte d'une chaîne forme la ligne de séparation ou de partage des eaux, qui, coulant de part et d'autre des deux versants, se rendent dans deux rivières différentes.

Chaque cime est le point de départ de deux chaînes secondaires, coupant transversalement la première et qui prennent des directions opposées. — Ces chaînes secondaires se nomment Rameaux ; chaque col est le point de départ de deux vallées opposées.

Des rameaux partent encore de nouvelles ramifications que l'on nomme des

contreforts ou éperons.

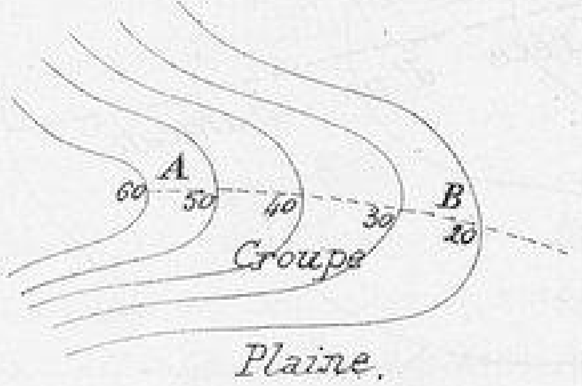
Un rameau et même un contrefort qui a une certaine longueur peut être considéré comme une chaîne simple, car il présente alternativement des cols et des cimes.

Lorsqu'un rameau, en se prolongeant, n'atteint plus une grande élévation, on lui donne le nom de *Colline*.

Lorsqu'un rameau ou un contrefort se termine sur une plaine, il y a en ce point deux versants qui se rencontrent comme les deux pentes d'un toit. La surface convexe ainsi formée se nomme une *Croupe*.

Les lignes de niveau y sont disposées comme l'indique le croquis ci-contre. Il existe à son extrémité une ligne de pente AB, dont la pente est plus petite que celle de toutes les autres.

Fig. 158.



Plaine.

§ 131. Dépressions de la Terre.

Les rameaux qui se détachent de la chaîne principale, les contreforts et les éperons qui se détachent des rameaux, laissent entre eux des intervalles ou dépressions plus ou moins considérables que l'on nomme *vallées, vallons, défilés, gorges, ravins, plis de terrain*.

Une *vallée* est la dépression répondant à deux chaînes principales. Le *vallon* est celle qui sépare deux rameaux ou deux contreforts, etc...... Les *défilés* ou *gorges* sont des vallons étroits et dont les flancs sont escarpés. - Les *ravins* sont des excavations prolongées, à pentes rapides, et qui ont été creusées par les eaux. - Les *plis* sont des excavations dont la profondeur est peu sensible.

Les flancs ou versants des collines, rameaux ou contreforts qui laissent entre eux ces dépressions, se nomment aussi les flancs ou versants de la vallée, du vallon etc........ - La ligne d'intersection plus ou moins sinueuse que forment en bas les flancs ou les versants et que suivent les eaux se nomme *Thalweg*.

Toutes ces éminences ou dépressions de la terre suivent dans leurs positions relatives certaines lois que nous indiquerons :

1° On remarquera que toutes les fois que d'un côté d'une vallée ou d'un vallon, une croupe forme un avancement dans la vallée, avancement que l'on nomme *angle saillant*, on voit, vis-à-vis et de l'autre côté un enfoncement, que l'on nomme *angle rentrant*. Cette règle ne reçoit d'exceptions que dans les vallées d'une très grande largeur.

2° Si ces deux versants sont en pente douce, la vallée est en général très évasée et régulière dans son cours ; le Thalweg se trouve à peu près à égale distance des deux versants. - Si la pente d'un versant est plus rapide que celle de l'autre, le thalweg se rapproche de ce versant.

Les vallées formées par deux versants escarpés sont en général étroites et irrégulières. On y remarque des élargissements et des rétrécissements.

La courbe du thalweg présente un grand nombre d'inflexions, mais elle se rapproche toujours du côté le plus escarpé.

Les *plaines* sont de grands espaces qui paraissent horizontaux, quoiqu'ils ne le soient jamais rigoureusement. Le sol en est toujours plus ou moins accidenté. On y remarque de légères saillies formant des arêtes de partage, et de légères dépressions dans lesquelles serpentent souvent des ruisseaux.

Lorsque ces saillies ont une pente un peu prononcée, on les nomme des coteaux ; lorsqu'elle est faible on les nomme rideaux.

§ 132. – Examen des hauteurs, – des versants, – des basses plaines et des cours d'eau.

1° Les Hauteurs. – Si l'on chemine sur la crête d'une chaîne principale dont les flancs forment les demi-versants des vallées de deux fleuves se jetant dans la mer, on trouve alternativement des cimes et des cols. – En s'approchant de la mer, la hauteur des cimes et des cols va en diminuant, et la ligne de crête semble s'enfoncer dans la mer. Elle se continue sous les eaux, et le point où elle se perd forme un cap.

Revenant sur la crête de la chaîne principale, on voit, de toutes les cimes, partir à gauche et à droite de nouvelles crêtes répondant à des rameaux, tandis que les cols sont le point de départ des lignes de thalwegs des vallées latérales, au fond desquelles serpentent des rivières destinées à se jeter dans l'un des fleuves qui répondent aux flancs de la grande chaîne.

Si l'on chemine sur la crête de ce rameau, on retrouve alternativement un col, une cime, un col, etc. – Les cimes sont les points de départ des contreforts de ce rameau ; et les cols les points de départ de nouveaux thalwegs.

Les contreforts ne sont pas ordinairement perpendiculaires au rameau, mais ils s'infléchissent et convergent vers l'aval de ce rameau.

Cheminant sur les contreforts, on retrouve encore des cols et des cimes, et servant de départ à des éperons et à des thalwegs de 4e ordre et ainsi de suite.

Les chaînes viennent se terminer à la mer et y forment des caps. Les rameaux se terminent près du fleuve et y forment des croupes ; les contreforts, près de la rivière, les éperons près des affluents de la rivière ...... etc ..... et forment toujours des croupes plus ou moins importantes.

2° Les Versants. – Un versant est le flanc d'une montagne ou colline. Sa pente se compose ordinairement de trois parties qui sont : le Plateau, le coteau, la Plaine.

Le Plateau (voir la coupe ci-contre) est la plaine située sur la montagne. Il n'est pas horizontal et est divisé par une crête de partage M, qui peut être plus près d'une des limites A ou B du plateau et même se confondre avec l'une d'elles.

Le Coteau est la partie la plus rapide du versant ; il est limité en haut par le bord inférieur A du plateau. On nomme cette ligne la Corniche du coteau ; en bas il est limité en C par la plaine.

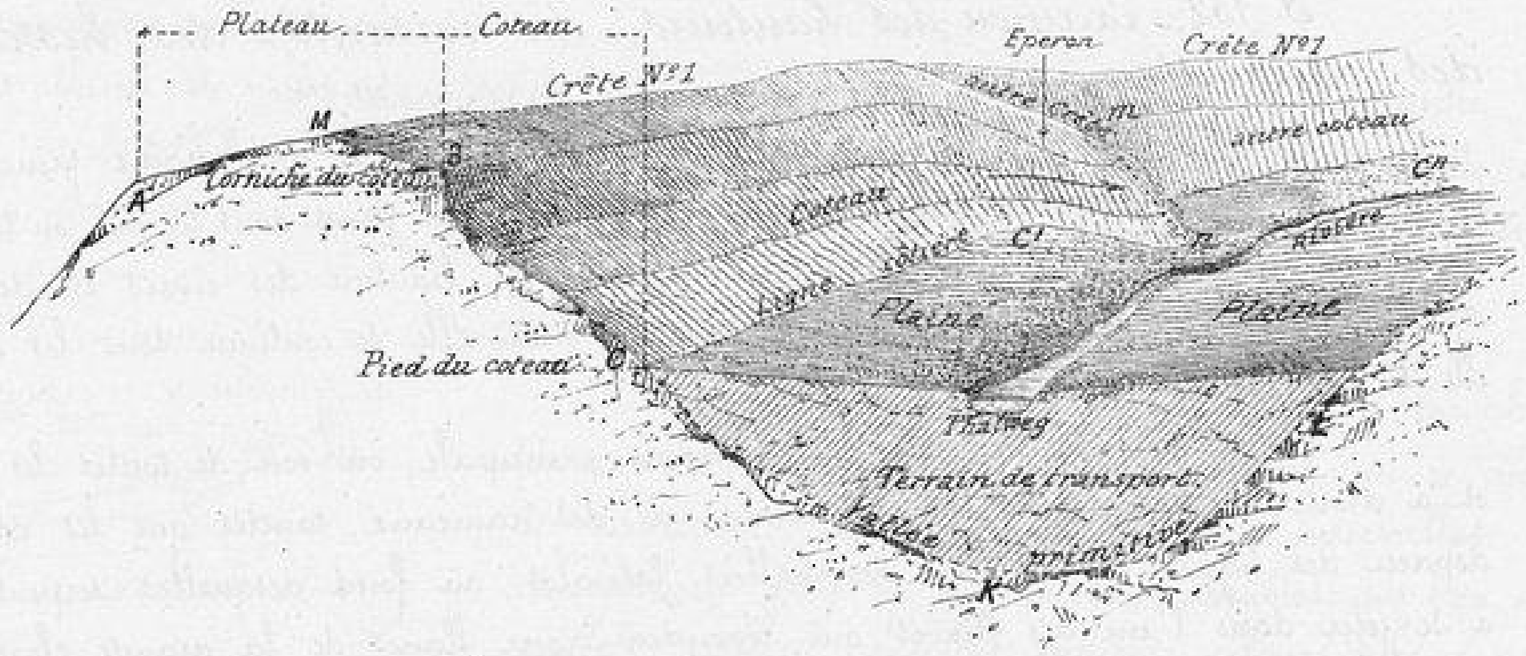
La ligne C se nomme le pied du coteau. Latéralement le coteau se retourne le long de deux éperons ou de deux contreforts, et vient se terminer sur la ligne de crête m n d'une croupe.

Les pieds de tous les coteaux qui peuvent exister dans le bassin d'une rivière ne forment qu'une seule et même ligne C.C'.C''..... qui se nomme la ligne côtière de la vallée de cette rivière.

La Plaine d'un versant est la portion de ce versant qui s'étend depuis la ligne côtière jusqu'au thalweg.

Fig. 159.

Coupe et perspective d'un coteau et d'une plaine



3° Les basses plaines. — Les basses plaines actuelles sont ordinairement formées par des terrains de transport, qui y ont été déposés soit par les eaux des rivières et des torrents pendant les crues, soit par les eaux de la mer pendant leur séjour sur nos continents. — Les vallées primitives s'enfonçaient davantage que les vallées actuelles et possédaient des plaines moins étendues.

Le profil en travers des plaines se modifie journellement. A chaque pluie torrentielle, le terrain des coteaux est entraîné dans la plaine et précipité par petites quantités vers le thalweg, ce qui tend à donner à la plaine deux pentes transversales descendant de la ligne côtière vers le thalweg. — D'un autre côté, à chaque crue de la rivière, du limon se dépose sur son fond et sur ses rives que cela exhausse. Après un certain nombre d'années cet effet d'exhaussement des rives est tellement sensible que le cours d'eau se trouve placé sur la partie la plus élevée de la plaine. — Rompant alors ses digues, il quitte ce faîte qui n'est plus son vrai thalweg, et va dans la partie la plus basse se creuser un nouveau canal.

Fig. 160.

Coupe en travers d'une basse plaine.

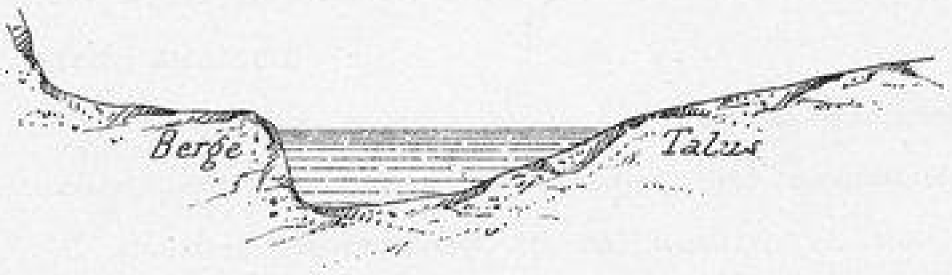
Cet effet est très prononcé pour les rivières de la Lombardie.

Le profil en long des basses plaines est très variable. La plus forte pente est ordinairement vers son origine. — Certaines vallées ont des pentes en long alternativement rapides et douces, répondant à des étranglements et à des élargissements des deux coteaux. D'autres ont

des pentes en long assez régulières.

4°. Les Cours d'eau. – Tout fleuve, toute rivière et tout ruisseau a un bassin, une source, un lit, des berges, des talus, une droite, une gauche, un amont, un aval, un confluent.

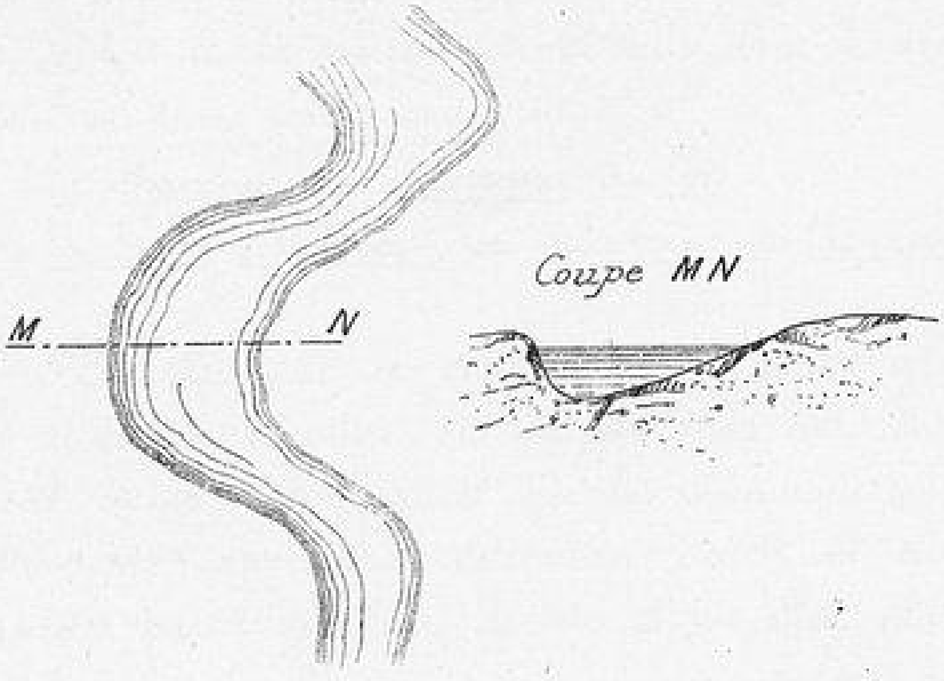
Fig. 161.



On connaît le sens de ces divers mots. Rappelons que le lit d'une rivière est le canal dans lequel coulent les eaux en temps normal et dont elles ne sortent que lors de leurs débordements. Les berges sont la partie de ses bords qui est verticale. Les talus sont celles qui sont en pente douce.

Le lit est ordinairement limité par une berge d'un côté et par un talus de l'autre.

Fig. 162.



Le plus souvent le cours d'une rivière est très sinueux. Il l'est d'autant plus que la pente est plus faible et que la vallée est plus large.

Lorsqu'une rivière présente un coude en A, la paroi du lit M qui est concave est en berge ; l'autre, N, est en talus. – Cela tient à ce que les eaux, en vertu de la vitesse acquise corrodent la paroi M, qu'elles rencontrent avec plus de vitesse que N, tandis que sur la partie convexe N elles déposent les matières qu'elles tiennent en suspension.

Fin des Compléments de Géométrie.

II. – Charpente.

Introduction.

Stéréotomie.
1ère Leçon.

§1. – Définition et objet de la stéréotomie. – Sa division en charpente et coupe des pierres.

La stéréotomie a pour objet l'étude des procédés employés pour approprier les matériaux à la construction, en prenant ces matériaux tels que nous les donne la nature.

C'est donc en enlevant de la matière et non pas en en ajoutant que l'on passera de la forme brute des matériaux naturels à la forme définitive qui leur convient.

Il résulte de là que le fer, la fonte, les terres cuites, etc..... dont la forme appropriée s'obtient par le laminage, le forgeage, le moulage, ou le tournassage, ne font pas partie des matériaux auxquels s'applique la stéréotomie.

Le bois et la pierre rentrent seuls dans le domaine de la stéréotomie. Cette science se divise donc en deux parties qui sont:

La Charpente ou Stéréotomie du bois.

La Coupe des pierres ou Stéréotomie de la pierre.

§2. – Marche à suivre dans toute opération de stéréotomie.

Le bois ou la pierre qui entrent dans une construction doivent y être employés avec des dimensions et sous des figures que la mécanique appliquée (résistance des matériaux et stabilité des constructions) apprend à déterminer; dans une œuvre architecturale ces figures sont le plus souvent créées par l'architecte, en vue d'un effet plastique à obtenir.

Une fois ces figures et ces dimensions bien arrêtées sur un ou plusieurs dessins d'ensemble, il faut, pour exécuter le projet, choisir et tailler des pièces de bois ou des morceaux de pierre qui par leur assemblage ou leur juxtaposition réalisent matériellement l'œuvre prévue.

Pour y arriver on commence par exécuter une épure en grandeur d'exécution sur laquelle sont figurées, par les projections nécessaires, l'ensemble des masses solides qui constituent la construction. C'est l'épure d'ensemble. Après quoi on détaille cet ensemble et on le décompose soit en pièces de bois soit en morceaux de pierre ayant les figures et les dimensions voulues. Cette seconde partie constitue ce que l'on pourrait nommer la *décomposition de l'ensemble*. En coupe des pierres cette décomposition se nomme l'*appareillage*, et en charpente l'*assemblage de la construction*.

Dans une troisième phase de l'opération on prend, à part, chaque pièce de bois ou chaque morceau de pierre et par des projections, par des rabattements, par des coupes, par des développements. etc..... c'est-à-dire par des opérations de géométrie descriptive proprement dite, on prépare tout ce qui est nécessaire à la réalisation matérielle de chacun des éléments de la construction: Cette troisième partie constitue ce que l'on nomme la *préparation du trait*.

A ce moment l'épure géométrique est terminée, et ce qui reste à faire s'exécutera sur le chantier de construction.

Enfin la dernière et la quatrième partie, constitue ce que l'on nomme l'*application du trait* sur la pierre ou sur le bois. Elle ne peut être exécutée que par des ouvriers spéciaux

munis des instruments voulus et demande une main d'œuvre très soignée. Elle consiste à utiliser tous les éléments fournis par l'épure pour faire apparaître dans une pierre ou dans un morceau de bois bruts, les surfaces planes ou courbes qui par leur contact aussi parfait que possible, permettront d'assembler les éléments de la construction dans les conditions prévues par le projet.

Nous commencerons par la charpente.

§ 3. – Caractères d'une construction en charpente. – Assemblages.

Les pièces de bois qui entrent dans une charpente peuvent être caractérisées comme il suit.

1° Elles ont, en général, une longueur qui est considérable par rapport à leur largeur et à leur épaisseur. (Les dimensions en largeur et en épaisseur déterminent ce que l'on nomme l'*équarrissage* de la pièce).

2° Elles ont un poids spécifique généralement assez faible, inférieur à celui de l'eau, et à fortiori, inférieur à celui des pierres.

Par conséquent, pour ces deux raisons, les pièces de bois posées verticalement ne peuvent avoir séparément une stabilité suffisante pour se maintenir en place.

Il est nécessaire de rendre solidaires entre elles les pièces de bois d'une même construction, comme le sont les barreaux d'une cage, de telle sorte que si l'une d'elles tend à se renverser elle ne puisse le faire qu'en entraînant toutes les autres. De cette façon la stabilité est obtenue pour l'ensemble de l'édifice et non pour un de ses éléments.

Cette solidarité s'obtient par des *assemblages*, qui sont en réalité des pénétrations des pièces les unes dans les autres. Les assemblages sont consolidés et renforcés par des ferrures, ou ferrements.

Ainsi donc les différentes pièces d'une charpente sont assemblées entre elles tandis que dans une maçonnerie elles sont simplement juxtaposées.

§ 4. – Triangulation.

Si l'on ne considère que les axes des pièces de bois, ces lignes appartiennent à des surfaces qui sont en général définies géométriquement. Si les axes sont dans un même plan, le système qui résulte de la combinaison des pièces forme un *pan de charpente* qui prend différents noms suivant les positions dans lesquelles il se trouve employé. Les pans verticaux constituent des *murs* ou des *cloisons*; les pans horizontaux constituent des *planchers* ou des *enrayures*; on trouve des pans inclinés dans les combles.

Pour assurer l'invariabilité dans les positions des différentes pièces d'un pan de bois, on est obligé de le *trianguler*.

Un parallélogramme $abcd$ (fig. 1) dont les quatre côtés seraient articulés entre eux aux sommets serait une figure essentiellement déformable; cela résulte de ce que avec quatre longueurs données comme côtés on peut construire, géométriquement, une infinité de quadrilatères. Au contraire, avec trois longueurs données comme côtés, on ne peut construire qu'un seul triangle.

C'est pourquoi on placera soit des pièces en diagonale, telles que ad, cb, (fig. 1) formant croix de St André, soit (fig. 2) des pièces d'angle telles que mn portant le nom

d'aisseliers. Ces pièces ainsi mises en écharpe servent à trianguler le pan de bois.

Fig. 1.

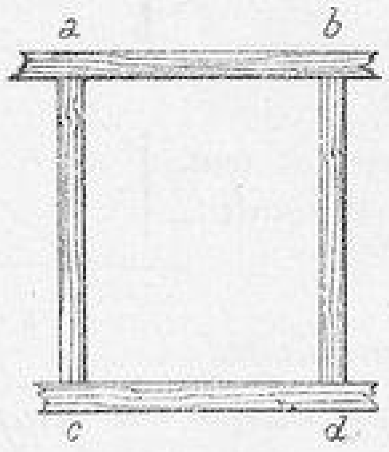
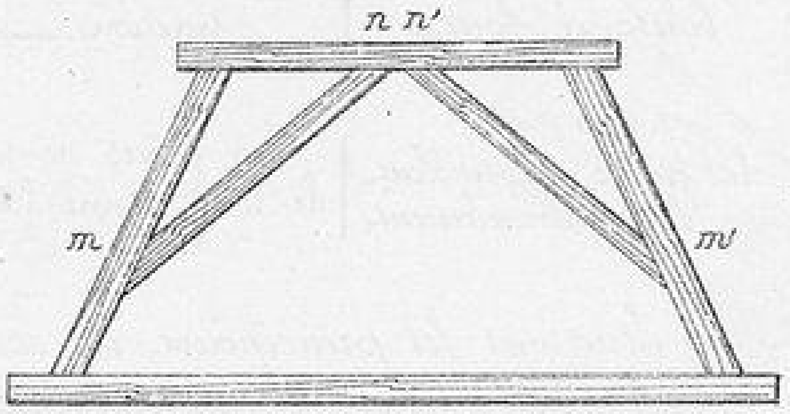


Fig. 2.

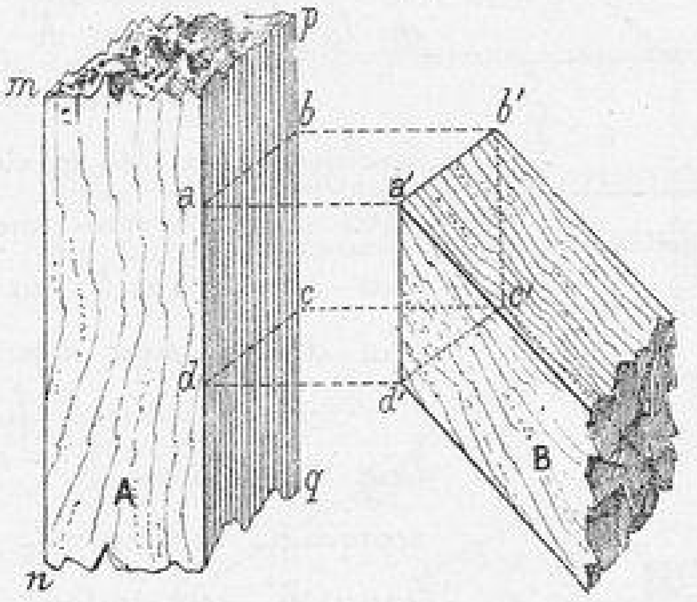


Assemblages.

§ 5. - Définitions. - Classification des assemblages.

On appelle joint les deux surfaces par lesquelles deux pièces de bois A et B qui se rencontrent s'appliquent exactement l'une sur l'autre. Le joint est toujours limité par des lignes a b c d qui marquent les intersections des faces d'une pièce l'une sur l'autre.

Fig. 3.



L'extrémité a'b'c'd' de la pièce B qui vient buter sur la pièce A, se nomme l'about tandis que la figure a b c d de la pièce A sur laquelle viendra s'appliquer l'about, se nomme *occupation* ou *portée* de l'about.

On nomme *faces de parement* a d m n d'une pièce, celles qui sont parallèles au plan des axes et *face d'épaisseur, face normale* ou *face d'assemblage* les deux autres.

Si deux pièces A et B se réunissaient par simple contact, on dit qu'elles sont à *plat joint*. Ce mode de jonction n'oppose aucun obstacle au glissement de l'about sur sa portée, à moins qu'on n'y ajoute des clous ou des broches en fer, ce qui est, en général, mauvais.

Il vaut mieux pratiquer des entailles qui seront saillantes sur une des pièces et creuses dans l'autre, et qui constitueront ce que l'on nomme un *assemblage*.

La rencontre de deux pièces de bois peut avoir lieu de trois manières résumées dans le tableau suivant :

(A). Les pièces se rencontrent en formant un angle.	1° Les deux pièces se croisent et passent chacune d'un côté à l'autre de leur point de croisement.	Assemblages par entailles.
	2° L'une des pièces porte en un point de la longueur de l'autre.	Assemblages à tenons et mortaises
	3° Les deux pièces se joignent par leur bout en formant un angle et sans se dépasser.	Assemblages d'angles.

(B). Les pièces se joignent en ligne droite ou bout à bout	1° Elles doivent résister à une compression. ———— 2° Elles doivent résister à une traction. ————	assemblages par entures.
(C) Les pièces s'assemblent longitudinalement	Les pièces sont en contact tout le long d'une face longitudinale. —	assemblages jumelés.

Etudions les principaux de ces assemblages :

(A). Les pièces se rencontrent en formant un angle.

1° Assemblages par entailles. – Les pièces se croisent et passent chacune d'un côté à l'autre de leur point de croisement.

§6. – Assemblage oblique à mi-bois (fig. 4).

Fig. 4.

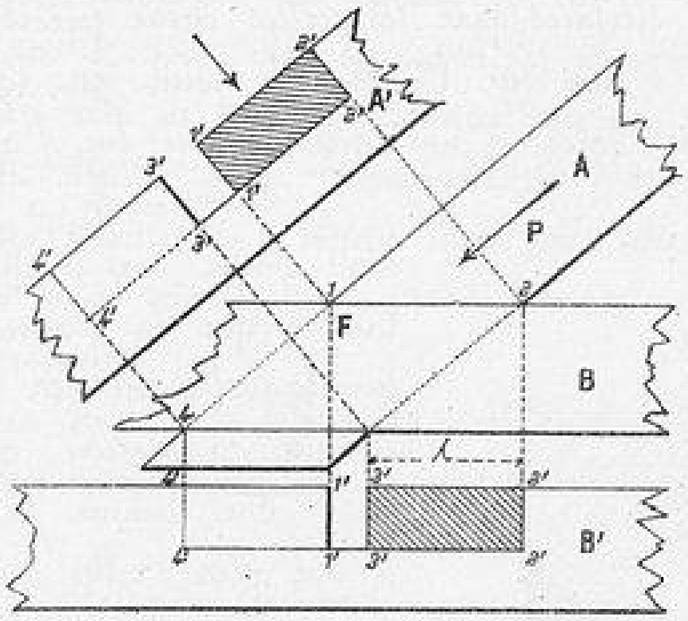
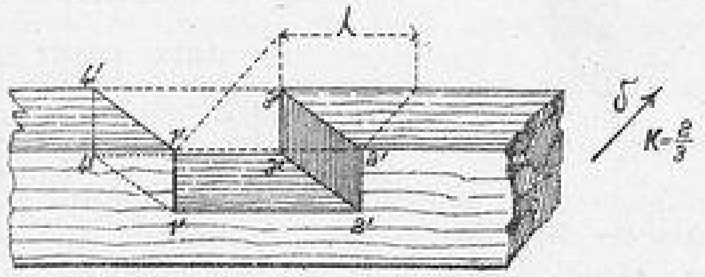


Fig. 4 bis.



On voit en A et B, les deux pièces assemblées. On prend ensuite, séparément, chaque pièce et on lui donne quartier, ce qui revient à la faire tourner de 90°, mais après l'avoir desassemblée.

Ainsi la pièce B a reçu quartier en B' et la pièce A en A'.

On est dans l'habitude de placer des hachures sur les parties de l'assemblage où les fibres du bois sont coupées, et de serrer d'autant plus ces hachures que la section se rapproche plus d'une coupe normale à la direction des fibres.

Nous donnons fig. 4 bis une perspective cavalière de la pièce B'. – Pour la dessiner nous avons reproduit exactement, sans aucune réduction, la figure B'. représentant la face de la pièce qui est de front. Nous avons choisi une direction fuyante δ pour les droites normales à cette face et nous avons adopté un rapport de réduction K (ici $K = \frac{2}{3}$) et c'est sur la figure B que nous avons pris, toutes les longueurs vraies des fuyantes, que nous avons réduites ensuite dans le rapport K.

§7. – Assemblage oblique, à mi-bois, avec embrèvement.

Lorsque les pièces à assembler sont assez obliques, et surtout lorsque l'une d'elles, la pièce A par exemple (fig. 4) doit transmettre une pression P assez énergique, il y aurait à craindre que l'angle aigu F, ne fît l'effet d'un coin dans la pièce B et n'en fît éclater le bois.

Dans ce cas on pratique un *embrèvement* (fig. 5). C'est une sorte d'épaulement 2,3 ou

Fig. 5.

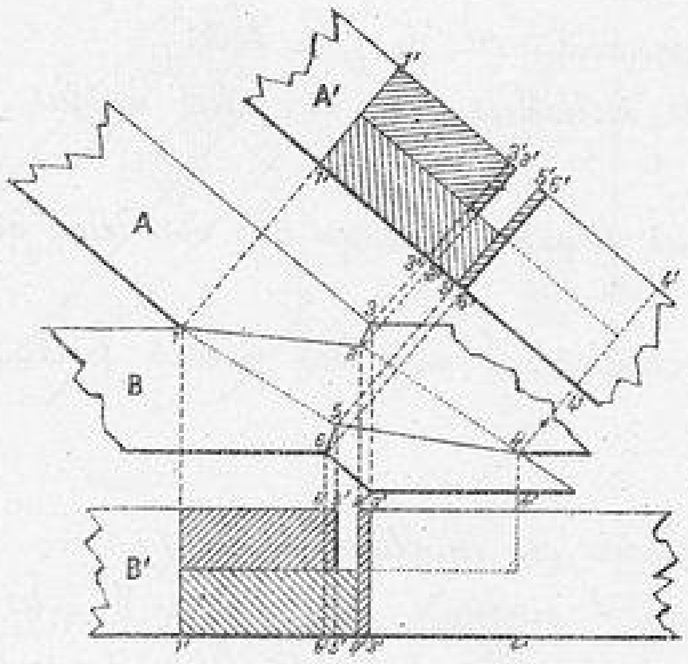
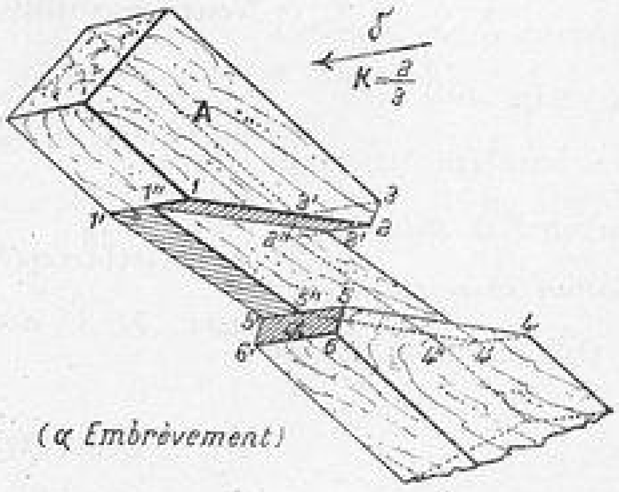


Fig. 5 bis.



(α Embrèvement)

5,6 régnant sur toute la profondeur de la pièce et dont la fonction est, plus spécialement, de recevoir et de répartir la pression sur une surface suffisante. En général, la direction 2,3, de l'about de l'embrèvement est donnée par la bissectrice de l'angle des faces des deux pièces.

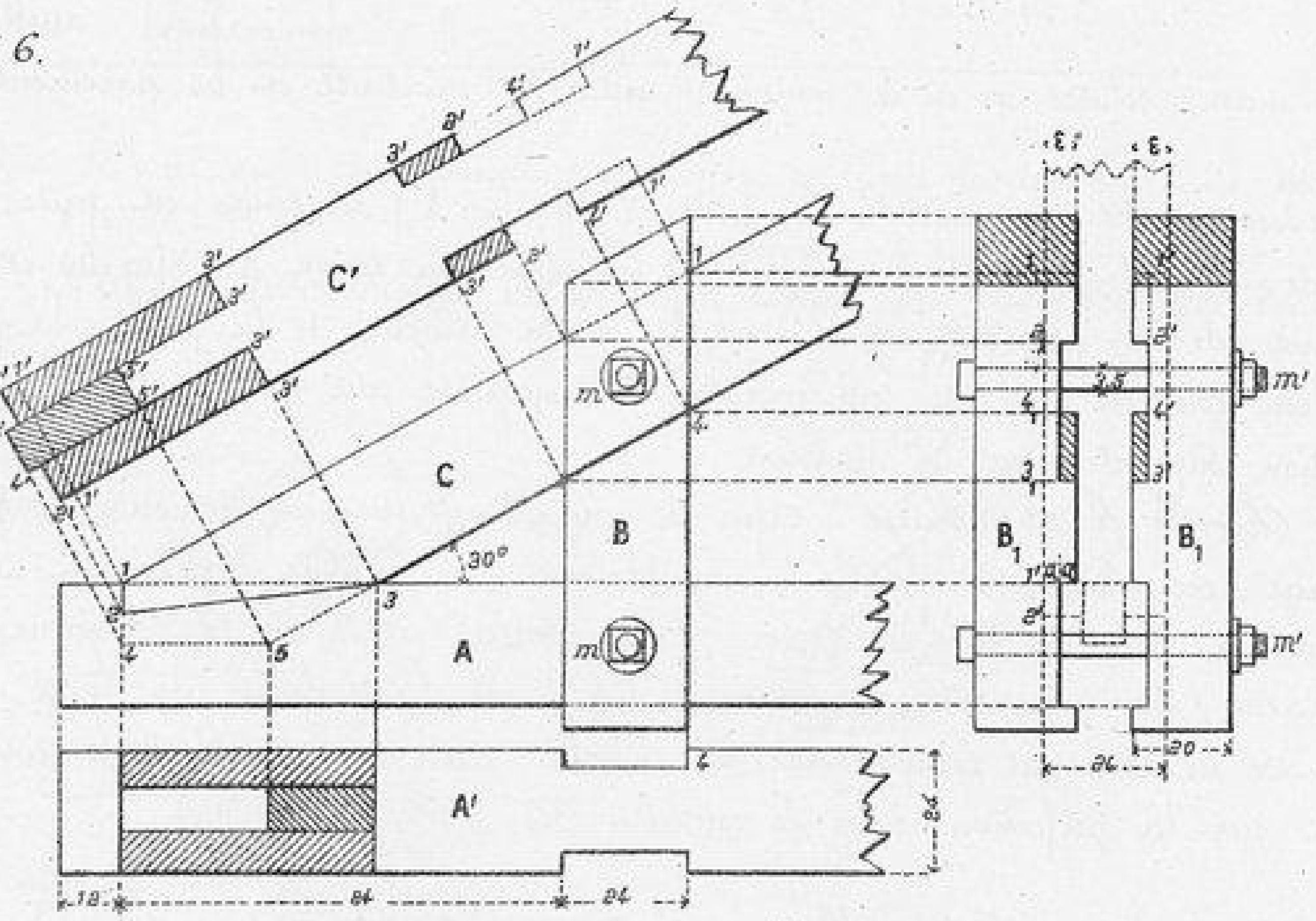
On voit en A' et B' les deux pièces désassemblées et ayant, chacune, reçu quartier.

La perspective cavalière (fig. 5 bis) de la pièce A a été faite en prenant comme étant de front la figure A. Les profondeurs, réduites dans le rapport $K = \frac{2}{3}$, ont été prises sur la figure A'.

§ 8. – Assemblage par moises entaillées à $\frac{1}{m}$ de bois.

La figure 6 représente trois pièces de bois, l'une A est un *tirant* de ferme, elle est horizontale, l'autre C inclinée est un *arbalétrier*, l'autre B verticale est une *moise* formée de deux pièces jumelles B_1 et B_1 qui viennent serrer entre elles les deux premières et trianguler la charpente aux environs du point d'assemblage.

Fig. 6.



Les moises, ainsi que les pièces qu'elles serrent sont entaillées chacune sur une profondeur α, qui peut être 1/4, 1/6, 1/8, 1/m de bois. Le recouvrement

apparent-É, des pièces est égal à la somme des deux entailles. Si l'entaille est à mi-bois ($\frac{1}{2}$) le recouvrement est à bois complet, comme dans les assemblages étudiés fig. 4 et fig. 5. Si l'entaille est, comme ici, faite à $^1/_6$ de bois, le recouvrement est de $^1/_3$ de bois.

Pour maintenir les pièces moisantes assemblées avec les pièces moisées, il faut ajouter des boulons m,m' – m,m'.

On voit en C'. A' et B, B, les pièces séparées après qu'elles ont reçu quartier.

2° Assemblages à tenons et mortaises. – L'une des pièces porte en un point de la longueur de l'autre.

§9. – Assemblage droit, à tenon et mortaise (fig. 7).

Le tenon bb' est formé en saillie à l'extrémité de la pièce B. – Les plans tels que 1.2 et 4.3, fig. A', se nomment les *Joues* du tenon elles sont entaillées dans le sens des fibres du bois et parallèlement aux faces de parement. Le plan 1.4 (fig. A') entaillé perpendiculairement aux fibres se nomme le bout du tenon. La partie 2.3, suivant laquelle il se rattache à la pièce est sa racine. Les plans 2.5 et 3.6 se nomment l'about de la pièce; – ils forment une partie du rectangle d'occupation.

Fig. 7.

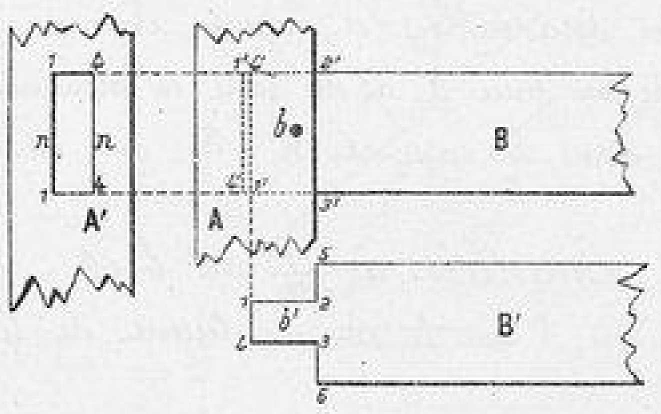
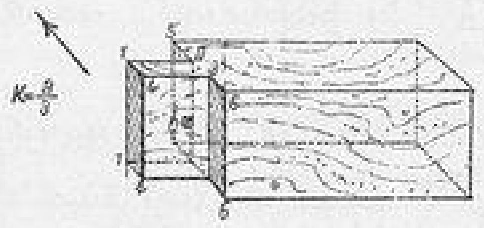


Fig. 7 bis.



La mortaise existe dans la pièce A A'. Les surfaces telles que 1.1 et 4.4 qui seront en contact avec les joues du tenon se nomment aussi les joues de la mortaise.

Les petites masses solides m et m' comprises entre la mortaise et les parements de la pièce sont les jouées.

Dimensions ordinaires. – La largeur 1,4 (fig. A') du tenon est prise, en général, égale au tiers de la profondeur de la pièce. – La longueur du tenon, 1'2' (fig. B) est variable. – On recommande de la prendre égale aux $^2/_3$ de la largeur de la pièce. La profondeur de la mortaise est toujours un peu supérieure à la longueur du tenon, afin d'être sûr que le rectangle d'occupation supporte bien la pression.

Cheville d'assemblage. – Afin de maintenir momentanément en place les pièces pendant le montage, on place une cheville, b, cylindrique, ou plutôt légèrement conique, en bois dur. Le trou de la cheville, doit être percé à la tarière, à $^1/_3$ de la longueur du tenon à partir de sa racine. Son diamètre est environ de $^1/_4$ de l'épaisseur du tenon.

On ne doit pas compter sur les chevilles pour la solidité de la construction, mais uniquement sur la perfection dans le contact des parties assemblées.

§10. – Assemblage oblique à tenon et mortaise (fig. 8).

Il est inutile de décrire la figure 8. – On remarquera que le tenon est tronqué, fig. A.

par un plan 4.3 perpendiculaire aux fibres de la pièce creusée ; ce plan 4.3 se nomme l'about du tenon ; la partie correspondante de la mortaise se nomme l'about de la mortaise.

Fig. 8.

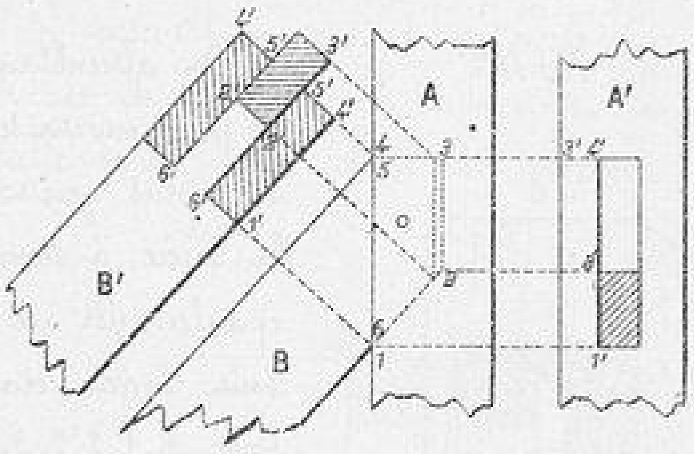
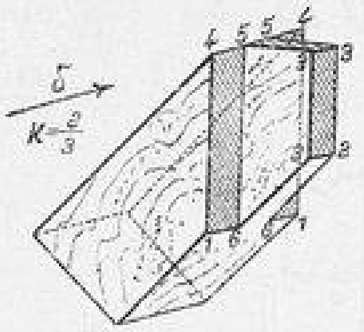


Fig. 8 bis.



On voit que c'est par les surfaces d'about que se transmet du tenon à la mortaise la presque totalité de la pression.

§11. – Assemblage oblique à tenon et mortaise avec embrèvement (fig. 9).

Pour les raisons indiquées déjà au §7, lorsque les pièces de bois ont un effort sérieux à se transmettre on ajoute au tenon un embrèvement 3, 2. fig. A. Les petits triangles 1, 2, 3 ainsi ajoutés au tenon, se nomment ses épaulements et le plan 2.3 est l'about de l'embrèvement.

Fig. 9.

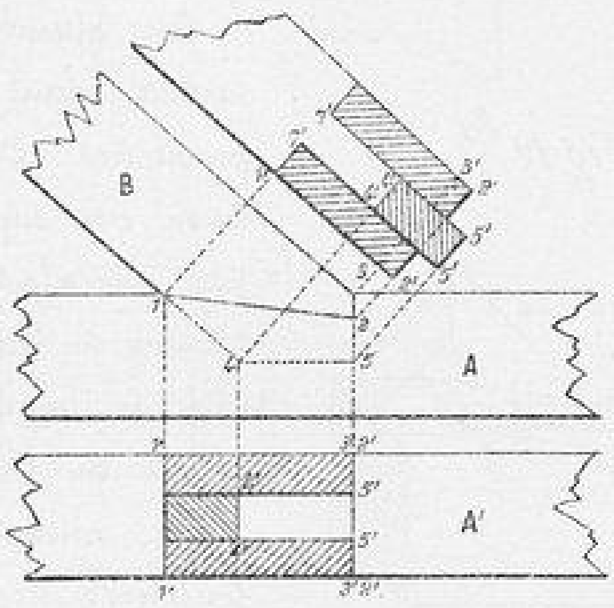
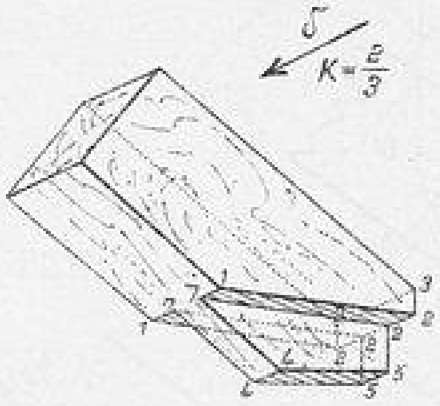


Fig. 9 bis.



L'avantage de l'embrèvement est double :
1° Il répartit les pressions sur une surface beaucoup plus considérable que sur l'about du tenon tout seul de la figure 7.
2° Il supprime en le tronquant le coin aigu qui aurait pour effet de faire fendre la pièce mortaisée.

§ 11 bis. – Assemblage oblique à tenon et mortaise, à deux abouts (fig. 10).

Fig. 10.

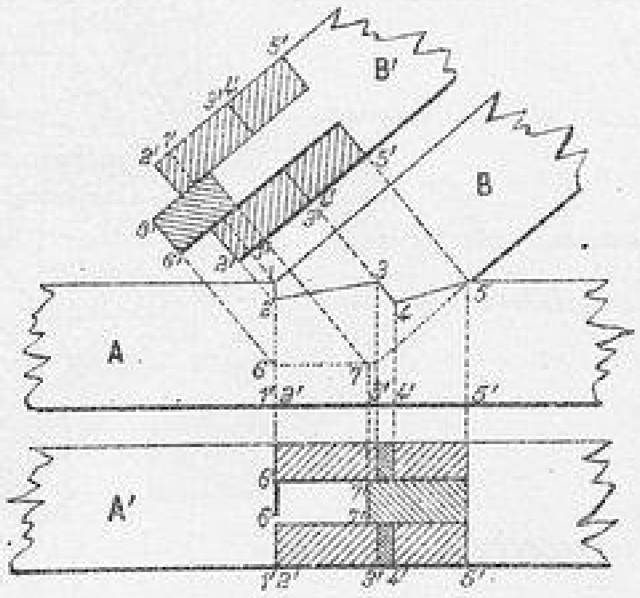
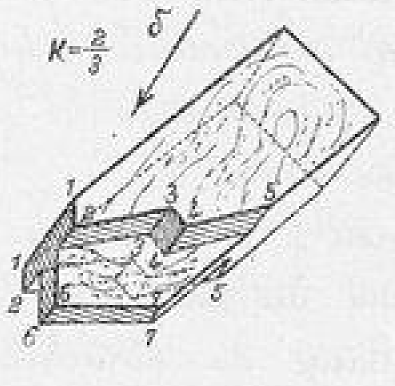


Fig. 10 bis.



Dans les pièces de grande dimension on trace l'embrèvement en forme de redent. Il présente alors deux abouts, le premier 1, 2 est perpendiculaire aux fibres de la pièce A, l'autre l'est à celles de la pièce B.

§ 12. –

§ 12. – Assemblage oblique à tenon et mortaise avec embrèvement et encastrement (fig. 11).

Fig. 11.

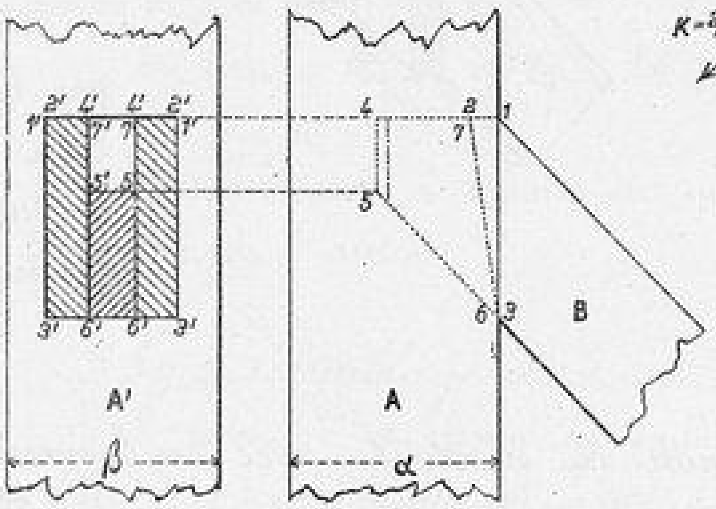
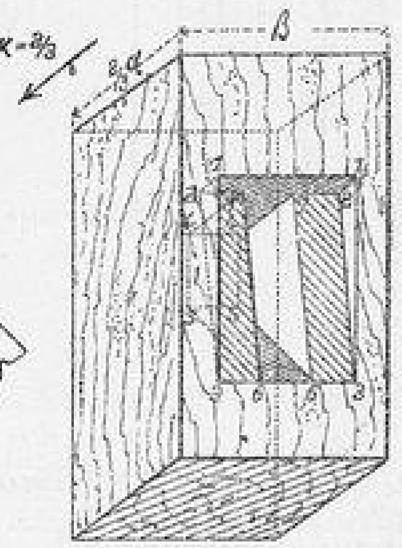


Fig. 11 bis.



Cet assemblage s'emploie lorsque la pièce mortaisée A A', présente une plus grande largeur que la pièce à tenon.. Alors les épaulements de l'embrèvement sont logés dans une sorte de boite 1.1.2.2.3.3 (fig. 11 bis) qui constitue l'encastrement. Cela donne un assemblage très bien maintenu.

§ 13. – Assemblage oblique par embrèvement et enfourchement. (fig. 12).

Fig. 12.

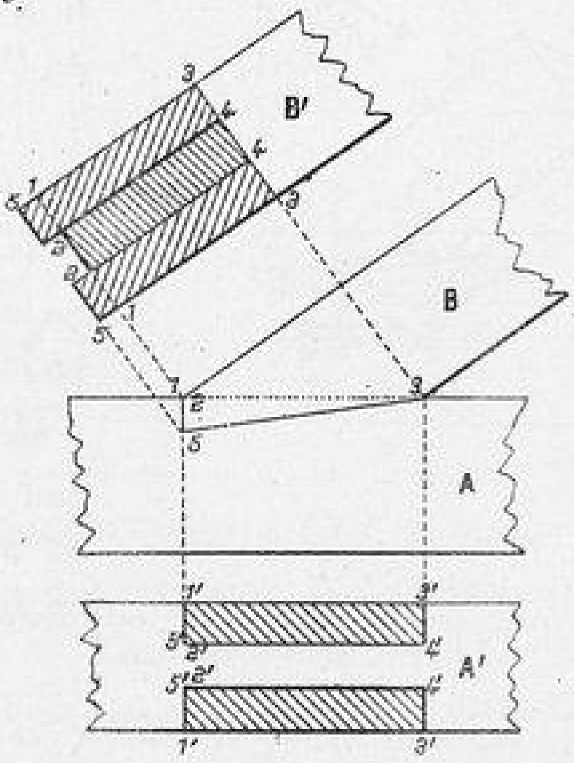
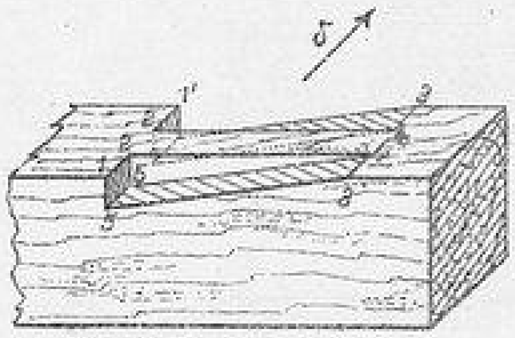


Fig. 12 bis.



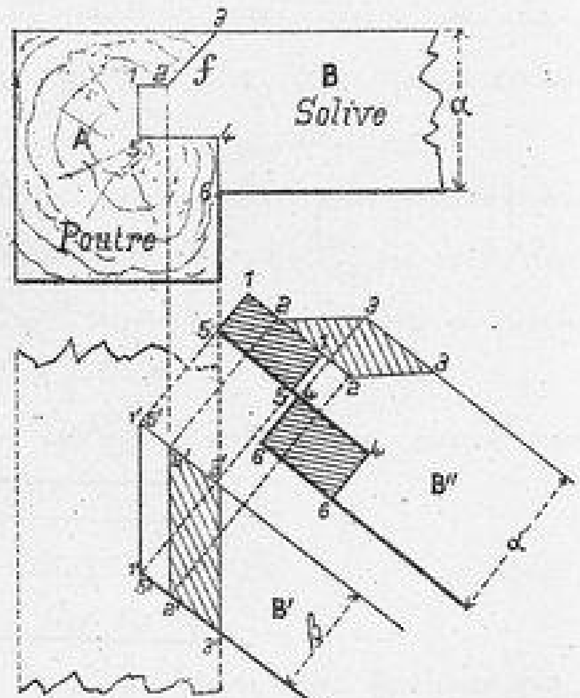
Cet assemblage s'emploie surtout dans les charpentes provisoires. On voit que le tenon est supprimé et remplacé par une cloison centrale pleine 2.2.4.4.5. fig. 12 bis de chaque côté de laquelle les épaulements de l'embrèvement forment comme une sorte de fourchette.

§ 14. – Assemblage oblique, à tenon et mortaise avec renfort en chaperon (fig. 13).

S'emploie surtout dans les planchers pour réunir une solive B à une poutre A.

Le chaperon f, a pour objet de donner plus de solidité à la racine du tenon, et de l'empêcher de se rompre sous la charge du plancher.

Fig. 13.



§ 15. – Assemblage droit en queue d'hironde (fig. 14).

Lorsque les deux pièces une fois assemblées doivent

pouvoir résister à un effort qui tendrait à les séparer, on donne au tenon et à la mortaise (fig. 14bis) une forme en trapèze. La partie étranglée 3.2 du tenon, se nomme le colet de la mortaise.

L'assemblage des deux pièces ne peut se faire que par le côté ; un effort exercé (fig. B') dans le sens de la flèche F, séparerait les deux pièces. Si l'on veut que la queue d'hironde soit un véritable tenon noyé dans la mortaise, il faut lui adjoindre une clef comme dans l'exemple suivant.

Fig. 14.

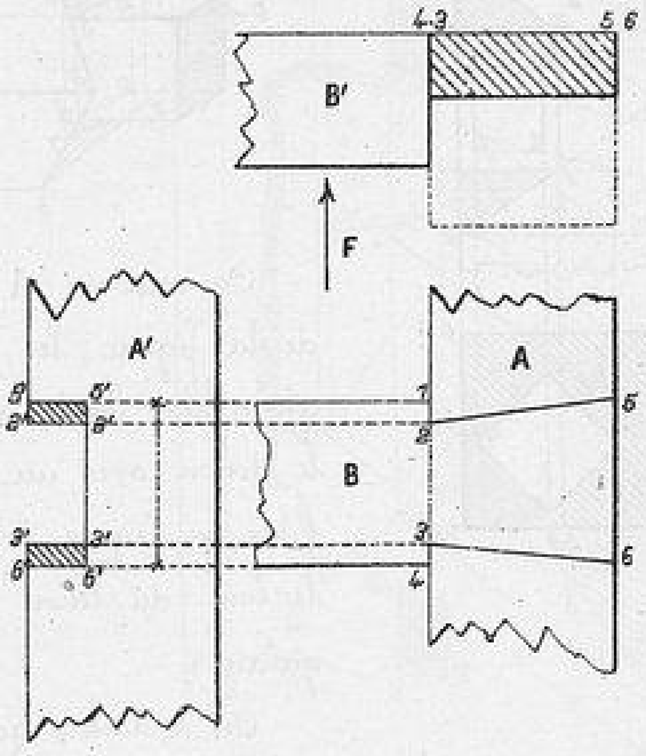


Fig. 15.

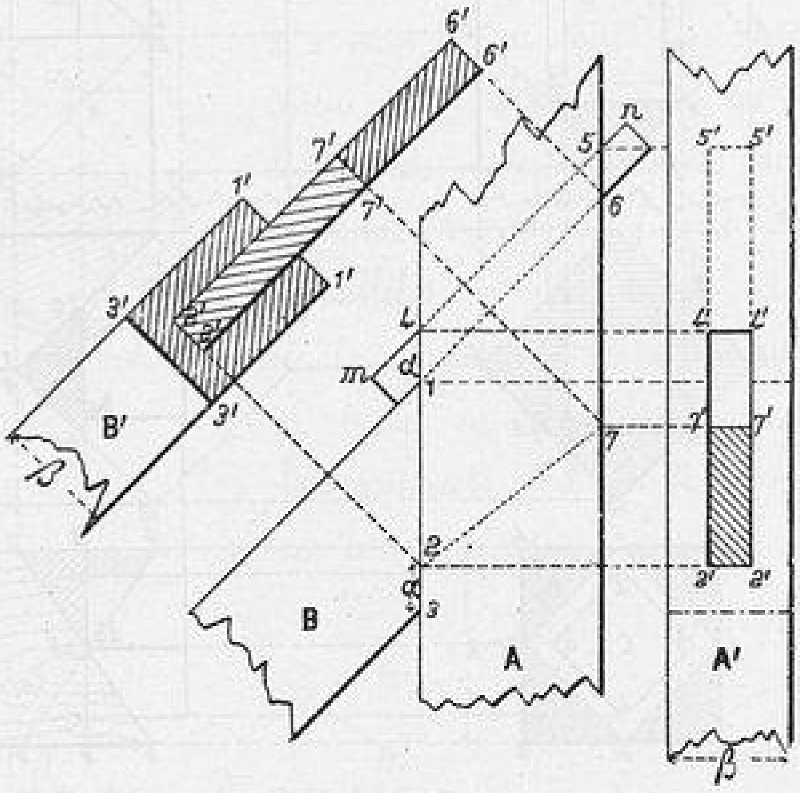
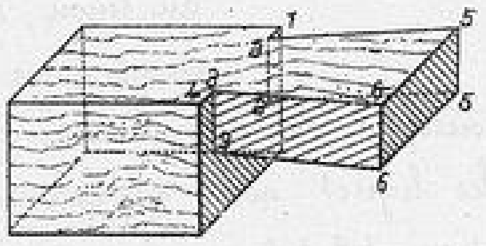


Fig. 14 bis

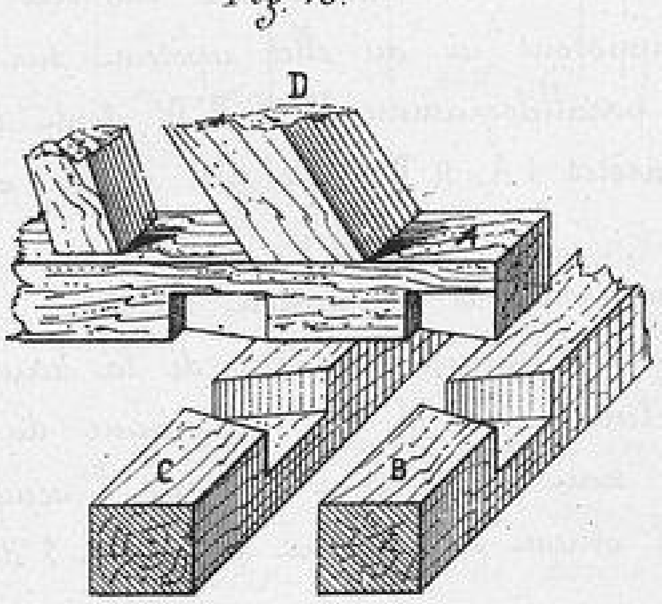


§ 16. – Assemblage oblique à tenon et mortaise en queue d'hironde, avec clef (fig. 15).

Le tenon fig. B 1.2.6.7. a la forme d'un trapèze. Le colet 1.2 est moins long que le bout 6.7 de la quantité 2.3 = α. Par conséquent pour pouvoir faire pénétrer le tenon dans la mortaise il faut donner à cette dernière une ouverture de colet 2.4 – 2'4' au moins égale à la dimension 6.7 du bout du tenon.

Une fois les pièces assemblées on comble l'intervalle laissé libre par une clef en bois mu.

Fig. 16.



Nota. – Cette clef doit être un peu moins épaisse d'un bout que de l'autre, afin de former coin, ce qui permet de serrer très énergiquement l'assemblage.

La forme en queue d'hironde est souvent employée, même dans des assemblages à mi-bois, lorsque l'on veut assurer d'une manière invariable l'écartement de deux pièces.

La figure 16 montre une disposition très usitée au moyen âge pour réunir aux sablières B et C, et rendre ainsi solidaires entre elles, les pièces telles que A, qui reçoivent les pieds des chevrons D.

§ 17. – Assemblage droit à tenon et mortaise sur l'arête (fig. 17).

Nous avons déjà décrit cet assemblage à propos de la perspective cavalière.

Fig. 17.

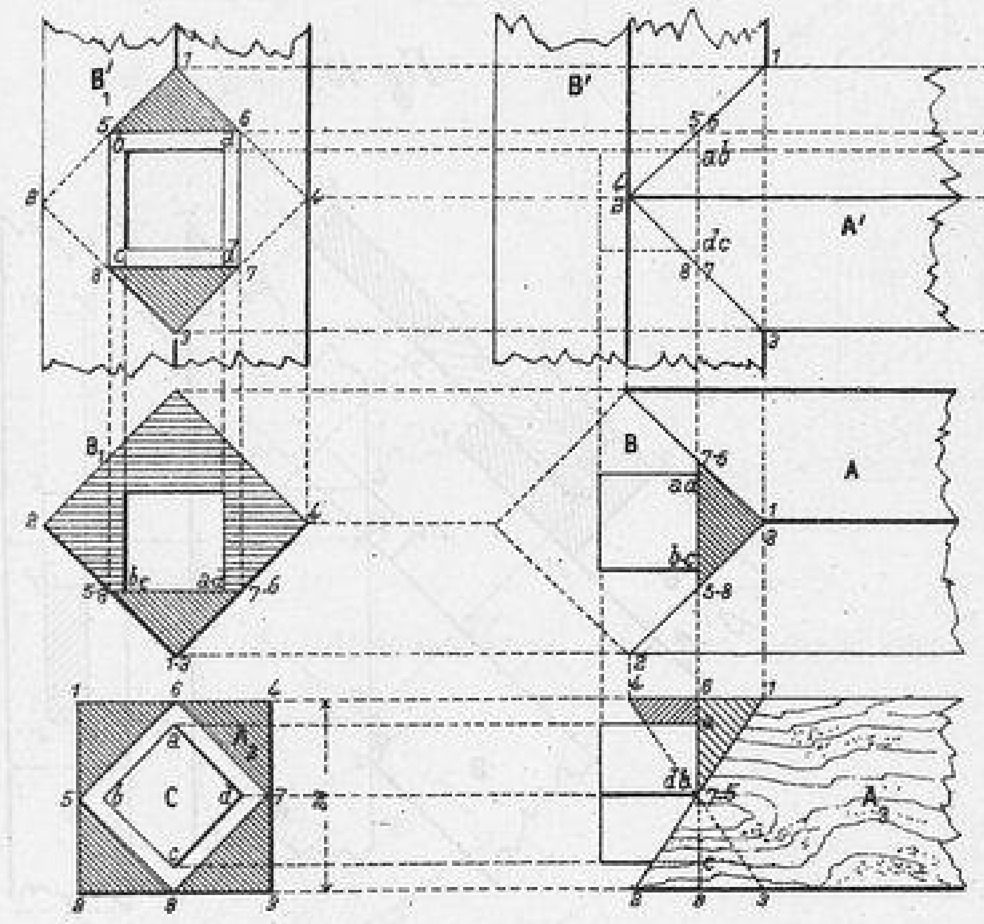
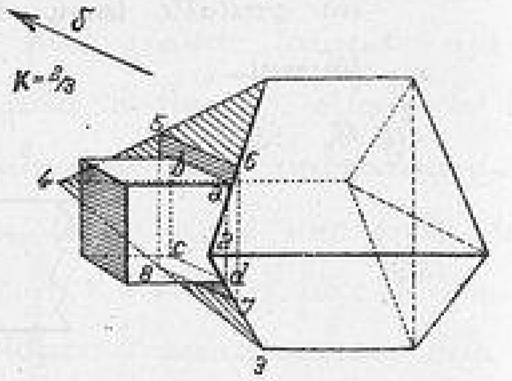


Fig. 17 bis



On voit en A' B' au centre de la figure, les deux pièces assemblées. Nous avons fait le tenon avec un bout carré. (Sur la figure de la 1ère partie le bout du tenon était rectangulaire).

On a donné quartier à la mortaise, en B'_1 à gauche, et au tenon, en A en dessous. Mais pour tailler les pièces il faut avoir les projections sur chaque face. C'est pourquoi on donne demi-quartier en $B_2 B'_2$ et en $A_3 A'_3$ à chaque pièce. Pour se retrouver dans les lignes nous rappelons qu'il faut, avant tout, bien déterminer le quadrilatère gauche d'occupation 1.2.3.4. ; puis ensuite le plan d'embase du tenon 5.6.7.8. qui est ici un carré et en déduire la racine du tenon a.b.c.d.

Stéréotomie.
2e Leçon.

§ 18. – Pièces délardées. – Assemblage oblique à tenon et mortaise (fig. 18).

On dit qu'une pièce est délardée lorsque sa section droite, au lieu d'être un rectangle est un parallélogramme. Délarder une pièce c'est lui enlever du bois.

Imaginons deux pièces G et K. Nous supposons ici qu'elles reposent sur le plan horizontal. La section droite de la pièce G est le parallélogramme M'N'P'Q', dont la hauteur est Z. La seconde pièce a pour direction de ses arêtes 1 A, 4 D.... etc. Sa section droite de hauteur Z également, est le parallélogramme A B C D.

On en déduit immédiatement le parallélogramme d'occupation 1.2.3.4.

Les joues du tenon (fig. K') sont 6-10 et 5-9 menées au tiers de la hauteur.

Le bout du tenon est 9.10 mené parallèlement à M'N'. La racine du tenon est le parallélogramme 5.6.7.8 (fig. K) dont les côtés sont parallèles à ceux de l'occupation.

Quant à l'about du tenon 7.8.11.12, on l'obtient en menant par 7 et 8 des perpendiculaires aux fibres de la pièce G.

On donne quartier à la pièce K (fig. K'') en la faisant reposer sur le sol par la face A D au lieu de reposer par la face A B. Il a donc fallu, pour cela, la faire tourner d'un angle

α. plus grand que un angle droit.

A cet effet le parallélogramme A"B"C"D" est une reproduction exacte de ABCD, obtenue en se servant de la 2e hauteur Df, reportée en D"f".

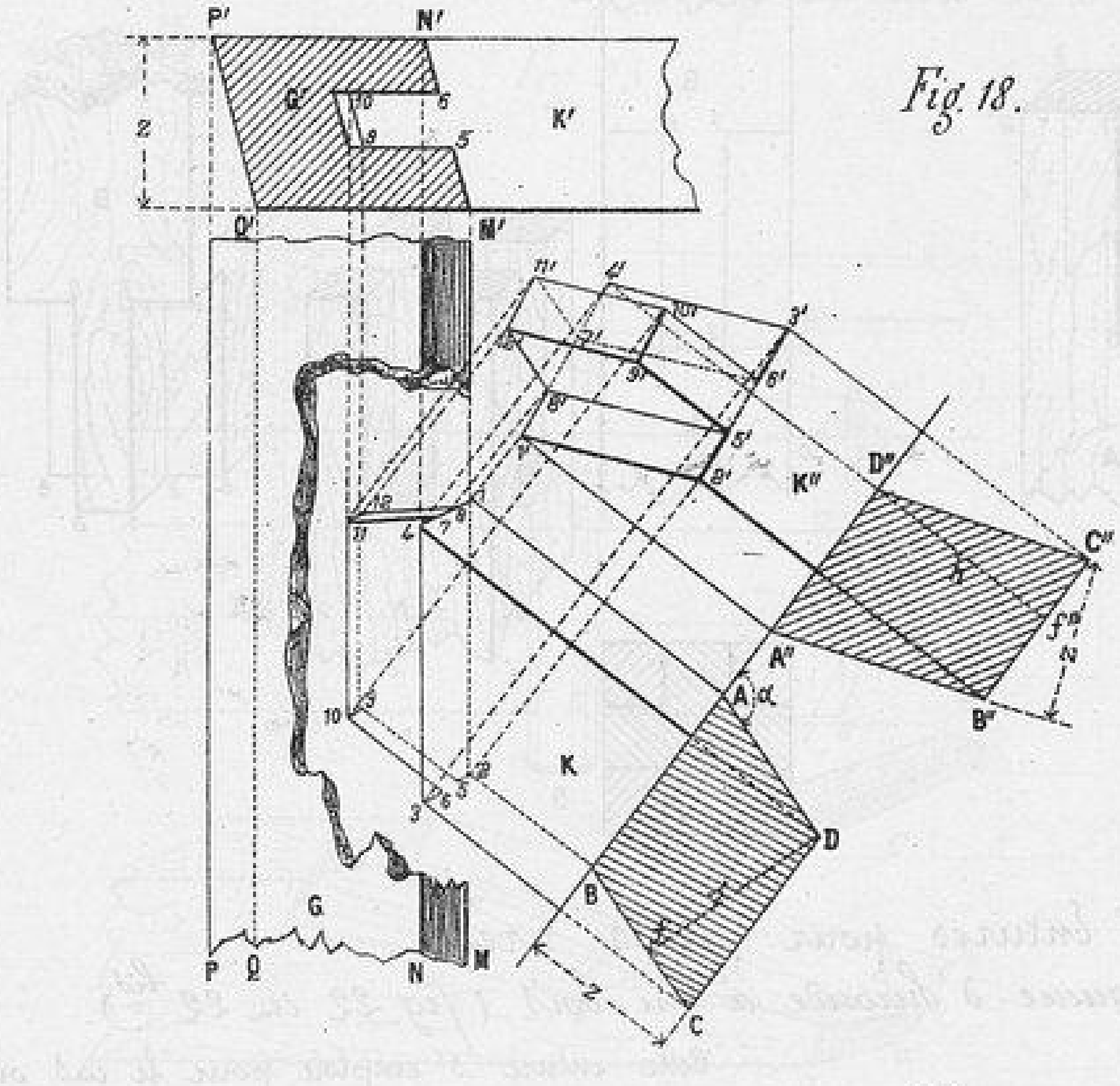


Fig. 18.

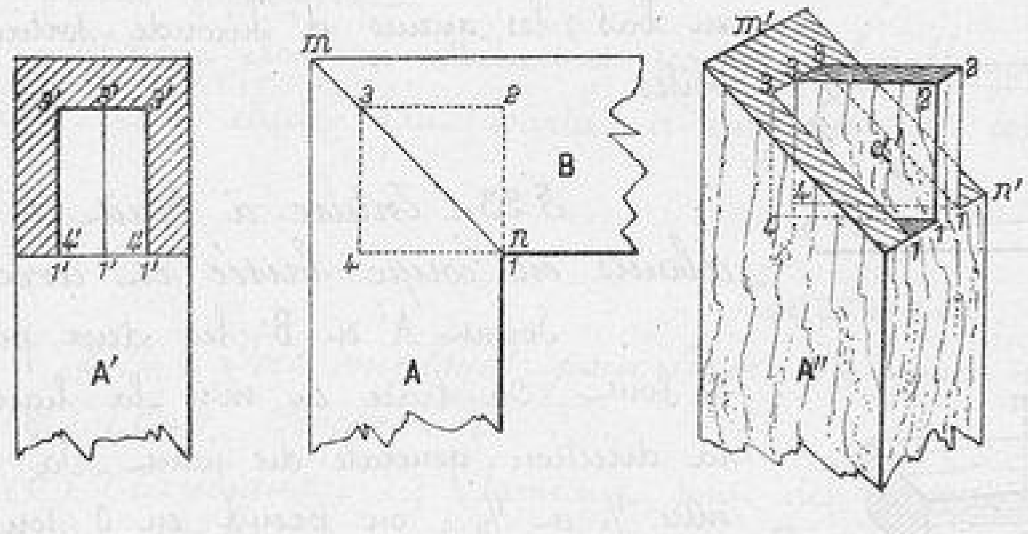
Les arêtes une fois mises en place, on obtient, par lignes de rappel, l'occupation 1'.2'.3'.4'.

Les points 5'.6' et 7'.8 de la racine du tenon sont pris au tiers des côtés 2'.3' et 1'.4' et tous les autres points du tenon sont obtenus par les rencontres des lignes de rappel menées des points correspondants de la figure K avec des parallèles à des lignes déjà connues de la figure K'. – L'about 7'8' – 11'12' se trace en dernier lieu en joignant les sommets 7'.8'. 11' 12' obtenus par ce qui précède.

3° Assemblages d'angle.

§ 19. – Assemblage d'onglet à tenons croisés (fig. 19).

Fig. 19. Fig. 19^{bis}.



Cet assemblage sert plutôt en menuiserie qu'en charpente.

L'occupation fig. 19^{bis} se fait suivant le plan incliné à 45° m'n'. – Chaque pièce porte un tenon α' triangulaire sur une joue et carré sur l'autre, à côté duquel se trouve une mortaise de capacité égale.

(B). – Les pièces se joignent en ligne droite. – Entures.

1° Entures pour pièces comprimées.

§ 20. – Enture par quartier à mi-bois (fig. 20 et 20^{bis}).

§ 21. – Enture à tenon et tenaille en croix (fig. 21 et 21^{bis}).

Il est inutile de donner des explications pour ces entures extrêmement simples. – Elles s'emploient surtout pour enter l'une sur l'autre des pièces de bois destinées à constituer un poteau.

Fig. 20.

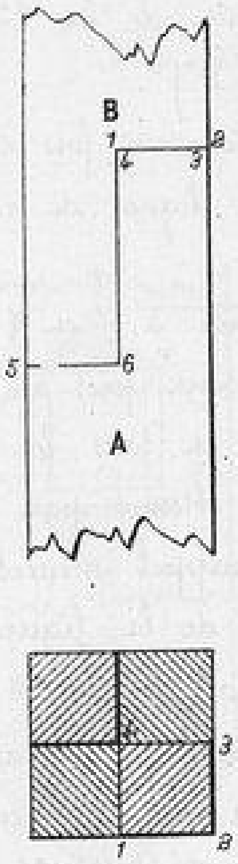


Fig. 20 bis.

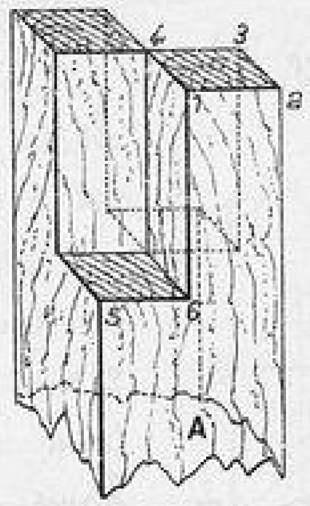


Fig. 21

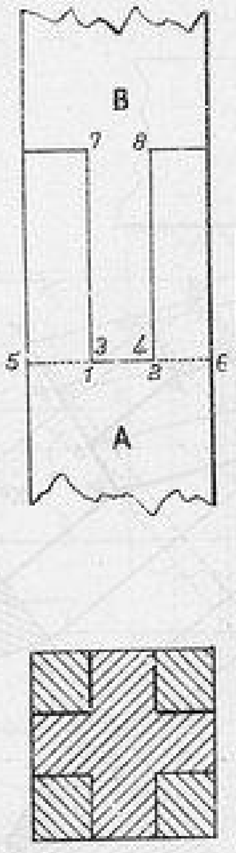
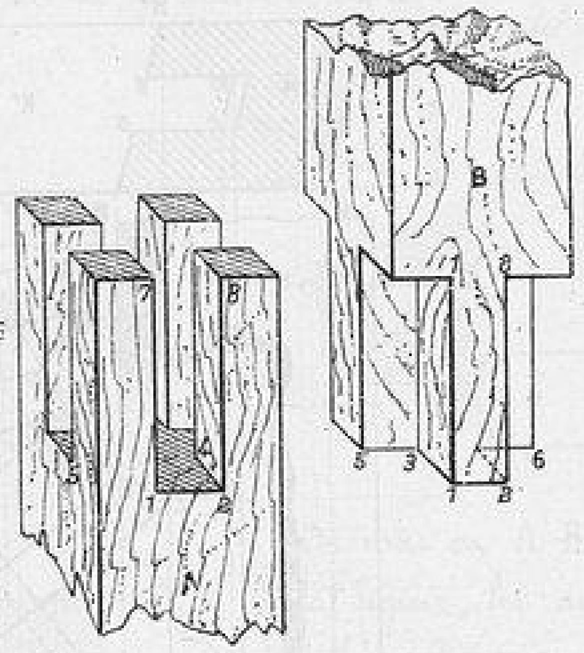


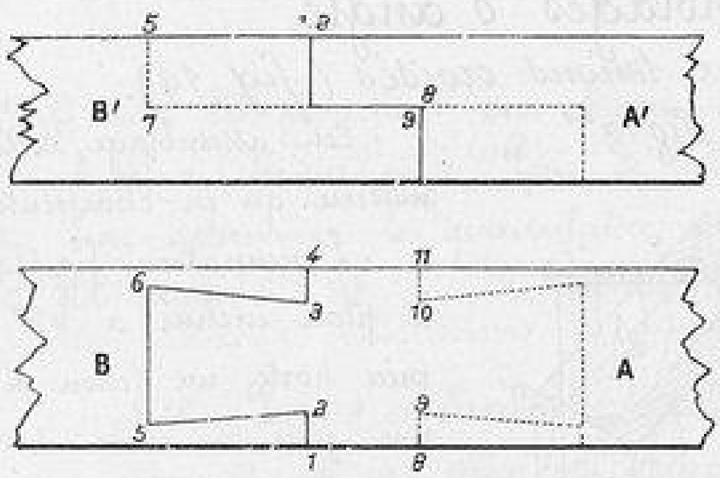
Fig. 21 bis.



2° Entures pour pièces tirées.

§ 22. – Enture en queue d'hironde à mi-bois (fig. 22 et 22 bis).

Fig. 22.



Cette enture s'emploie pour le cas où les pièces ont de légères tractions à supporter et où elles reposent sur le sol ou sur une plate forme horizontale; car si elles étaient suspendues en l'air elles se sépareraient l'une de l'autre par déplacement de haut en bas ; les queues d'hironde sortiraient de leurs boites.

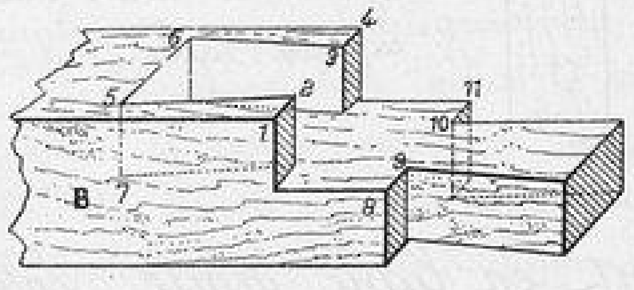


Fig. 22 bis.

§ 23. – Enture à trait de Jupiter, avec abouts en coupe brisée et avec clef. (fig. 23).

Soient A' et B' les deux pièces à réunir bout à bout. On trace en m n la ligne oblique indiquant la direction générale du joint. Sa pente est comprise entre 1/3 et 1/4 ; on prend en 0 son milieu et autour de ce point on trace la clef rectangulaire 5.6.9.10. Sa hauteur 6.5 est perpendiculaire à la direction m n, et comprise entre 1/5 et 1/6 de la hauteur de la pièce de bois.

Au joint m n, on substitue le joint 1.3.5.6.8.7. – La pièce B' a pour joint la ligne 7.8.10.9.3.1. – Il faut avoir soin que les lignes d'about 1.3 et 7.8 ne soient pas perpendiculaires sur m n, mais fassent en m.1.3 et en n.7.8. un angle aigu.

Une fois les pièces réunies, elles laissent entre elles un vide 5,6,9,10, dans lequel on

chasse la clef. (Cette dernière doit être légèrement taillée en coin).

A ce moment l'assemblage est serré et la séparation des pièces par traction est impossible.

Fig. 23.

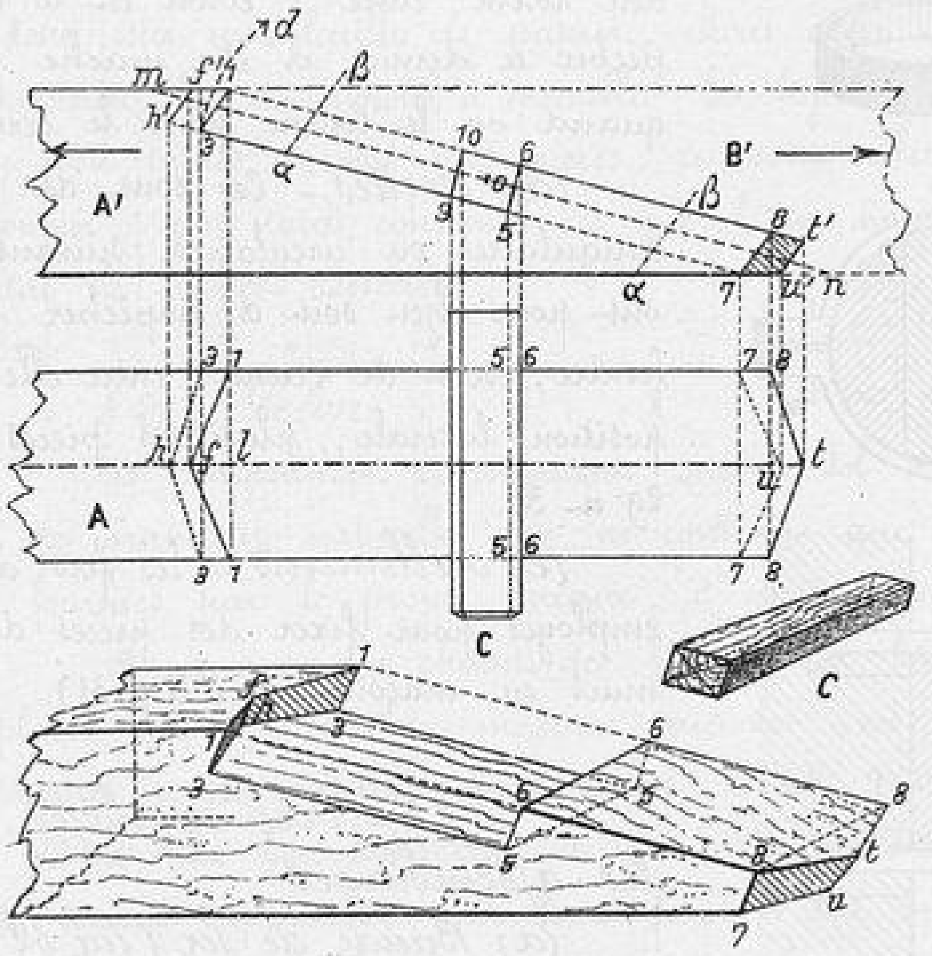


Fig. 23 bis.

En effet cette séparation ne se pourrait faire que par un soulèvement de la pièce B' et par une sorte de rotation de cette pièce autour du point 5 ce qui forcerait le point 3 à se déplacer suivant l'arc de cercle 3, d, or cela est impossible à cause de la saillie de la pointe 1, en dedans de ce cercle.

Toute la force de l'assemblage dépend donc de la résistance de la saillie m. 1. 3. C'est pourquoi si l'on veut augmenter cette résistance, on pourra substituer à la ligne 1, 3, la ligne α β, placée plus près du point 0.

Résistance au déplacement latéral. Si le joint était partout taillé en forme de prisme comme aux environs de la clef en 5, 6, 5, 6 (fig. 23 bis), un choc latéral pourrait amener la séparation. - C'est pourquoi (fig. A) l'about est tracé en coupe brisée suivant le triangle 1. f. 1. - Le reste du croquis se comprend facilement.

Nota. - Nous n'étudierons pas les assemblages des pièces en contact par leurs faces latérales. - Cette étude fait partie d'un cours de construction (Poutres armées).

Ferrures.

§ 24. - Fers employés pour fixer ou pour lier les pièces de bois.

(a) Clous. Broches. Vis.

(b) Clameaux. - Les clameaux sont des crampons à deux pointes coudées que l'on emploie pour fixer, les unes aux autres, les pièces de bois de charpente provisoire.

Fig. 24.

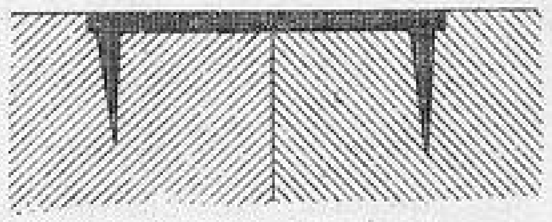
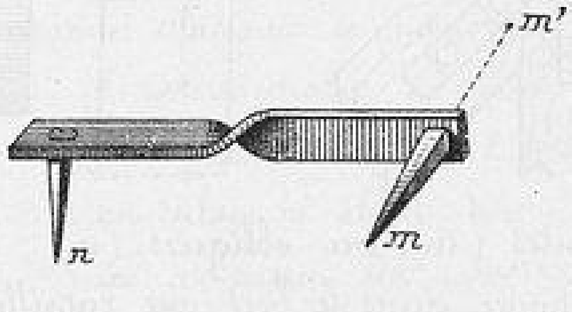


Fig. 25.



Clameau droit (fig. 24).

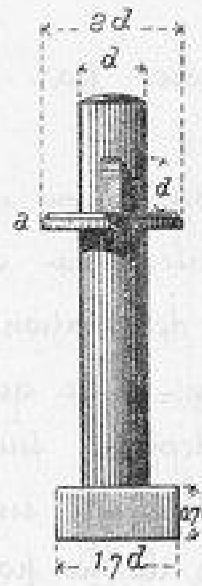
Clameau à deux faces, tourné à gauche (fig. 25).

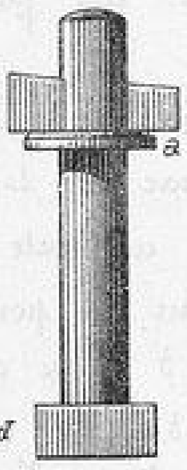
Il eût été tourné à droite si la pointe m, eût été placée du côté m'.

Les clameaux à deux faces servent à fixer ensemble des pièces qui se croisent.

(c) Boulons. - Ce sont des tiges de fer qui, au moyen d'arrêts à chaque extrémité, servent

Fig. 26.





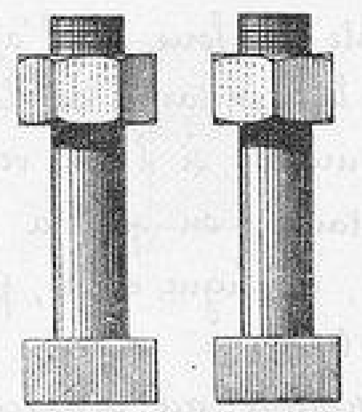


Fig. 27.

Fig. 28.

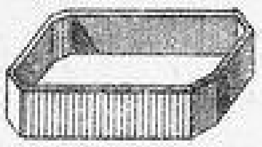


Fig. 29.

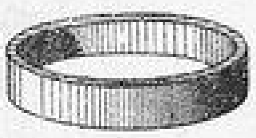


Fig. 30.

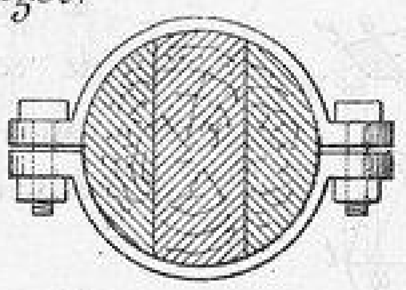
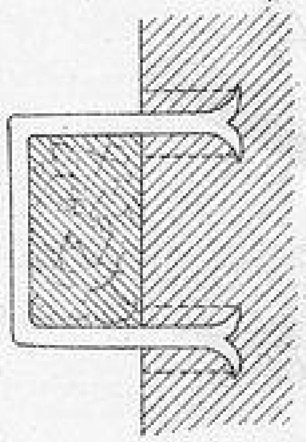


Fig. 31.



à lier fortement les unes aux autres les pièces de bois qu'elles traversent.

Boulon cylindrique à clavette (fig. 26).

Boulon cylindrique à écrou (fig. 27).

On doit toujours placer une rondelle a, dite rosette, entre l'écrou et le bois, pour empêcher ce dernier d'être mâché par l'écrou quand on le tourne pour le serrer.

(d) Frettes. - Ce sont des anneaux rectangulaires ou circulaires, suivant les cas, qui ont pour objet soit d'empêcher le bois de se fendre, soit de réunir entre elles, par juxtaposition latérale, plusieurs pièces de bois. fig. 28, 29 et 30.

(e) Scellements. - Les fers à scellement sont employés pour fixer des pièces de bois contre des murs en maçonnerie (fig. 31).

§ 25. - Fers employés pour consolider les assemblages.

(a) Bande de fer (fig. 32).

Ces bandes servent surtout pour les entures. Elles sont placées en m et n sur deux faces opposées et serrées par des boulons a et b.

Fig. 32.

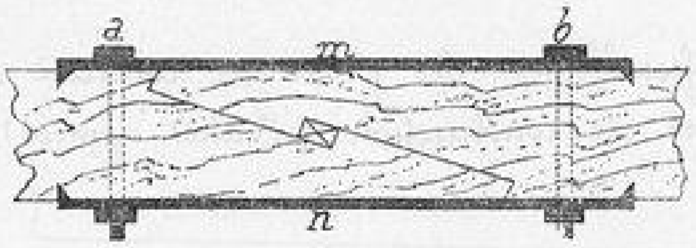


Fig. 33.

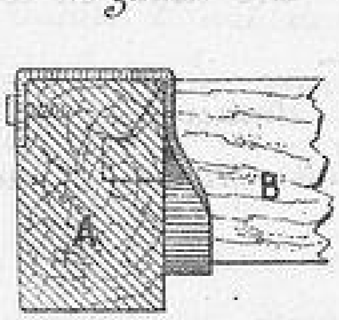


Fig. 35.

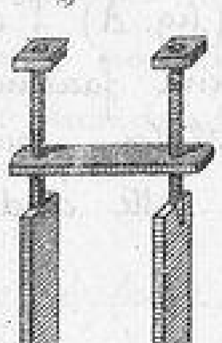


Fig. 36.

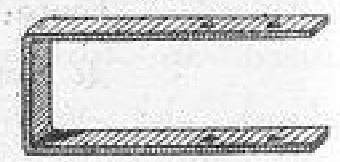


Fig. 35bis

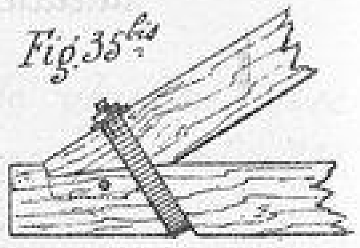


Fig. 34

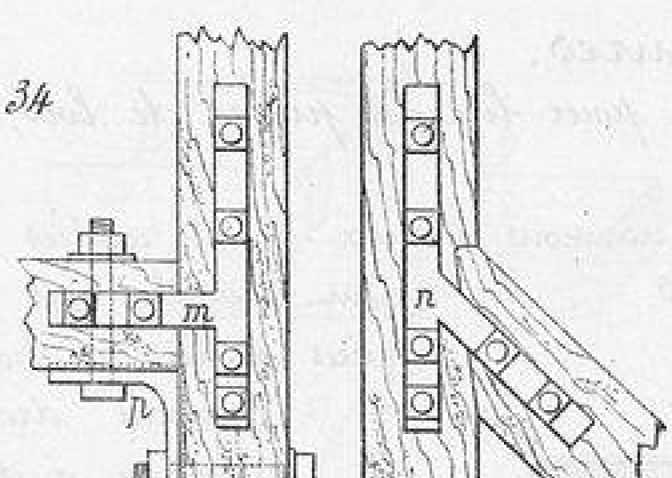
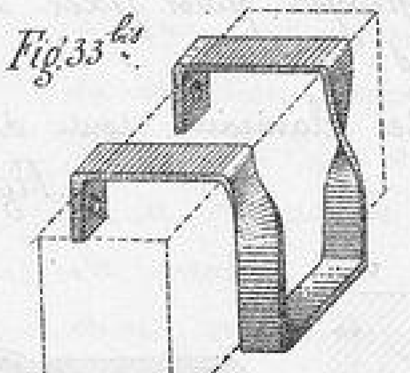


Fig. 33bis



(b) Etriers (fig. 33). - Ces pièces servent surtout dans les planchers, pour soulager le tenon à l'aide duquel une solive B s'assemble dans une poutre A. (Perspective fig. 33bis)

(c) Equerres (fig. 34). - On distingue les équerres à plat m et n, lesquelles peuvent être droites (m) ou obliques (n), et les équerres de champ p.

Il est bon de pratiquer dans le bois une entaille de faible profondeur à la demande exacte de l'équerre.

(d) Liens (fig. 35 et 36).

Exécution des ouvrages en charpente.

§ 26. – Dessins.

Le projet d'une charpente se fait sur des dessins exécutés à une échelle assez petite pour tenir sur une feuille de papier, mais assez grande cependant pour permettre d'y prendre, avec précision, les dimensions d'ensemble. Les lignes les plus importantes de ce projet sont les lignes d'axe (ou lignes de voie) des pièces ; ce sont elles surtout dont il faut coter les distances, afin de pouvoir, plus tard, construire ce que l'on nomme l'*Etelon*. L'ensemble de ces lignes d'axe constitue le *projet linéaire*.

§ 27. – Etelon.

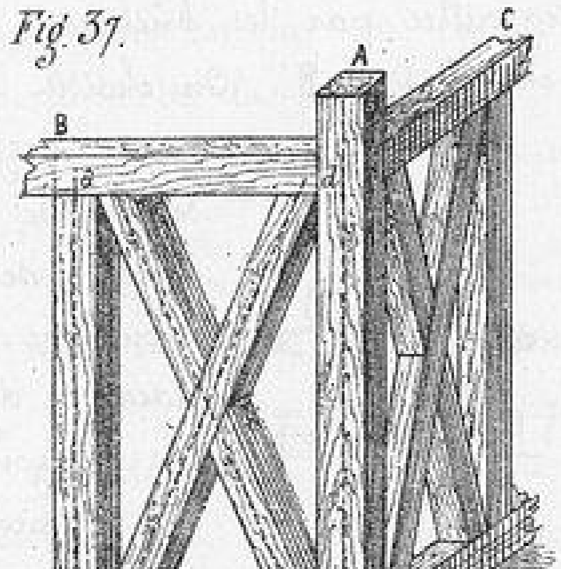
Les charpentiers reproduisent sur le sol du chantier, qui doit être uni et horizontal, un tracé de grandeur naturelle qui ne contient que les projections des lignes d'axe dont les distances sont fournies par le projet linéaire. C'est ce qui constitue l'*ételon*.

Après quoi on choisit des bois de la longueur et de l'équarrissage voulus et l'on vient les placer sur l'ételon de manière que les axes de la pièce de bois soient exactement à plomb des lignes correspondantes de l'ételon. C'est ce que l'on appelle *mettre les pièces sur lignes*. Nous dirons plus loin comment se fait cette opération. Il faut que les lignes d'axes des pièces soient rendues apparentes sur leurs faces ; cette opération se fait avec un cordeau et constitue ce que l'on nomme le *lignage*. Ainsi donc *ligner* une pièce c'est faire paraître sur chaque face la projection de son axe.

§ 28. – Etablissement des bois.

Imaginons que l'on ait à préparer l'exécution d'une croix de St André indiquée fig. 37, et dont les lignes sont marquées en a b, c d, ... Si les pièces avaient leurs assemblages taillés on les monterait par terre et on les mettrait sur lignes, leurs axes étant dans un même plan horizontal. – Mais les assemblages ne sont pas encore taillés et la pièce oblique a c par exemple, doit avoir, avant la taille, une longueur un peu plus grande que celle qu'elle aura définitivement. On ne peut donc la mettre sur lignes qu'en la plaçant dans un autre plan horizontal que les deux pièces a b et c d. Dès lors on est obligé d'étager les pièces les unes au-dessus des autres, en les faisant se supporter mutuellement soit directement soit par l'intermédiaire de cales. – Cet étagement, convenablement fait, des pièces constitue l'*établissement des bois*. Pour le réaliser on place d'abord sur le sol, les pièces les plus importantes ; ici ce seront les pièces a b et d c. – On les met sur leurs lignes, de niveau et de devers.

Fig. 37.



On dit qu'une pièce est *de niveau* lorsque sa face supérieure a son axe longitudinal bien horizontal. Elle est *de devers* lorsque, de plus, cette face supérieure est horizontale dans le sens de

sa largeur. - Cette mise de niveau et de devers s'obtient à l'aide du niveau de charpentier, comme nous l'indiquons plus loin. Au-dessus des pièces a b et c d, on placera, mais toujours sur leurs lignes, les pièces a d et b c, encore par dessus la pièce en écharpe a c, et, finalement, l'autre pièce oblique b d. En somme, il y aura quatre étages de pièces les unes au-dessus des autres.

§ 29. - Trait ramenéret.

Il peut se faire qu'une pièce, comme le poteau A de la figure 37, soit commune à plusieurs pans A B et A C.

Afin de gagner de la place sur le chantier, la mise sur ligne du pan A B, se fera sur la même partie du sol que celle du pan A C, et la pièce A commune aux deux pans aura, dans les deux opérations, la même ligne sur l'ételon. Dès lors il faut avoir soin de marquer sur cette pièce des repères, afin qu'en l'établissant sur ligne pour un pan, sa position soit d'accord avec sa mise sur ligne pour les autres pans. La ligne de repère dont, à cet effet, se servent les charpentiers se nomme un *trait ramenéret*. Il est signalé par une croix à ses extrémités. ×———————×

On voit figure 40, en perspective cavalière, deux pièces de bois M, et N, établies au-dessus de l'ételon. Sur la pièce de bois N, le trait ramenéret m est tracé perpendiculaire à sa ligne milieu a a'. De même sur l'ételon, le trait ramenéret M de l'ételon est perpendiculaire sur la ligne d'axe A A'. Mettre la pièce N, sur ligne, ce sera faire en sorte que le fil à plomb placé en a et en a' sur la pièce tombe bien sur la ligne A A' de l'ételon et la mettre en outre sur trait ramenéret ce sera faire en sorte que le fil à plomb placé au point m de la pièce tombe bien sur le trait ramenéret M de l'ételon.

Entrons dans quelques détails sur ces opérations diverses.

§ 30. - Lignage des bois.

Nous avons dit que ligner une pièce c'était faire apparaître sur ses faces la projection de son axe. - Pour y arriver supposons, fig. 38, en perspective cavalière que M N soit une pièce grossièrement équarrie et telle qu'elle sort de la forêt travaillée par les bûcherons. Les bouts sont coupés carrément à la scie; elle est posée sur des chantiers B B'. On choisit la face la

Fig. 38.

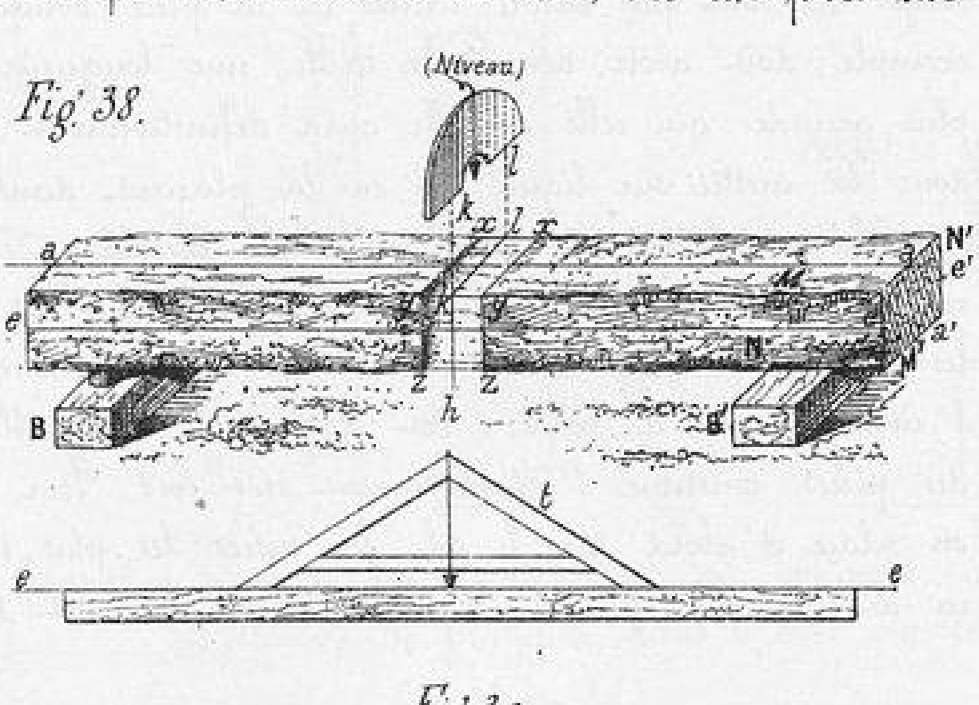
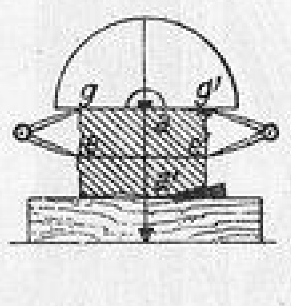


Fig. 39

Fig. 38 bis.



mieux dressée, celle qui sera mise en parement et on pose la pièce de façon que cette face soit placée en dessus et soit à peu près horizontale.

On pratique alors sur le milieu en x x y y, ce que l'on nomme une *plumée*. Cela consiste à raboter sur toute la largeur de la pièce un petit plan très bien dressé de 4 ou 5 centimètres d'étendue. On prend alors les milieux a et a des

extrémités et on bat le cordeau entre ces deux points, ce qui donne sur toute la longueur de la face supérieure une ligne, droite sur sa plumée, mais sinueuse sur la partie rugueuse de la pièce. Nous considérons cette ligne au cordeau comme la projection de l'axe de la pièce sur la face: elle se nomme la *ligne milieu* de cette face. Sur la plumée, en son milieu, on trace une perpendiculaire l.k à cette ligne milieu, c'est ce que l'on nomme le *trait carré* de la face M. On donne alors quartier à la pièce et c'est la face N que l'on met horizontale. On y pratique une plumée ZZ.yy. - On bat le cordeau entre les deux milieux e e des extrémités, et on en déduit le trait carré h K de cette nouvelle plumée, en ayant soin que le point K des 2 traits carrés situé sur l'arête d'intersection des deux plumées soit commun aux deux traits carrés; à ce moment la position de l'axe dans l'intérieur de la pièce est virtuellement déterminée. Il faut imaginer que par la ligne a a on fasse passer un plan perpendiculaire à la face M; si celle-ci est horizontale, ce plan fictif sera donc vertical. - Si par la ligne milieu e e de la seconde face N on imagine un second plan fictif perpendiculaire au précédent, l'intersection fictive dans la masse du bois sera l'axe de la pièce. - A ce moment on dit que la pièce est *lignée*

Contre-ligner la pièce c'est faire apparaître sur les deux autres faces M' et N' leurs intersections par ces deux plans fictifs prolongés. - Nous parlerons plus loin du contre-lignage (§ 32).

§ 31. - Établissement de devers.

A cet effet, il faut d'abord établir la pièce *de devers*. Cela se fait en plaçant un niveau f sur le trait carré lK et à l'aide de petits morceaux de bois dits *coins de devers*, chassés plus ou moins sous la pièce, on redresse la pièce du côté voulu et on rend lK horizontale.

§ 32. - Contre-lignage.

Une fois le devers obtenu, on place le niveau à l'extrémité, (voir fig. 38bis) et comme la pièce à cette extrémité sera peut être un peu rugueuse, il y aura sans doute besoin de caler le niveau d'un côté, en g'. - Néanmoins, on est sûr, au moment où il est battant, que le dessous du niveau est parallèle au trait carré lK.

Au compas on reporte alors la longueur ge de g' en e' et on a un point e' de la contre-ligne de la face N'.

Un point a' de la contre-ligne de la face inférieure M' s'obtiendra par un fil à plomb placé en a.

On répète cette opération sur l'autre bout de la pièce et battant le cordeau entre les points e'e' et a'a', on a ainsi *contre-ligné* la pièce.

Nota. - Comme le lignage et le contre-lignage, faits au cordeau, pourraient s'effacer on aura soin de piquer à la pointe et d'une manière très apparente deux points de chacune des lignes et contre-lignes, ce qui plus tard permettra de battre de nouveau le cordeau entre les points, quand on le voudra.

§ 33. - Mise de niveau.

Une fois la pièce établie de devers, il est évident qu'elle sera de niveau si le trait carré hK de la plumée yy ZZ est bien vertical, ce dont on s'assure avec un fil à plomb. - Mais à cause

de la faible longueur de la ligne hK, ce procédé n'est pas très précis. Il est préférable, fig. 39, d'appliquer, avec deux pointes, une règle sur la ligne milieu cc', et de vérifier son horizontalité à l'aide d'un niveau t aussi long que possible. On obtient l'horizontalité au moyen de coins de niveau, placés à un bout ou à l'autre de la pièce.

On peut alors procéder au piqué des bois.

§ 34. Piqué des bois.

Piquer les bois c'est faire apparaître, sur les faces des pièces, les occupations de celles qui devront s'y assembler.

La figure 40 donne, en perspective cavalière, deux pièces de bois M, et N, établies sur leurs lignes au dessus de l'ételon. On suppose que l'on veuille exécuter l'assemblage oblique par tenon et mortaise avec embrèvement, indiqué géométralement au dessus, fig. 40bis.

Fig. 40bis.

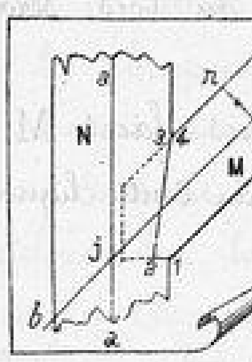
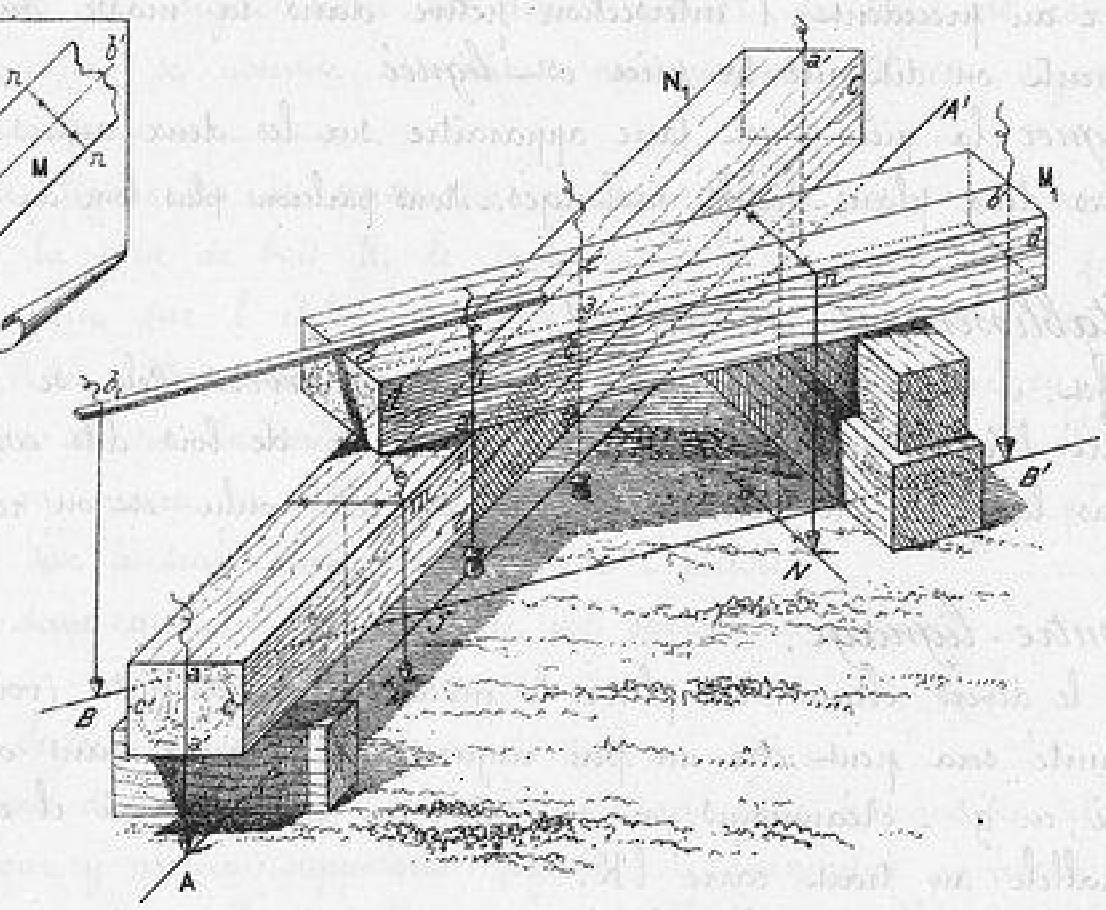


Fig. 40.



La pièce N, commence par être établie sur sa ligne AA et sur son trait ramenéret M. A cet effet, elle est placée sur des chantiers qui, pour ne pas compliquer le dessin ne sont pas tous figurés sur le croquis ci-joint; elle est mise de devers et de niveau et déplacée par petits mouvements jusqu'à ce que, d'une part, le fil à plomb placé en a et en a' aux extrémités de la ligne milieu tombe en A et A' sur la ligne de l'ételon et que, d'autre part, le même fil placé en m à l'extrémité du trait ramenéret de la pièce tombe en M sur le trait ramenéret de l'ételon.

La pièce M est à son tour et de la même manière, mise sur ligne et sur trait ramenéret; mais il est nécessaire pour cela de la superposer à la pièce N. Pour la mise sur sa ligne BB' comme elle est trop courte, on est obligé de clouer, par deux pointes, une règle bb, sur le prolongement de sa ligne milieu bb' et de se servir de cette règle pour faire tomber en bB, le fil à plomb. Cet ensemble d'opérations constitue, ainsi que nous l'avons dit plus haut, l'établissement des bois.

Une fois l'établissement des bois achevé, on place un fil à plomb dans l'angle obtus 1.2. et on le fait battre jusqu'à ce que, tout en restant bien vertical, il touche à la fois les deux faces des pièces M et N. On maintient le fil bien en place et on pique, avec la pointe du compas sur chaque pièce, et le long du fil, deux points 1 et 2, 1' et 2'. On place ensuite le fil à plomb dans l'angle aigu 4.3 - 4'3' et on fait de même deux piqûres sur la face

normale de chaque pièce.

A ce moment le piqué des bois est achevé.

§ 35. – Reconnaissance des piqûres.

La reconnaissance des piqûres consiste à tracer avec la pointe du compas C, ou avec le traceret T fig. 41, en se guidant sur une règle, les contours des rectangles ou des parallélogrammes d'occupation. Il suffit évidemment de joindre les points 1.2 – 1'.2' – 1.4 .... etc.... et, pour cette opération, on est obligé de donner quartier aux pièces.

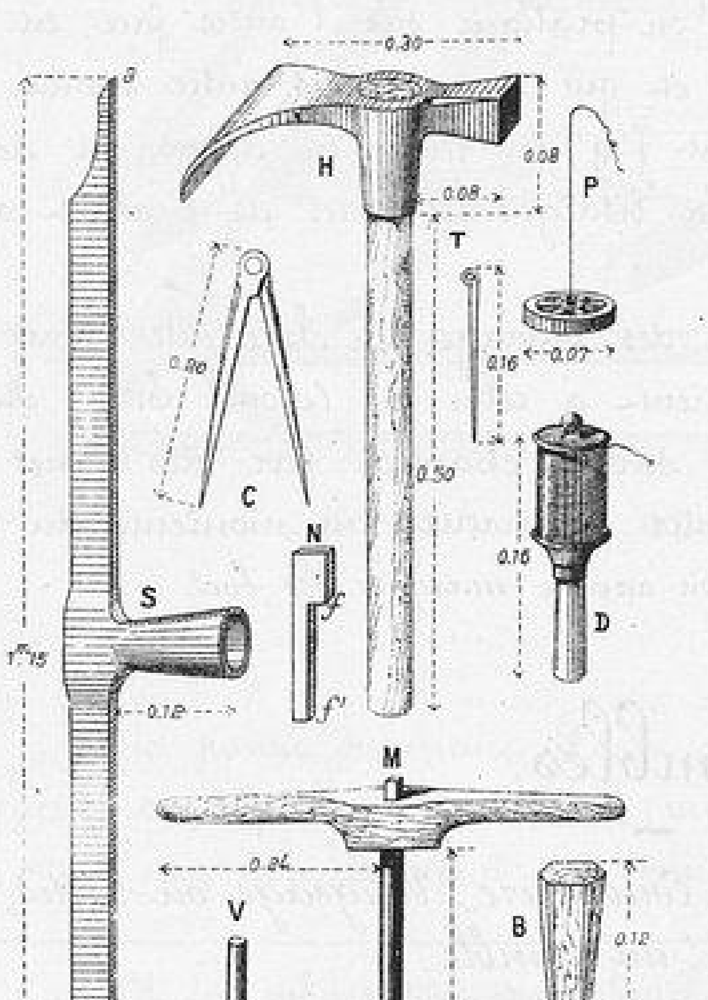
§ 36. – Tracé des assemblages.

C'est alors que l'on trace sur chaque face des pièces, en prenant toujours sa ligne ou sa contre-ligne milieu comme axe, les projections des assemblages, projections que nous avons appris à déterminer plus haut en étudiant les assemblages. Il est nécessaire que cette projection soit établie sur chaque face, et même sur le bout des pièces, parce que ces lignes multiples servent à guider la scie ou la bisaiguë à l'aide desquelles on coupe les bois.

§ 37. – Coupe des assemblages.

Nous donnerons une idée de cette opération en décrivant la coupe de l'assemblage précédent.

Fig. 41.

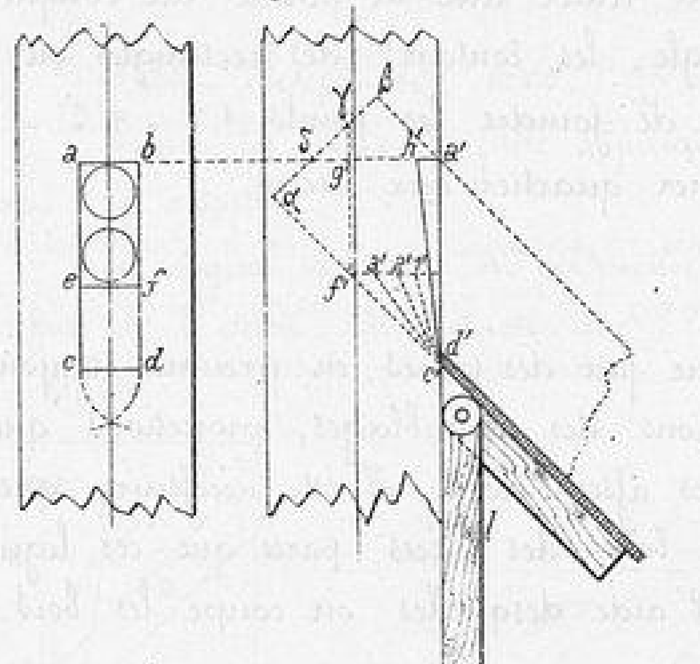


1° La mortaise. – La mortaise a été dessinée en projection sur les quatre faces ou au moins sur trois. Sur la face normale elle apparait en a, b, c, d (fig. 42). Dans le rectangle a, b, e, f situé en dehors du rampant f'e' de la mortaise, on commence par percer avec la tarière M, fig. 41 des trous de la profondeur que doit avoir la mortaise; on donne à ces trous un diamètre un peu moindre que la largeur de la mortaise et on apprécie le creux avec une petite broche en bois N dont la branche ff' a, bien exactement, la profondeur voulue. On dégorge ensuite la mortaise soit avec le bedane ordinaire B, soit avec le bedane de la bisaiguë, S a fig. 41. Les joues de la mortaise se terminent avec le ciseau S b, de la bisaiguë. Un calibre, que l'on promène en tous les points, permet de s'assurer que la largeur est bien uniforme et égale à ce qu'elle doit être.

On taille alors, avec le bedane le rampant c'f de la mortaise, en ayant soin de faire apparaître successivement des plans tels que c'1' – c'2' – c'3' ..... et n'arrivant que progressivement au rampant définitif c'f'. – Pour s'assurer que ce rampant a

bien la pente voulue, égale à celle du tenon, on prend sur le tenon cette pente, à l'aide de la Sauterelle l (fig. 42); puis plaçant une règle sur le rampant de la mortaise, on vérifie avec la sauterelle tenue comme l'indique la figure en l, que l'angle est bien obtenu.

Fig. 42.



L'embrèvement se taille en dernier; son about est obtenu par un trait de scie donné un peu en dedans de la ligne a'h'. Son pas c'h' est obtenu soit avec l'herminette (H, fig. 41), soit avec la bisaiguë.

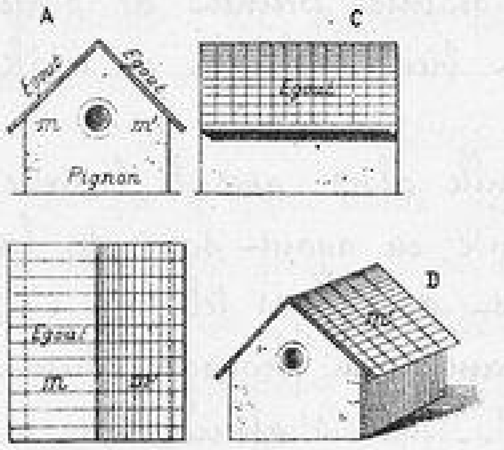
2° Le Tenon. D'un trait de scie on abat le triangle a'δ'δ', mais toujours en laissant du gras, c'est-à-dire en tenant le trait un peu en dehors de la véritable ligne a'δ' afin de pouvoir recaler c'est-à-dire dresser et finir à la bisaiguë le plan a'g'. On donne, de même, un trait de scie le long de la ligne f'g' et à ce moment la pièce a son extrémité formée par les plans a'g' et g'f'. On marque, avec le traceret, sur ces plans, les épaisseurs des joues du tenon. Un troisième trait de scie est donné suivant l'épaulement c'h' de l'embrèvement, mais en ayant soin de ne pas dépasser les épaisseurs des joues du tenon marquées sur les faces normales, c'est-à-dire ordinairement, le tiers de l'épaisseur totale de la pièce. On donne ensuite deux fois quartier, et l'on pratique sur l'autre face, en parement, un autre trait de scie analogue au trait c'h' et qui préparera l'autre moitié de l'épaulement. On donne alors quartier, en mettant le bout f'g' du tenon en dessus; on dégrossit le tenon à la hache, et pour finir, on recale à la bisaiguë les joues et l'about du tenon ainsi que l'épaulement de l'embrèvement.

Pour plus de détails sur l'exécution des ouvrages en charpente, nous renverrons aux traités spéciaux de charpente et particulièrement à celui du Colonel Emy. Nous dirons seulement qu'il est nécessaire de marquer sur le chantier par des signes spéciaux les assemblages qui se correspondent afin d'éviter des erreurs au moment du levage et du montage de la charpente. C'est ce que l'on appelle *marquer les bois*.

Combles.

Stéréotomie.
3e Leçon.

Fig 43.



§ 38. Couverture. Voligeage ou lattis. Chevronnage. Pannes d'un comble.

Couvrir un édifice c'est le garnir à sa partie supérieure, d'une surface imperméable qui rejette au dehors les eaux pluviales.

Si (fig. 43) l'édifice est sur plan rectangulaire la couverture sera, en général, établie suivant deux plans inclinés m et m' que l'on nomme les égouts du toit.

Parmi les nombreux genres de couverture qui existent nous mentionnerons: Le chaume (ou couverture en paille). Les tuiles plates ou les tuiles à emboitement. Les ardoises. Les dalles de pierre. Les couvertures métalliques en zinc, en tole de fer, en tole de cuivre, ou en plomb .... etc .....

Quel que soit le genre de la couverture, il faut, pour la recevoir, que la partie supérieure de l'édifice soit disposée soit en un parquet A (fig. 44) ordinairement formé par des planches de bois blanc (peuplier) nommées voliges (1), ce qui fait donner à ce parquetage le nom de voligeage, soit en un lattis B, formé par des lattes, en général assez espacées les unes des autres, sur lesquelles s'accrochent les tuiles.

Les voliges ou les lattes sont disposées dans le sens des horizontales du plan d'égout. Elles sont clouées sur des pièces de bois a, a', a" ...... nommées *chevrons* (2) qui sont ordinairement dirigées suivant les lignes de plus grande pente du plan de la toiture.

Fig. 44.

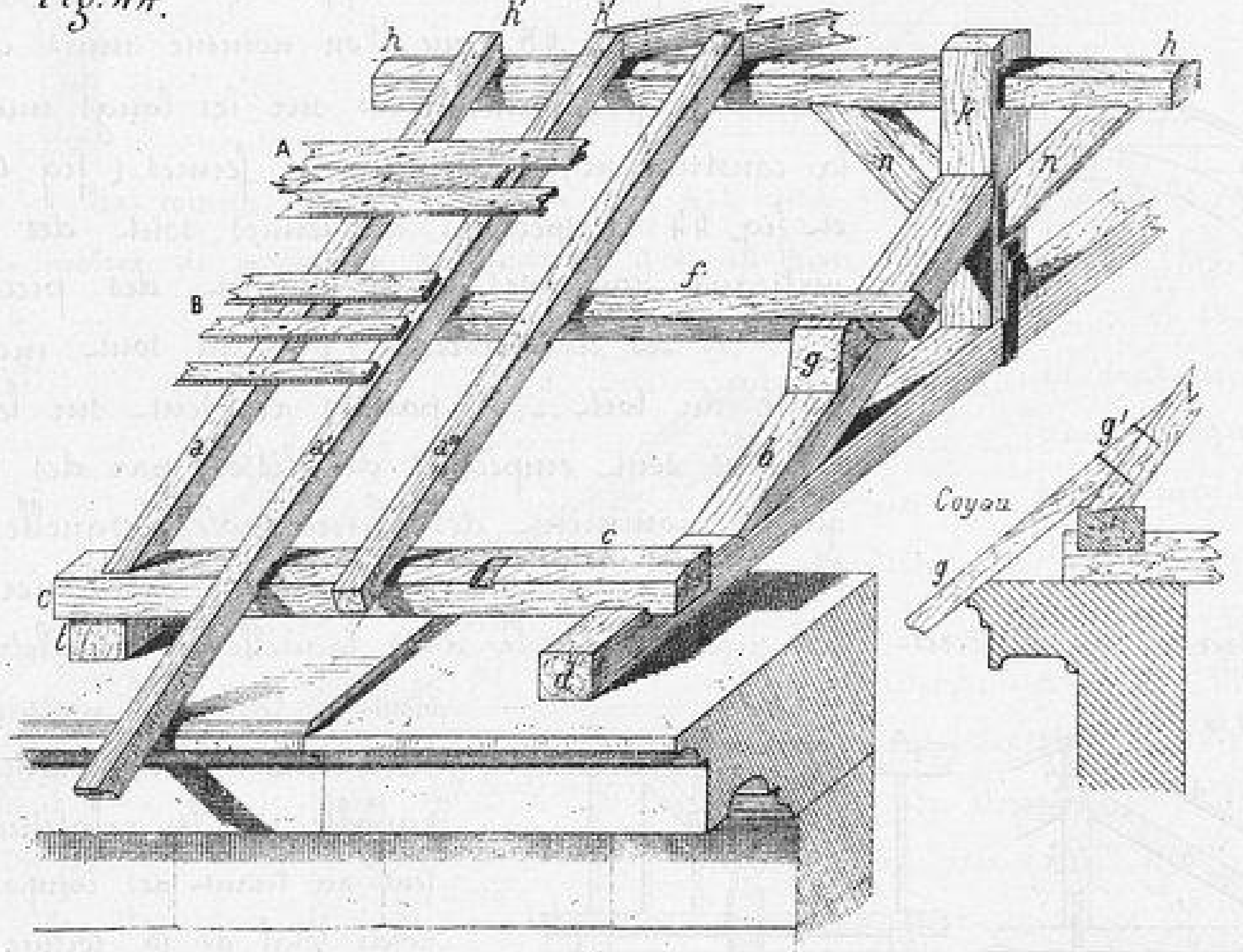


Fig. 44 bis.

Les chevrons, par leur ensemble, forment un pan de bois incliné qui se nomme le *chevronnage*.

Le plan incliné qui contient toutes les faces de dessus des chevrons se nomme le *lattis supérieur*, celui qui contiendrait toutes les faces de dessous et qui d'ailleurs est parallèle au premier se nomme le *lattis inférieur*.

Les chevrons sont à leur tour supportés par d'assez fortes pièces de bois nommées *pannes* f, dont la direction est parallèle aux horizontales du toit.

La panne supérieure h, du comble se nomme la panne faitière ou *faitage*; la panne inférieure c, laquelle repose sur le mur soit directement, soit par l'intermédiaire du tirant d ou d'une cale en bois t, se nomme la *sablière*. Les chevrons s'assemblent de différentes

---

(1) Les voliges sont des planches de peuplier, qui ont de 1 à 2 centimètres d'épaisseur sur 0m,21 centimètres environ de largeur. On laisse entre elles un écartement de 1 à 2 centimètres pour permettre la circulation de l'air.

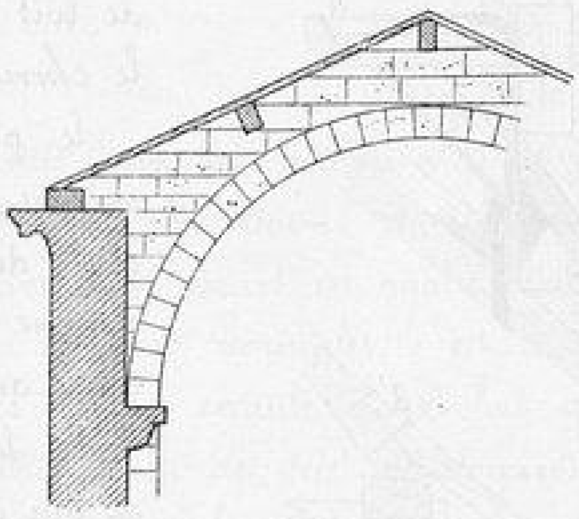
(2) Les chevrons sont des pièces de bois le plus souvent en chêne ou en sapin qui ont un équarrissage de 8c sur 12c environ. Leur espacement est compris entre 0M,33 et 0M,60 il dépend du poids de la couverture et des charges accidentelles (neige, pression du vent...), qu'elle peut avoir à supporter.

manières dans la sablière. La meilleure est celle indiquée en a, fig. 44, elle consiste en un simple embrèvement, sans tenon.- Le chevron peut, comme en a', dépasser la sablière et déborder la corniche du mur. Alors il est assemblé par entaille avec la sablière. Il en est de même pour la disposition a''. Mais il vaut mieux dans le second cas embrever le chevron dans la sablière, fig. 44 bis, ce qui le maintient très bien et clouer sur lui un bout de chevron coupé en sifflet à son extrémité g'.- Ce bout de chevron ainsi rapporté se nomme un *coyau*.

A la partie supérieure, c'est-à-dire au-dessus du faîtage, les chevrons d'un égout s'appuient simplement par leur extrémité taillée en biais sur les extrémités des chevrons correspondants de l'autre égout.

§ 39.- Termes.

Fig. 45.



Les pannes seront supportées soit par des murs pleins ou évidés, fig. 45, que l'on nomme murs de refend et qui sont perpendiculaires sur les longs murs de face de la construction, soit par des fermes (fig. 46-47-48-49. et fig. 44 perspective) Les fermes sont des pans de bois verticaux composés essentiellement des pièces suivantes:

1°. *Les arbalétriers* (b), qui sont inclinés à la pente du toit.- Les pannes reposent sur les arbalétriers et elles sont empêchées de glisser par des tasseaux g.g. qui se nomment des *chantignoles*, lesquelles sont assemblées à tenon en mortaise dans l'arbalétrier.

2°. *Le tirant ou entrait* (d). pièce horizontale dans laquelle les arbalétriers s'assemblent à tenon et mortaise avec embrèvement. L'embrèvement est indispensable car les arbalétriers transmettent au tirant des composantes du poids total de la toiture qui sont souvent très fortes, d'autant plus fortes que la pente du toit est plus faible.

Fig. 46.

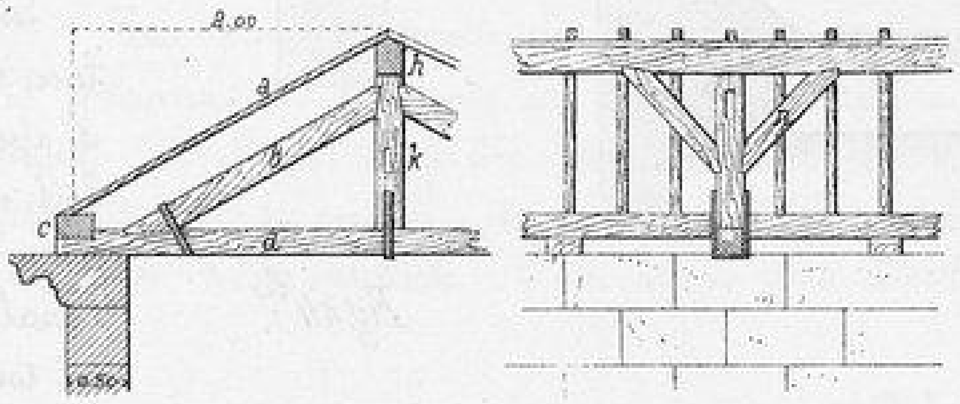
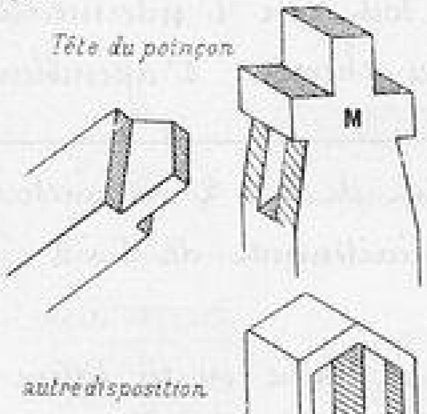


Fig. 46 bis



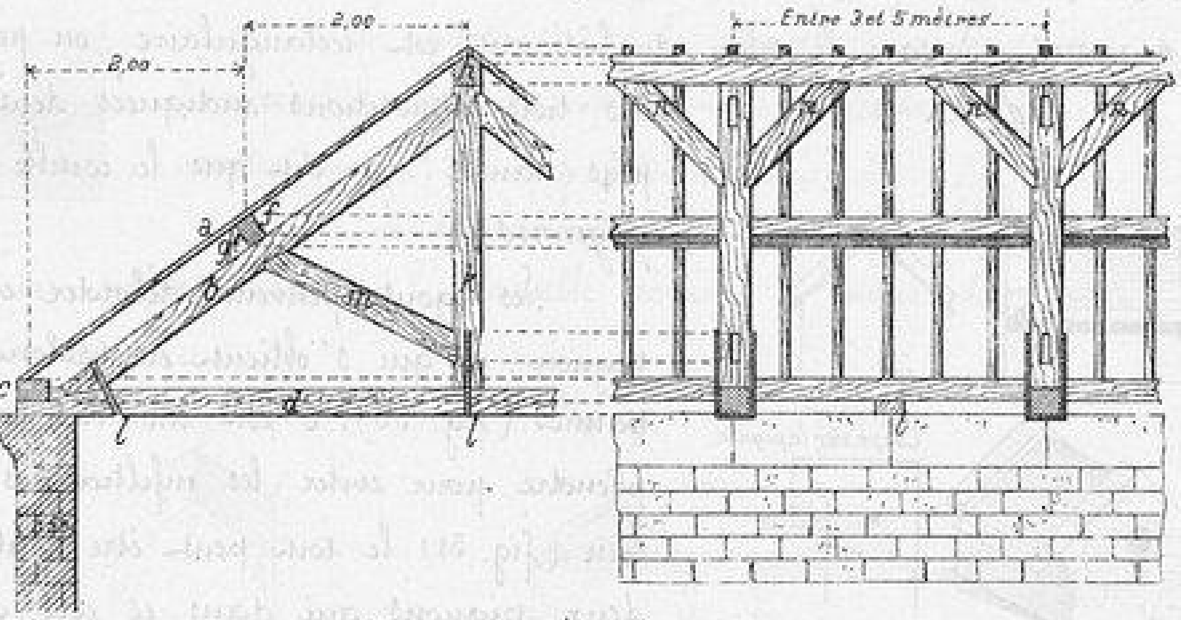
3°. *Le Poinçon* (K) pièce verticale toujours assez forte d'équarrissage surtout parce qu'elle est une pièce d'assemblage par excellence et qu'il lui faut un assez grand volume pour recevoir convenablement les extrémités des nombreuses pièces qui viennent y aboutir. Le faîtage s'assemble avec le poinçon soit comme il est indiqué en M fig. 46 bis, soit comme le montre le croquis N.

La disposition M est employée lorsque l'on doit avoir un chevron placé dans l'axe de la ferme. La disposition N convient lorsque le poinçon doit se prolonger en dehors du toit et former épi.

La figure 46 montre en élévation et en coupe une ferme de 4$^{m.}$ de portée.

Pour empêcher le *hiement* du comble c'est-à-dire le mouvement dû en général à l'action du vent qui tendrait à renverser les fermes les unes sur les autres, il est nécessaire de trianguler la construction dans le sens longitudinal. C'est pourquoi (voir les coupes fig. 46 et 47), des pièces obliques n, n, nommées des *liens*, relient les poinçons avec le faîtage.

Fig. 47.



L'ensemble du faîtage, des poinçons et des liens constitue ce que l'on nomme la *ferme sous faîte*.

Les pannes sont en général espacées (en projection horizontale) de 2 mètres en 2 mètres. C'est pourquoi un comble de 4$^{m.}$ de portée (fig. 46) c'est-à-dire de 2$^{m.}$ de demi-portée n'aura pas de panne courante.

Un comble de 8$^{m.}$ de portée (fig. 47) aura une panne courante g, sous chaque égout. Une ferme de 12 mètres de portée, en aura deux, g et g' pour chaque égout. (fig. 48 et 49).

Fig. 48bis

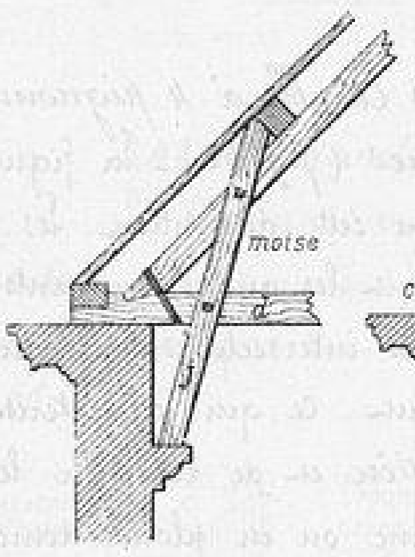
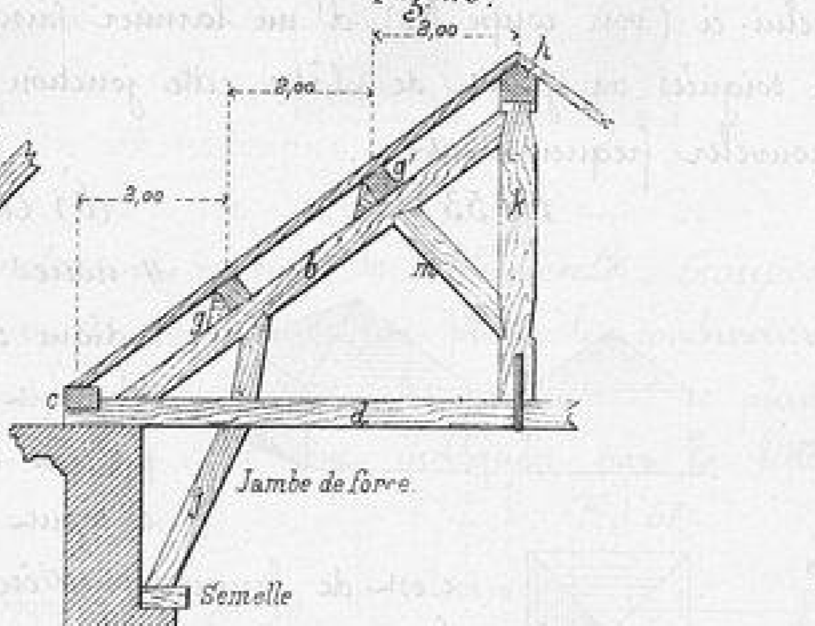


Fig. 48.



Il est nécessaire de soulager l'arbalétrier au droit de chaque panne. La panne supérieure g' aura, en général, sa charge reportée sur le poinçon par l'intermédiaire d'une pièce inclinée m, m ..... (fig. 47. 48. 49) nommée *contre-fiche*. La panne inférieure aura sa charge reportée sur le mur (fig. 48 et 48bis), ou sur un tirant inférieur d'd' (fig. 49 et 49bis) par l'intermédiaire d'une *jambe de force* J.

Fig. 49.

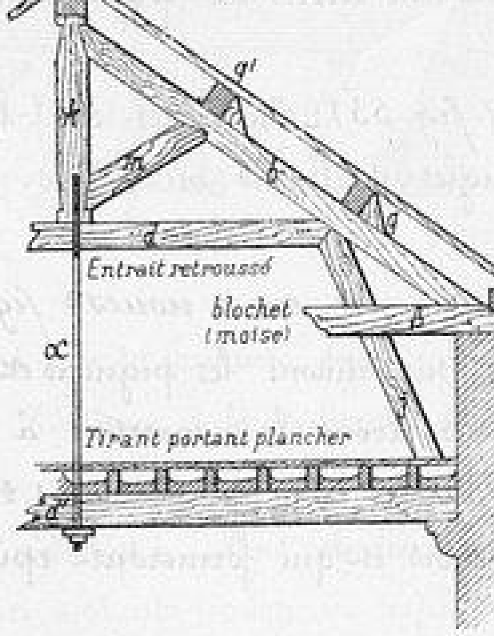
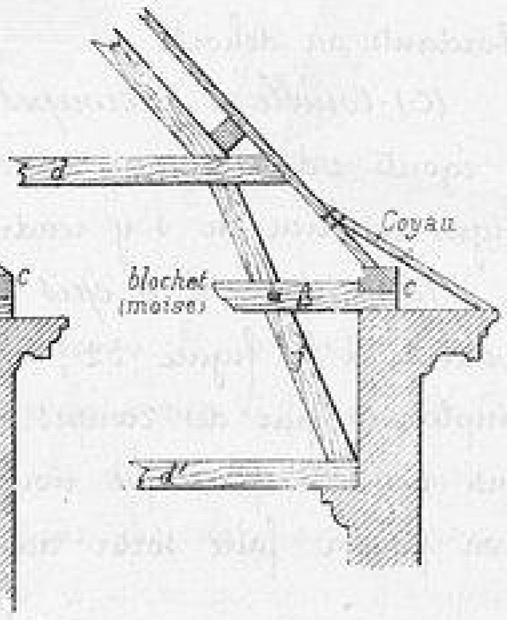


Fig. 49bis



La ferme indiquée 49 et 49bis, est conçue de manière à permettre l'habitation du comble. Le tirant inférieur d' porte un plancher, c'est pourquoi il est soutenu en son milieu par une *aiguille pendante* α, en fer, attachée à la partie inférieure du poinçon. Dans ce cas il y a un second entrait d, placé au-dessus du premier et que l'on nomme un *entrait retroussé*. Il arrive souvent que cet entrait retroussé au lieu d'être soumis à une traction, travaille, au contraire, à la compression. Dans le cas de la figure 49 et 49bis.

il est bon de rattacher la sablière et la jambe de force; cela se fait à l'aide d'une pièce horizontale nommée blochet que l'on peut considérer comme un tirant qui aurait été coupé. Un blochet est ordinairement formé de deux pièces jumelles formant moises autour de la jambe de force.

(Pour des fermes de plus de 12^{m} de portée, voir le traité de charpente du colonel Emy et le traité d'architecture de Léonce Reynaud).

§ 40. – Combinaisons de toitures.

(a) Comble à deux pignons. – Lorsque le plan du bâtiment est rectangulaire, on peut adopter une des trois dispositions indiquées déjà fig. 43 (voir plus haut). On dit que le comble est à deux pignons.

Fig. 50.

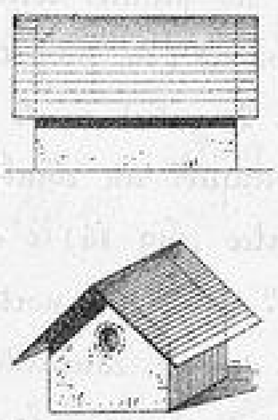
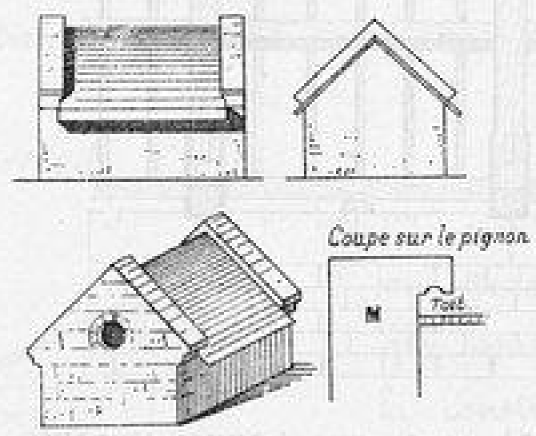


Fig. 51.



Les égouts peuvent déborder en dehors du pignon, ce qui s'obtient en prolongeant les pannes (fig. 50); c'est une très bonne mesure à prendre pour éviter les infiltrations d'eau. Ou bien (fig. 51) le toit peut être contenu entre les deux pignons qui dans ce cas doivent monter plus haut que lui. Afin d'éviter les infiltrations à la jonction de la couverture et du pignon, il est bon de munir intérieurement celui-ci (voir coupe M) d'un larmier faisant saillie.

Dans les constructions peu soignées on garnit de plâtre cette jonction. Cet enduit de plâtre se nomme un Solin; il faut le renouveler fréquemment.

Fig. 52.

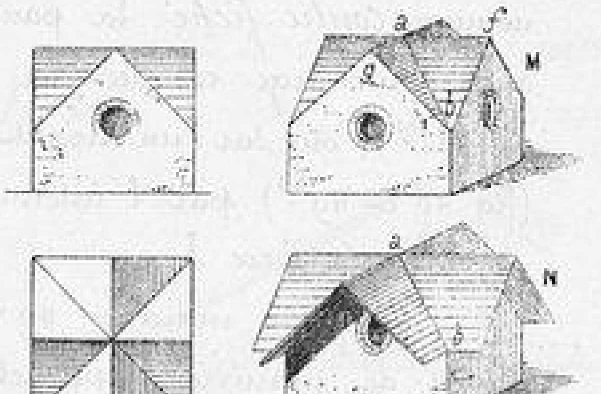
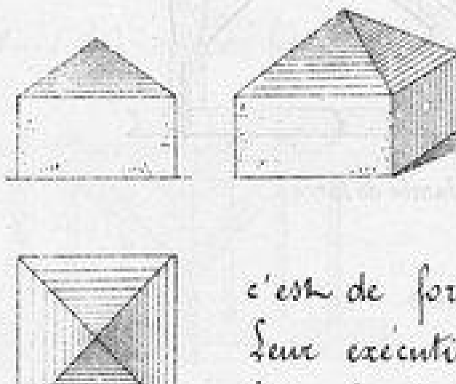
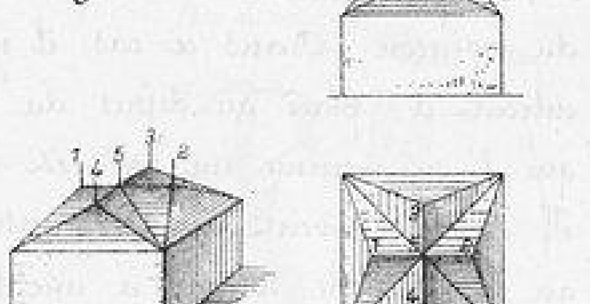


Fig. 53.



(b) Comble à 4 pignons et à 4 noues (fig. 52). – La figure ci-contre indique cette disposition. Les noues ab, ab sont les angles rentrants formés par les intersections des quatre plans d'égout. Ce qui caractérise une noue c'est de former gouttière et de recueillir les eaux. Leur exécution, en zinc ou en plomb demande, pour éviter les infiltrations, à être très soignée. – En M les toits sont arasés au droit des pignons, en N ils sont débordants au dehors.

Fig. 54.

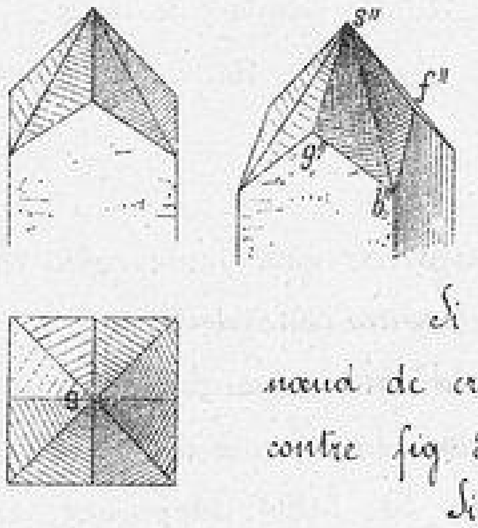


(c) Comble à 4 croupes (fig. 53). – Dans ces cas, les intersections des égouts cd, forment des angles saillants ou arêtes. L'eau s'en éloigne au lieu de s'y rendre.

(d) Comble à 5 épis (4 croupes et 4 noues) fig. 54. – Si revenant à la figure 52, nous supprimons les pignons et si nous les remplaçons par des croupes, nous avons la couverture à cinq épis; ainsi nommée parce que nous aurons cinq poinçons (1.2.3.4.5) que l'on pourra faire sortir au dehors et qui formeront épis.

(e). Combinaisons diverses – Clochers. – Revenons à la figure 52. Sans changer les pignons supposons que nous relevions peu à peu le point de croisement a, des noues. Les faitages a g – a f vont s'incliner et prendre (fig. 55) les positions s″f″ – s″g″. – On aura en s″b″ une gouttière et en s″g″ une arête.

Fig. 55.



Pour une hauteur donnée du point S (fig. 56) les arêtes et la gouttière tg_1 – tf_1 et tb_1 peuvent être dans un même plan.

Si partant de la couverture à cinq épis (fig. 54) nous relevons aussi le nœud de croisement N° 5, nous obtiendrons une des combinaisons indiquées ci-contre fig. 57 et fig. 58.

Si le bâtiment est formé en plan par deux rectangles qui se rencontrent, on pourra couvrir l'ensemble comme l'indique la figure 59. Nous aurons quatre croupes et quatre noues.

Fig. 56.

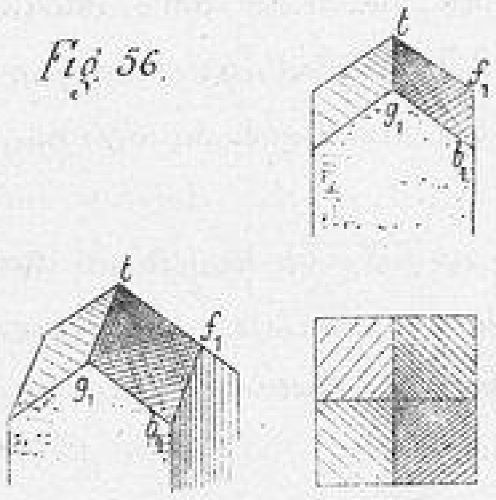


Fig. 57.

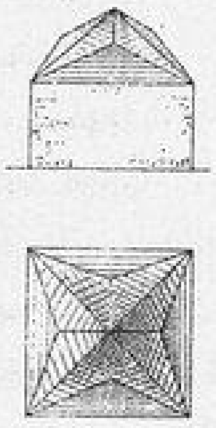


Fig. 58.

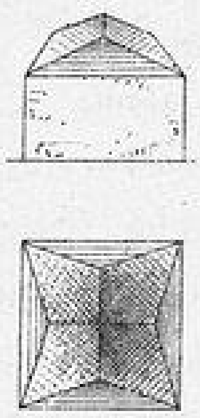
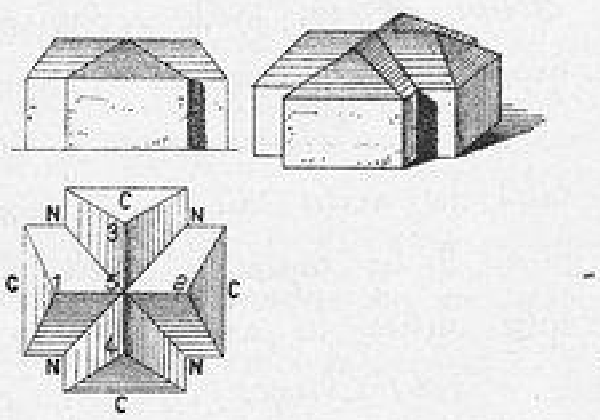


Fig. 59.



§41. – Rencontres et nœuds de batiments. – Croupes et noues, droites ou biaises.

Les figures 60 et 61 indiquent, en plan, les combinaisons de toitures adoptées pour des rencontres de batiments. Les croupes sont les rencontres de plans avec intersection faisant saillie, c'est-à-dire formant *arêtes*. Elles sont indiquées par la lettre C quand elles sont droites et C′ quand elles sont biaises.

Fig. 60.

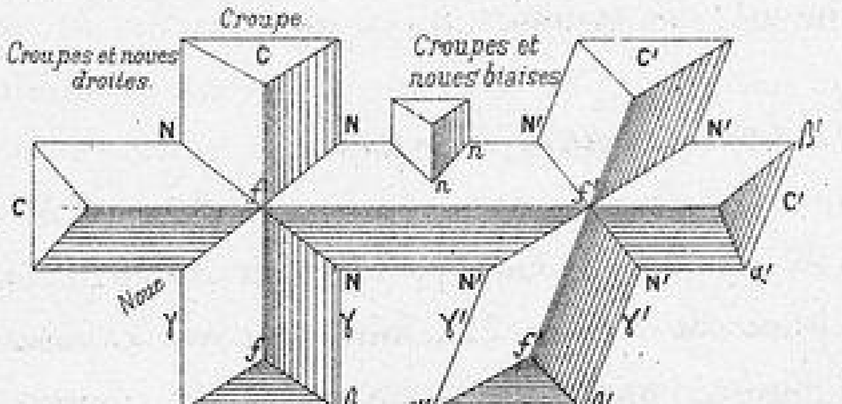
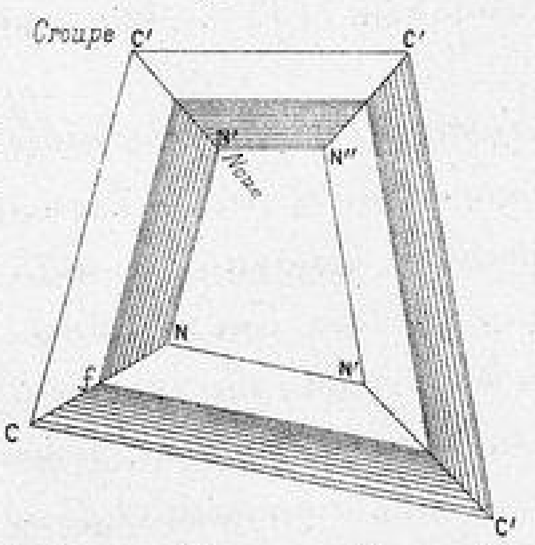


Fig. 61.



Les noues sont les rencontres de plans avec intersection rentrante formant gouttière. Elles sont indiquées par la lettre N quand elles sont droites et par la lettre N′ quand elles sont biaises.

Une croupe (ou une noue) est droite quand les horizontales des plans qui se coupent sont à angle droit l'une sur l'autre, elle est biaise, s'il n'en est pas ainsi.

Lorsque à la rencontre de deux bâtiments, le faitage du bâtiment le moins large (n,n, fig. 60), est plus bas que le faitage de l'autre, la noue plus petite ainsi formée, se nomme un *noulet*.

Nota. – Nous etudierons dans ces leçons une croupe biaise. La croupe droite ne serait

qu'une simplification de l'étude que nous allons faire.

Croupe biaise.

§ 42. - Définitions. (fig. 62, 63 et 64).

(a) Biais. - Le biais d'une croupe est donné par l'angle aigu α que font entre elles les directions des horizontales des plans qui se rencontrent. Si $\alpha = 90°$, la croupe est droite.

(b) Lignes d'about et lignes de gorge. - Ne nous occupons d'abord que du chevronnage. - On nomme longs pans les pans de bois ABZ - ABZ, inclinés formés par les chevrons qui constituent les toits principaux. Le pan de croupe BZB, sert à couvrir la croupe. Les lattis supérieurs recoupent le plan horizontal qui forme le dessus des sablières suivant des droites, qui portent le nom de lignes d'abouts.

Il y a les lignes d'about de long pan AB, AB, et la ligne d'about de croupe BB.

Les lattis inférieurs donnent comme traces horizontales sur le plan de dessus des sablières, les lignes de gorge. CD et CD sont les lignes de gorge de long pan, DD est la ligne de gorge de croupe. Il est facile de voir que les pas m, m, ... des chevrons seront des rectangles ou des parallélogrammes compris entre les deux lignes d'about et de gorge.

(c) Retournement. - Loi des homologues. - Si l'on trace en ZX et ZY, les projections horizontales des arêtes du trièdre constitué par les trois plans de lattis, on retourne sur ces arêtes aux points B et D les lignes d'about et de gorge et comme on le verra plus loin d'autres lignes encore ; entre autres les arêtes 1 et 2 du poinçon, les arêtes de la sablière, etc....

(d) Divers chevrons et empanons. - Les chevrons placés en ZX et ZY au-dessous des arêtes du trièdre, se nomment les chevrons d'arêtier, ou simplement les arêtiers. Les arbalétriers qui sont au-dessous se nomment les arbalétriers d'arêtier.

On voit en ZW, le chevron de croupe (au-dessous se trouve l'arbalétrier de croupe). Enfin en UV, le premier chevron de long pan et au-dessous l'arbalétrier de long pan.

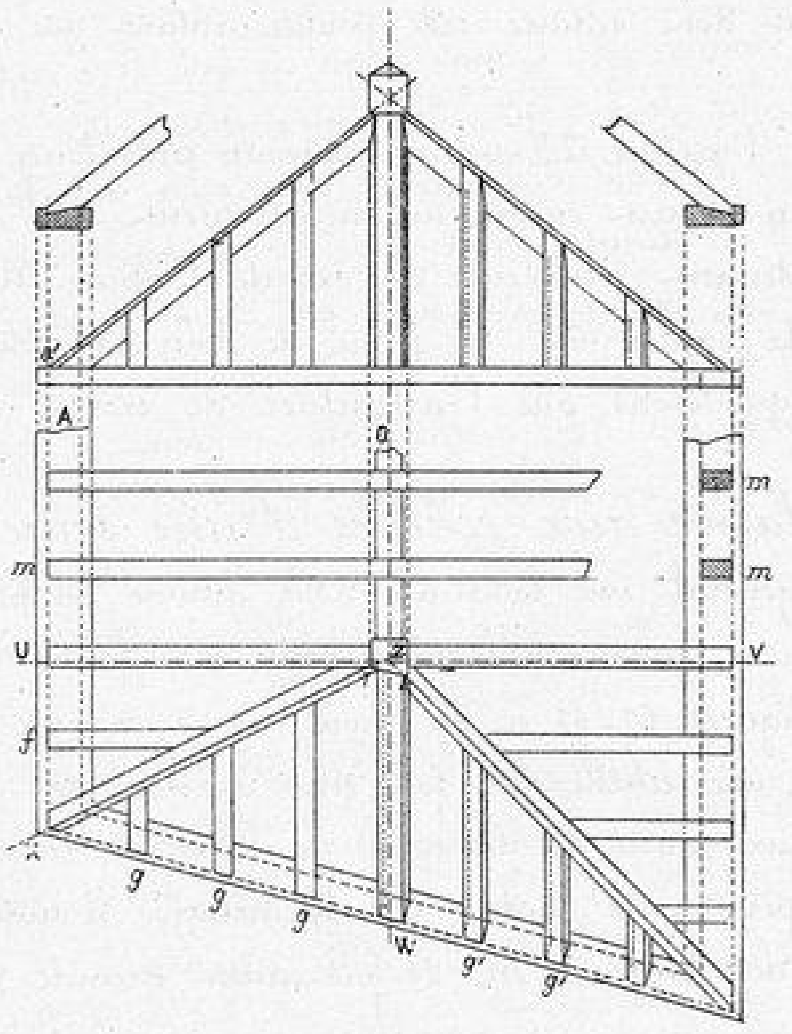
On nomme empanons, les chevrons qui rencontrent les arêtiers. Ils sont plus courts que les autres ; à la partie supérieure ils s'assemblent à tenon et mortaise dans l'arêtier. Il faut distinguer les empanons de long pan f, f, f, et les empanons de croupe g, g ...... g'g'.

§ 43. - Diverses dispositions d'ensemble des croupes biaises.

(a) Ferme droite de long pan et demi-ferme biaise de croupe. - Lorsque le biais n'est pas très prononcé on adopte la disposition indiquée (fig. 62). - La ferme de long pan UV est droite, c'est-à-dire perpendiculaire aux murs de long pan. La demi-ferme de croupe ZW fait suite à la ferme sous faîte ; elle est parallèle aux longs pans ; elle est donc biaise par rapport au mur de croupe. - Les empanons de long pan ff sont droits et leurs sections droites sont des rectangles ; ils seront faits avec des bois équarris ; - Quant aux empanons de croupe g, g, g'g' ; ils sont biais comme la demi-ferme de croupe. Alors si l'on veut, comme cela est indiqué à gauche en g, g, g, que leurs faces latérales soient verticales, cela entraîne à leur donner une section droite parallélogramme. Ils seront faits en bois délardés. Si on veut les avoir en bois équarris et éviter ainsi un délardement, il faut les déverser, ce qui veut dire que leurs faces latérales ne seront pas verticales. On voit des empanons

déversés en g'g'..... à droite. Le chevron de croupe ZW (ou l'arbalétrier de croupe qui est dessous) peut, lui aussi, être déversé (fig. 62) ou délardé (fig. 64).

Fig. 62.



(b) *Ferme droite de long pan et demi-ferme droite de croupe.* – Si l'on veut éviter de délarder et de déverser les pièces de la croupe, on place la demi-ferme de croupe (fig. 63) en ZW à angle droit sur son mur. Elle n'est plus alors dans le prolongement de la ferme sous faîte.

(c) *Ferme biaise de long pan et demi-ferme biaise de croupe.* – Si le biais est très prononcé, on place (fig. 64) la ferme de long pan parallèle au mur de croupe.

Alors toutes les pièces, aussi bien sur les longs pans que sur la croupe devront être délardées; ce qui rendra la construction plus coûteuse.

(d) *Pente de la croupe.* – Le plan incliné de la croupe doit avoir une pente plus forte que celle des longs pans. En général, on prend (fig. 63) la ligne de plus grande pente de croupe ZW, égale aux ⅔ de celle Zu ou ZV des longs pans.

Il y a deux raisons pour opérer ainsi:

1° La demi-ferme de croupe produit ainsi

Fig. 63.

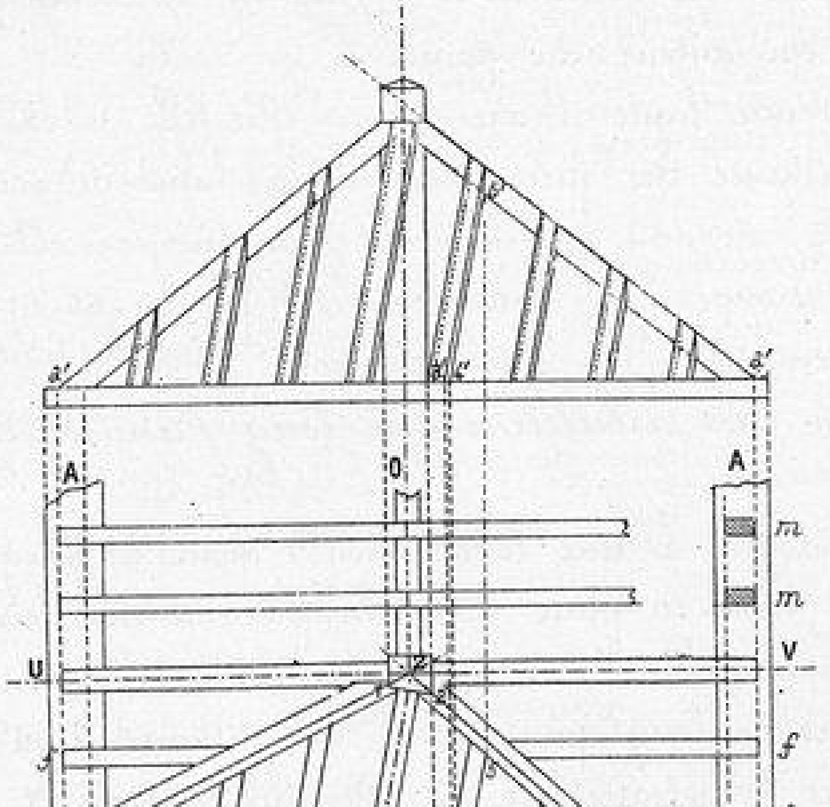
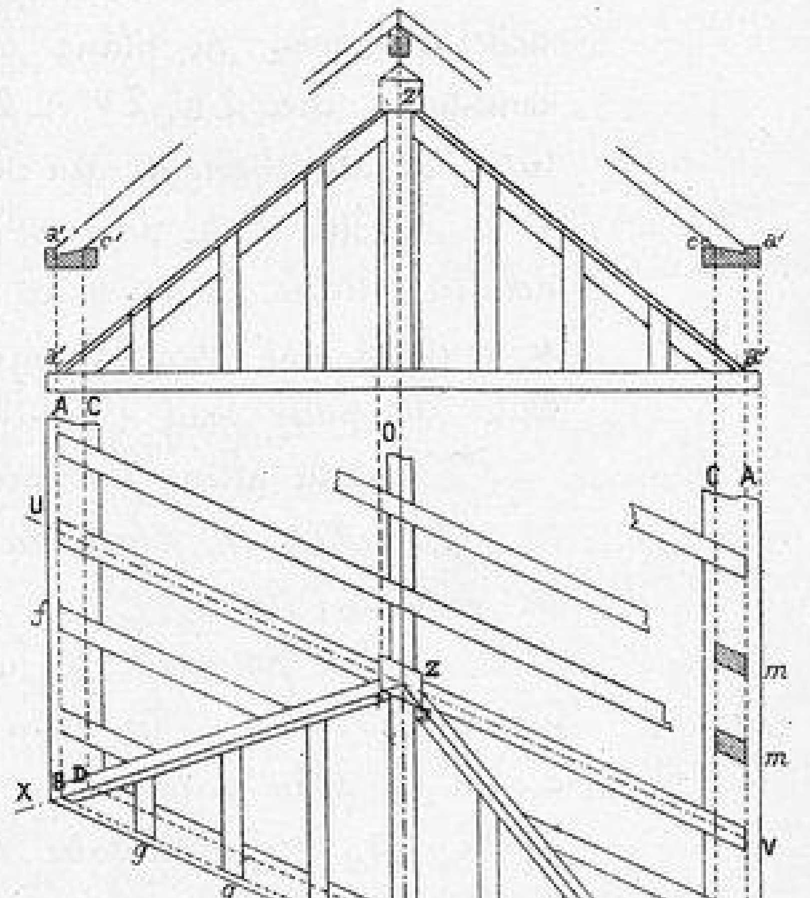


Fig. 64.



une poussée moins considérable que les demi-fermes de long pan, dont la pente est plus douce. - Les poussées de ces dernières s'équilibrent mutuellement par l'intermédiaire du tirant de long pan, tandis que la poussée de la croupe n'est équilibrée par rien, si ce n'est par une traction exercée au milieu du tirant de long pan et perpendiculairement à la direction de ce tirant, ce qui peut être dangereux. Il faut donc réduire cette poussée autant que possible en forçant la pente de la croupe.

2°. Si l'on avait ZW = ZV, l'arêtier ZY serait beaucoup plus long que les autres chevrons ou que les autres arbalétriers, ce qui serait encore un inconvénient.

Nous allons montrer maintenant comment on exécute l'épure d'une croupe biaise. Nous l'exécuterons pour le cas de la figure 62. La ferme de long pan est droite, la demi-ferme de croupe est biaise, mais nous supposerons que l'arbalétrier de croupe est déversé.

§ 44. - Remarque relative aux échelles d'une épure.

Les pièces de bois ayant en général une longueur assez grande comparée à leur largeur, on adopte ordinairement pour les longueurs une échelle plus petite que pour les largeurs et les épaisseurs. Ainsi sur les épures des figures 67-68 et 69, nous avons adopté l'échelle de $0^{M},02$ par mètre ($\frac{1}{50}$) pour les longueurs et une échelle dix fois plus grande, soit $0^{M},20$ par mètre ($\frac{1}{5}$) pour les largeurs et les épaisseurs. Aux points où les pièces se croisent, cette convention n'apporte aucune déformation, et cela nous permet d'étudier les assemblages à une échelle suffisamment grande. Sur la figure 65, l'échelle des largeurs est 20 fois aussi grande que celle des longueurs.

§ 45. - Mise en place des pièces d'une croupe.

(a) *Lignes de voie.* - On voit en Z, fig. 65, le sommet du trièdre ; en ZX et ZY, ses deux arêtes qui sont, en plan, les lignes de retournement des lignes d'about et de gorge ; Elles constituent avec ZU, ZV et ZW, ce que l'on nomme les *lignes de voie* des tirants, des arbalétriers et des chevrons qui forment épi autour du point Z.

Une ligne de voie diffère d'une ligne d'axe en ce que elle n'est pas comme cette dernière, tracée toujours à égale distance des faces. Lorsque la ligne de voie d'une pièce ne se confond pas avec sa ligne d'axe, on dit que la pièce est dévoyée. - Dans la croupe biaise, toutes les pièces sauf l'arbalétrier de croupe ZW, sont dévoyées (fig. 65-66-67-68....).

Nous allons indiquer comment se fait cette déviation.

(b) *Mise en place du poinçon, des arbalétriers de long pan et de l'arbalétrier de croupe (fig. 65).*

1°. *Le poinçon.* - La figure 65 donne à une échelle double pour les largeurs de celles des figures 67-68-69.... les détails de la mise en place. De chaque côté du point Z, on porte en c et d le demi-équarrissage $\frac{\alpha}{2}$ du poinçon. Du côté opposé à la croupe, on prend la face arrière 1.2, perpendiculaire aux murs de longs pans et à une distance $Zm = \frac{1}{2}\alpha$. - La face avant 4.3 est obtenue par la loi des homologues en se retournant sur ZX et ZY. Elle est donc parallèle au mur de croupe. - On voit que dans ces conditions le point Z, n'est pas au milieu de mn.

2°. *Les arbalétriers de long pan.* - Soit δ leur équarrissage. On les devoye de telle

sorte que leur ligne de voie UV, partage la largeur δ dans le même rapport que celui dans lequel le point Z partage la ligne m n.

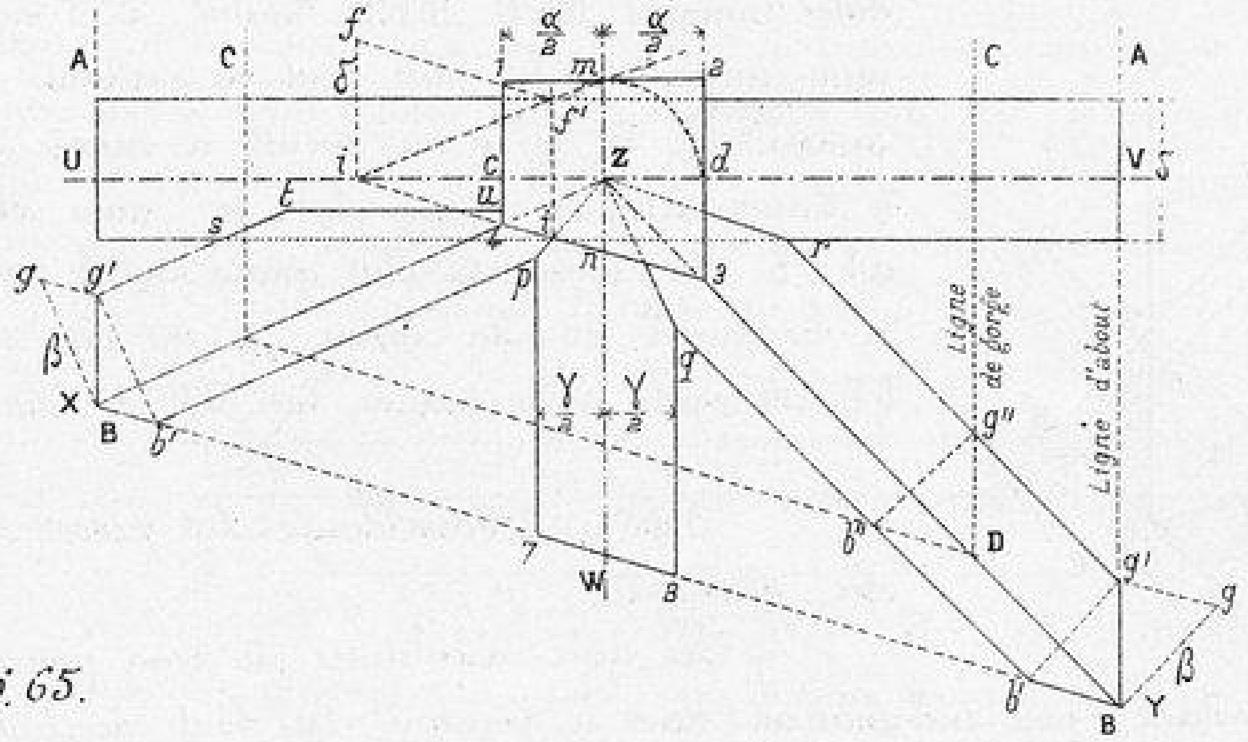


Fig. 65.

On peut imaginer pour y arriver une construction graphique quelconque. Voici celle adoptée ordinairement par les charpentiers.

On prolonge 3.4 jusqu'en i sur la ligne de voie et on joint i m. Il est évident que toute ligne perpendiculaire à la ligne de voie et inscrite entre les deux côtés de l'angle m i n, sera partagée par la ligne de voie dans le rapport $\frac{zn}{zm}$; - Dès lors, on prend if perpendiculaire sur UV et égale à δ; on mène ff' parallèle à 3.4 et l'on obtient en f'i' une ligne égale à δ et remplissant les conditions voulues. - Par f' et i' on fait passer les faces des arbalétriers et ces derniers sont mis en place.

3° *L'arbalétrier de croupe délardé ZW.* - A cause de la symétrie il n'est pas nécessaire de le devoyer. On portera de chaque côté de sa ligne de voie son demi-équarrissage $\frac{\gamma}{2}$, ce qui donnera ses faces latérales.

Nota. - Dans le cas où il sera déversé, sa ligne de voie ne sera pas toujours sa ligne d'axe et nous verrons plus tard que pour avoir ses arêtes latérales 7 et 8 on n'est plus en droit de porter de chaque côté de l'axe le demi-équarrissage.

(d) Mise en place des arêtiers ZX et ZY. - Ils seront dévoyés par la condition géométrique que la largeur b'g' de la pièce s'inscrive entre les deux lignes d'about AB, BB et qu'elle soit perpendiculaire à la ligne de voie ZY. C'est donc le problème connu: « Inscrire dans un angle, une droite de direction connue et ayant une longueur donnée ».

Solution: On prend Bg égal à l'équarrissage δ et perpendiculaire sur la ligne de voie ZY. - On mène gg' parallèle à la ligne d'about de croupe BB et l'on obtient en g'b' la largeur demandée. On procédera de même pour l'autre arêtier.

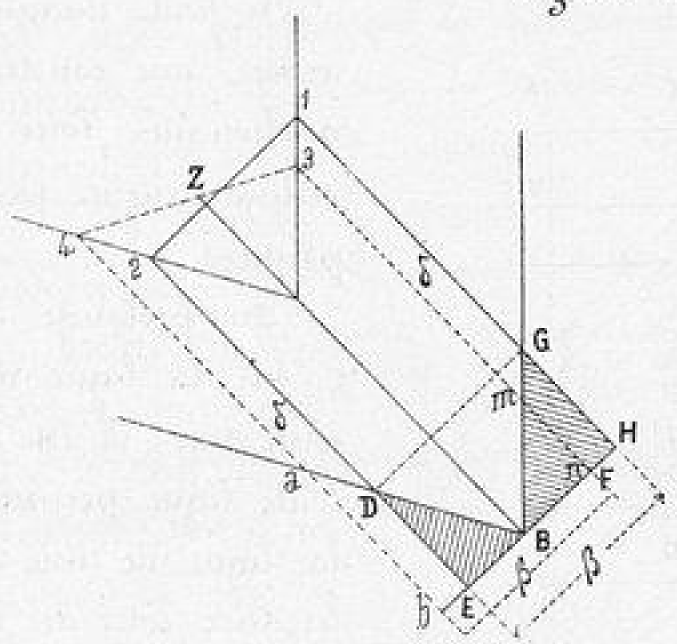
Avantages de ce tracé. - Les avantages qui résultent de cette manière de dévoyer l'arêtier sont les suivants: 1° L'arêtier pourra être pris dans une pièce équarrie. Cela résulte de ce que sa ligne de gorge b''g'' est perpendiculaire à sa ligne de voie. De cette façon, comme cela est indiqué pour les arbalétriers d'arêtier de gauche des figures 68 et 69, si l'on supprime la pointe triangulaire 1, 2, 3, la pièce aura pour section droite un rectangle parfait.

Cette suppression de l'angle 1.2.3, n'est pas possible quand il s'agit du chevron d'arêtier. Il faut, forcément, faire apparaître sur le dessus de ce chevron le lattis de long pan et le lattis de croupe, ce qui donne à la pièce la forme dite en *dos d'âne*. Il faut donc la délarder sur le dessus.

2° Cette manière de dévoyer la pièce est celle qui exige un délardement minimum.

En effet fig 65 bis: soient 1G, 2D, les faces verticales de la pièce déroyée comme ci-dessus; le volume de bois à enlever pour former le dos d'âne peut être considéré comme mesuré par la surface des deux triangles BGH, BED, hachés. Si l'on place autrement en 3 et 4 les faces tout en gardant le même équarrissage δ, on a en moins à enlever d'un côté le trapèze GHmn et en plus, de l'autre côté, le trapèze abDE. Ce dernier est plus grand que le premier, car sa hauteur δ, est la même, tandis que sa petite base DE est égale à la grande base GH de l'autre.

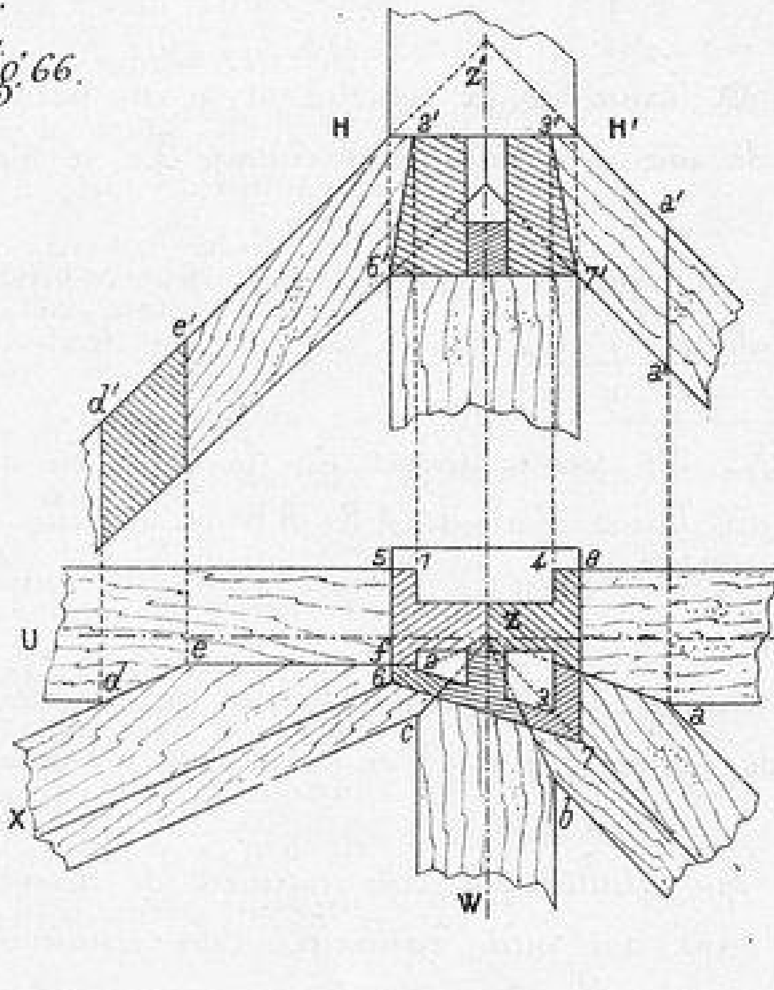
Fig 65 bis:



§ 46. – Assemblage des pièces aux environs du poinçon.

Les deux arbalétriers de long pan U et V, fig. 66, s'assemblent à tenon et mortaise, avec embrèvement dans le poinçon. Les bouts de leurs tenons se touchent en Z dans l'intérieur du poinçon. L'arbalétrier de croupe porte également un tenon avec embrèvement. Le bout de ce tenon vient s'appuyer sur les joues des deux tenons précédents.

Fig. 66.



Les arêtiers sont simplement déjoutés, soit par des plans verticaux tels que aZ.bZ.cZ, qui concourent au point Z (c'est le déjoutement dit en tour ronde), soit par une entaille def (c'est le déjoutement dit par entaille ou en pavillon). Les arêtiers ne portent pas de tenon, mais un simple embrèvement. Le pas de cet embrèvement présente la forme d'un angle dièdre qui aurait pour arête la ligne 3.7 - 3'7' de l'intérieur du poinçon. L'arêtier s'appuie donc sur le poinçon par l'intermédiaire des deux plans se recoupant suivant la ligne 3.7 - 3'7' et qui se nomment ses faces d'engueulement.

En résumé, le poinçon (fig. 66) est taillé suivant un tronc de pyramide HH'6'7' à base quadrilatère. Le plan horizontal HH' est le plan d'about commun à tous les embrèvements des arbalétriers. Les arêtes de ces embrèvements se retournent en 1.2.3.4, d'après la loi des homologues, c'est-à-dire sur les arêtes ZX et ZY du trièdre.

§ 47. – Enrayure.

On nomme enrayure fig. 69, le pan de bois horizontal formé par l'ensemble des tirants des fermes ou demi-fermes qui se rencontrent sous la croupe.

Les lignes de voie des tirants sont à plomb des lignes de voie des arbalétriers et on devoye le pièces de l'enrayure comme celles qui sont au-dessus, aussi bien les chevrons que les arbalétriers.

Fig. 67.

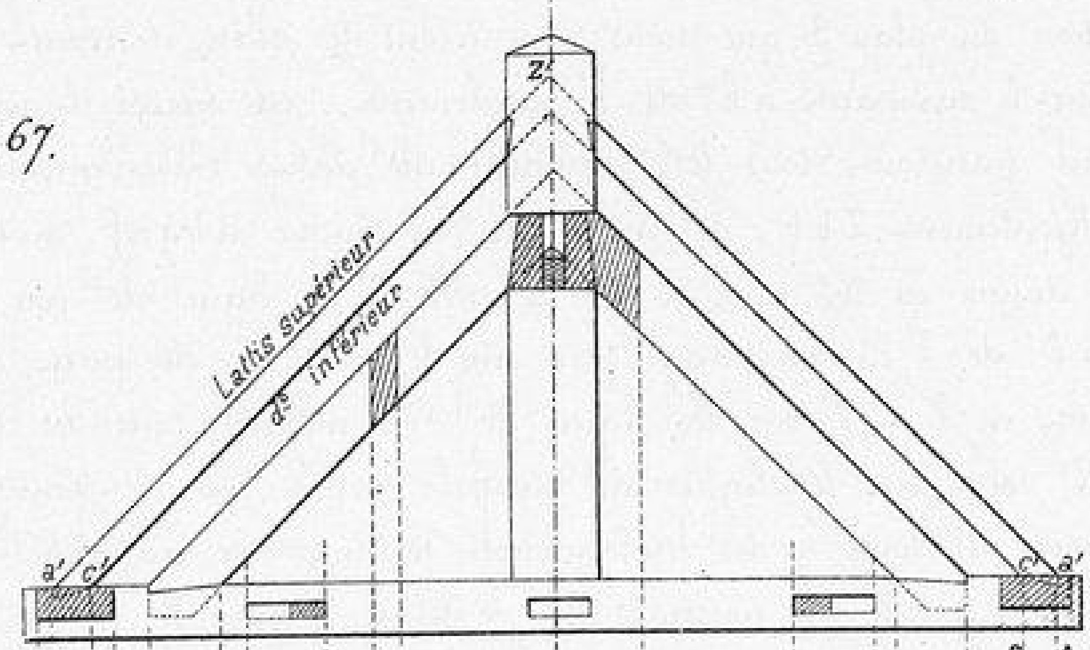
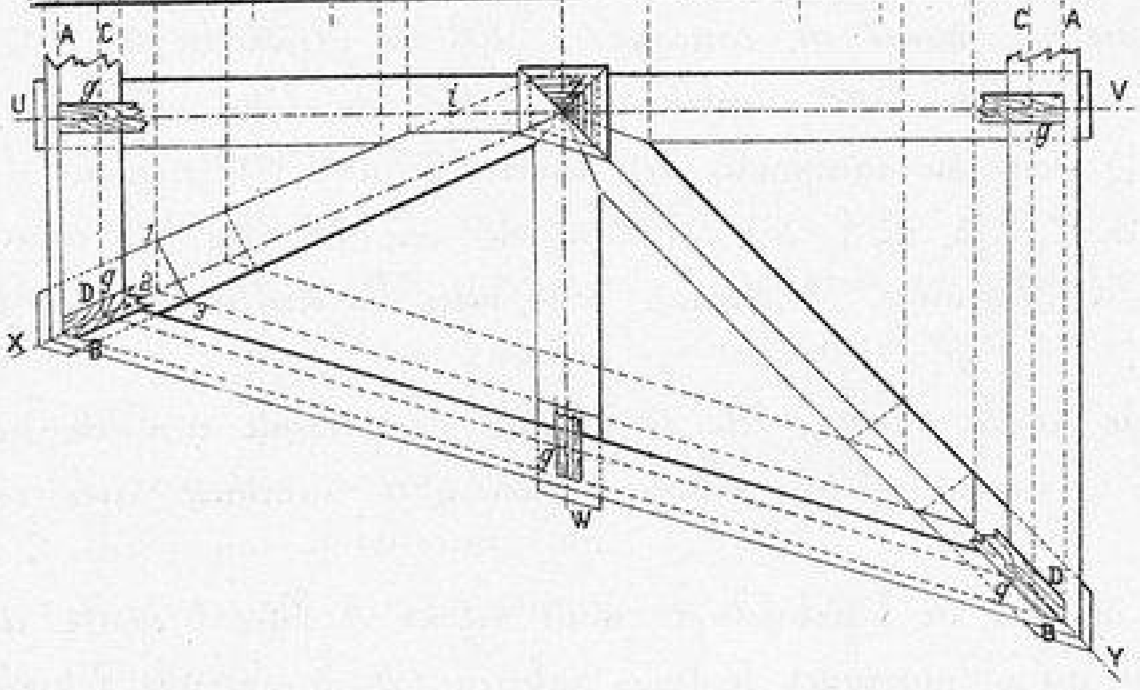


Fig. 68.

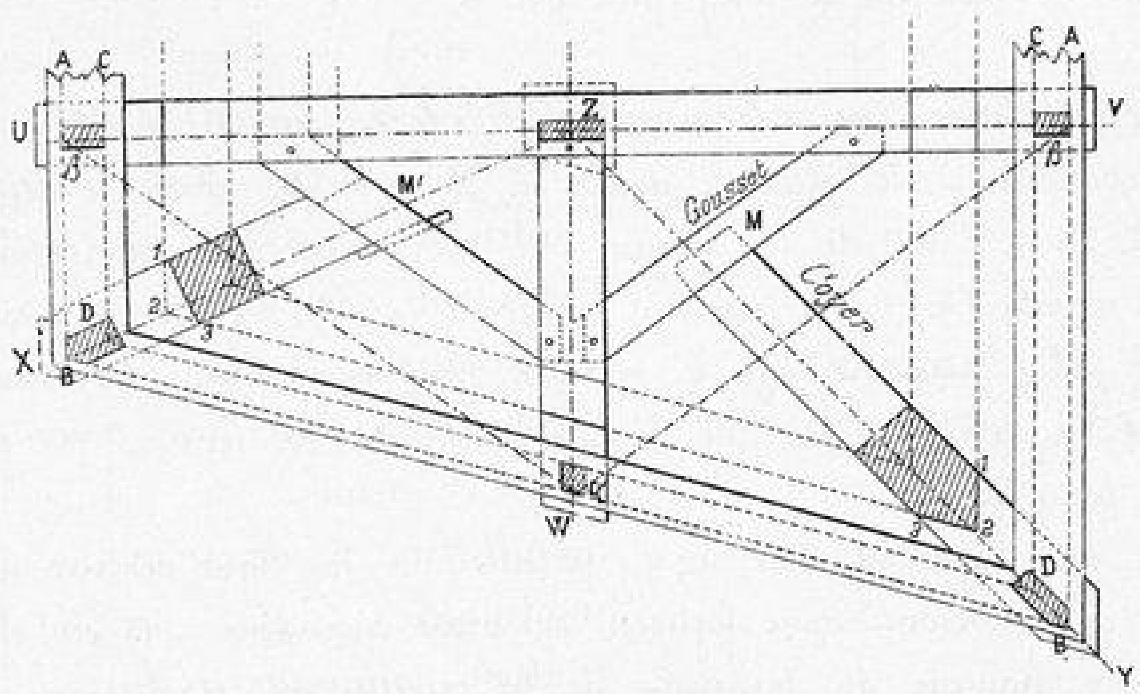


Les tirants d'arêtier portent le nom de coyer. On ne le prolonge pas jusqu'au droit du poinçon mais on l'arrête à une pièce transversale nommée gousset assemblée elle-même à tenon et mortaise dans les tirants de long pan et de croupe.

Le gousset a sa direction parallèle à la diagonale ∠B au quadrilatère Z ∠ B B. – Il obéit donc aussi à la loi des homologues.

Le coyer s'assemble dans le gousset soit à tenon et mortaise comme en M, soit mieux encore en queue d'hironde, avec ou sans clef.

Fig. 69.



Sur la figure 69, on voit l'enrayure avec les occupations des arbalétriers et des chevrons.

Sur la figure 68, on voit la projection des pièces supérieures. – On y a indiqué en g, g, g, g, les amorces des chevrons principaux.

Epure de la croupe biaise

Stéréotomie.
4e Leçon.

§ 48. – Arbalétrier (ou chevron) de long pan (N, N' et N'' fig. 70).

Le plan montre en ZV, ZY et ZW les 3 lignes de voie. – On voit en B, B, B les lignes d'about de long pan et de croupe et en DDD, les lignes de gorge se retournant, d'après la loi des homologues, sur l'arête ZY du trièdre qui est la ligne de voie de l'arêtier. – Le

poinçon a été tracé et les pièces dévoyées comme il a été dit au § 46.

(a) *Assemblage au sommet.* – L'élévation fait connaître la hauteur du point Z, sommet du trièdre, et la position du plan S que nous nommerons le *plan d'about* des embrèvements. Le plan incliné qui forme le rampant g'h' de l'épaulement, va percer l'axe de la croupe en un point f', par lequel passeront tous les rampants des autres embrèvements au sommet.

Le plan de déjoutement Zhb, détermine un pentagone abghf, nommé le *pentagone de déjoutement*. On donne en N" quartier à la pièce. La ligne de voie apparaît en fV et les fragments δ et δ' de l'équarrissage pris sur le plan N de part et d'autre de la ligne de voie se reportent en δ et δ' sur la figure N". D'ailleurs tous les points tels que a. b, g..... de la figure N" sont sur les lignes de rappel menées, par les points a'b'g'.... de la figure N'. D'autre part ils sont à des profondeurs positives ou négatives par rapport à la ligne de voie, qui sont prises, au compas, sur le plan, figure N.

(b) *Vérifications et points de concours.* – Si l'on prend en Z'_1 Z'_2 Z'_4 et f' les points où les différents plans, soit du lattis supérieur (Z'_1), soit du lattis inférieur (Z'_4) soit des abouts des embrèvements (Z'_2) soit du rampant des embrèvements (f') percent l'axe de la croupe, ces points rappelés en Z_1 Z_2 Z_4 et f sur la ligne de voie fV (fig. N") donnent des points de concours importants à déterminer d'avance soit pour la vérification des lignes, soit même pour leur tracé.

(c) *Assemblage à la base.* – Cet assemblage ne présente rien de nouveau. Nous avons en mnpq – m'n'p'q' un assemblage oblique à tenon et mortaise avec embrèvement, déjà étudié § 11.

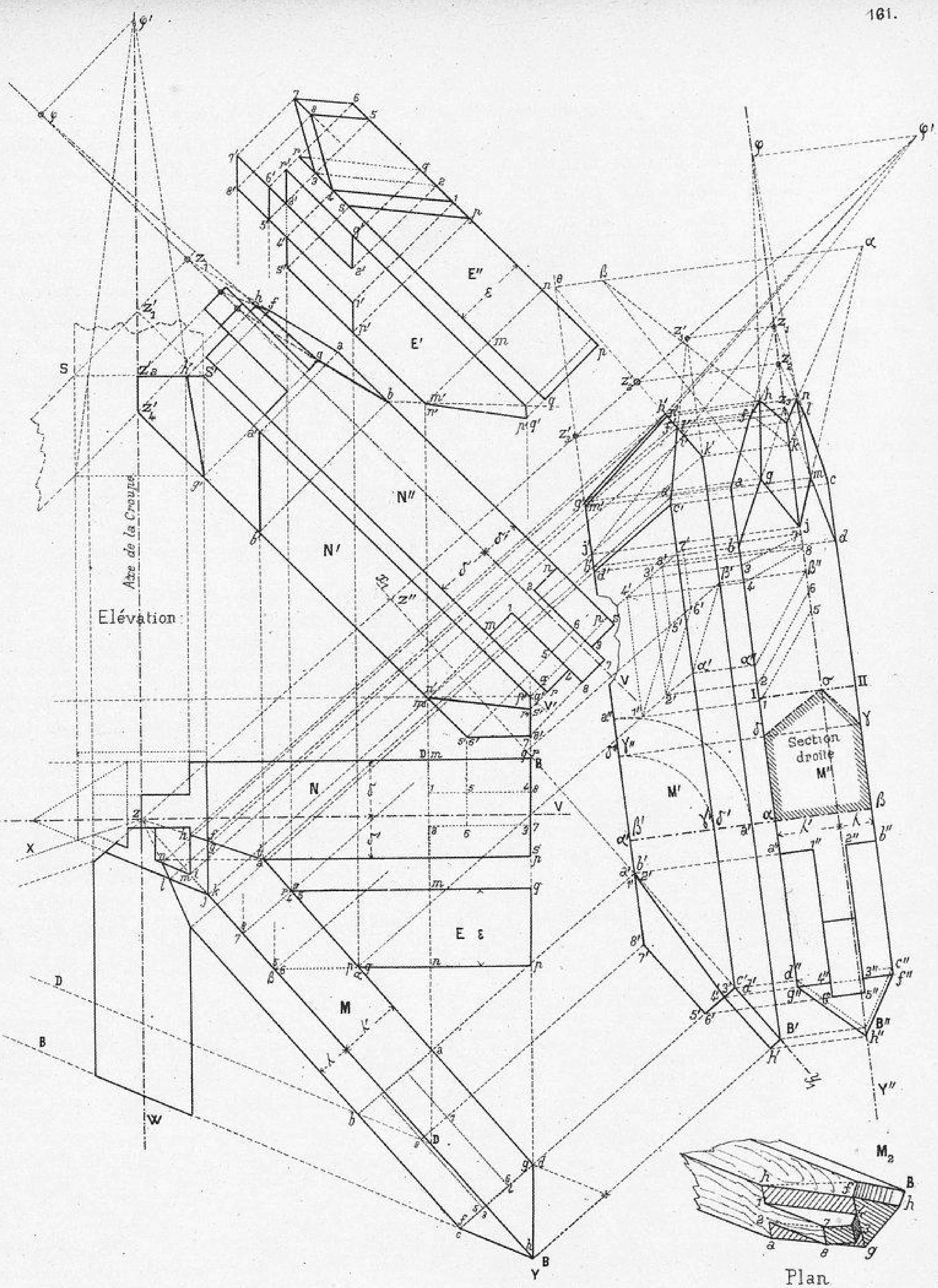
Nota. – Si au lieu de l'arbalétrier nous avions à faire l'épure du chevron de long pan, nous n'aurions qu'à supprimer le tenon inférieur et à conserver l'embrèvement comme cela est indiqué sur l'empanon de long pan E,E'E".

§ 49. – Arbalétrier (ou chevron) d'arêtier. fig. M M'M".

(a) *Partie supérieure.* – Le plan le donne en M avec ses faces de déjoutement nc et hd, qui convergent en Z sur l'axe de la croupe. – L'about de son embrèvement est limité par les lignes brisées hin et fkl se retournant d'après la loi des homologues et situées dans le plan horizontal S. – Il s'assemble sur le poinçon par engueulement, sans tenon. – Horizontalement nous avons en nijm la face d'engueulement de croupe et en hijg la face d'engueulement de long pan.

On prend une ligne de terre x_1y_1 parallèle à la ligne de voie ZY et on projette l'arêtier en M'; ses arêtes seront donc figurées en vraie grandeur. – A cet effet on commence par reporter en Z'_1 la hauteur du sommet de la croupe, on établit en $B'Z'_1$ (fig. M') l'arête du trièdre et cela donne les directions de toutes les arêtes du prisme.

Cela fait: on établit d'abord les deux pentagones de déjoutement, savoir: m'd'c'l'n' qui est le déjoutement de croupe (vu sur la projection M') et g'b'a'f'h' qui est le déjoutement de long pan. – On remarquera que les lignes telles que c'l' et a'f' doivent aboutir au point Z'_1 tandis que m'n' et g'h' qui sont sur les rampants de l'embrèvement concourent au point f'. – Il en sera de même pour la ligne j'i' qui forme l'arête du dièdre constitué



G. Ap. 2e Partie. F. 21.

par les deux faces d'engueulement. On donne quartier à la pièce, en M"; pour mettre en place tous les points importants, on prend comme repère la ligne de voie $\varphi\gamma''$, on mène par les points de la figure M toutes les lignes de rappel et on reporte en M" les profondeurs relatives prises, au compas, sur le plan, figure M.

Nota. - Les points Z_1', Z_2' et Z_3' rappelés en $Z_1 Z_2 Z_3$ (fig. M") sur la ligne de voie donnent des points de concours utiles pour la vérification des tracés. On remarquera aussi les deux points de concours α et β pour les lignes de dessus et de dessous des faces d'engueulement.

(b) *Partie inférieure.* - La figure M_2, montre en perspective la disposition adoptée au pied de l'arêtier. - Si la pièce était un chevron, le tenon serait supprimé et il ne resterait qu'un embrèvement avec about triangulaire f h B. D'ailleurs, quand on adopte un tenon, ce dernier ne règne pas sous la partie triangulaire de l'embrèvement. Nous pensons qu'il est inutile d'expliquer en détail les figures M, M' et M" pour le pied de l'arêtier.

(c) *Section droite de l'arêtier.* - On la voit indiquée (fig. M') en $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\sigma'$ en ligne droite; - Sur la figure M" elle est rabattue, en vraie grandeur, suivant le pentagone $\alpha\beta\gamma\delta\sigma$ obtenu par report de profondeurs. Cette section droite permet de connaître les dimensions I, II, α, β, de la pièce équarrie dans laquelle l'arêtier sera obtenu par délardement.

§ 50. - *Empanon de long pan E, E', E".*

(a) *Le Tenon.* - On voit l'empanon figuré en E sur le plan. Le bout du tenon 5, 6, 7, 8, est, en général, déterminé par le plan vertical Z Y qui projette horizontalement la ligne de voie de l'arêtier. L'about du tenon 4, 5, 7, 8, est formé par un plan vertical perpendiculaire à la face b d de l'arêtier. On en déduit facilement l'élévation E'. Les joues du tenon 2'3' 1'4' sont parallèles aux lattis de long pan et tracées, comme à l'ordinaire, au tiers de l'épaisseur. L'empanon a reçu quartier en E".

(b) *La mortaise dans l'arêtier (fig. M' et M").* - L'entrée 1'2'3'4' de la mortaise se trace à priori au tiers de la hauteur de la pièce. Pour avoir la direction des arêtes intérieures 2'6' et 1'3' des jouées; on remarque d'abord qu'elles sont parallèles à la fois au lattis de long pan et à la face verticale α p de l'empanon: Par conséquent, on détermine en $\alpha\beta$ (fig E) et $\alpha'\beta'$ (fig. E') cette direction, après quoi le reste de la mortaise se déduit facilement, aussi bien sur la figure M' que sur M".

Stéréotomie.
5e Leçon.

§ 51. - *Empanon déversé de croupe biaise (fig. 71).*

(a) *Données.* - Prenons la même croupe que sur la figure 70, mais étudions l'arêtier de gauche et un empanon déversé s'y assemblant. L'arêtier M a été dévoyé comme à l'ordinaire. - L'élévation donne la hauteur ZZ_1' du sommet du trièdre par rapport au plan de dessus des sablières.

Choix de la ligne de voie. - On se donne, en plan, la ligne de voie $\omega\,\theta$ de l'empanon. - ω est sur l'arête de la croupe et θ est sur la ligne d'about de croupe. - On en déduit, sur l'élévation, en $\omega''\omega'$ la hauteur du point ω. - On se donne l'équarrissage en largeur, δ, de l'empanon; mais ce serait une erreur de porter cette largeur sur le plan, de part et d'autre de la ligne de voie pour avoir les deux arêtes am et-

b n qui sont dans le lattis supérieur.

(b). Mise en herse de la ligne de voie. – On est obligé d'abord de rabattre horizontalement le plan du lattis supérieur en entraînant avec lui les empanons et les chevrons. Cette opération constitue ce que les charpentiers nomment la *mise en herse*. – La *herse* est la figure formée par toutes les pièces une fois rabattues.

Pour effectuer facilement ce rabattement je prends un nouveau plan vertical auxiliaire $x_1 y_1$ perpendiculaire au plan de croupe et reportant de ω''_1 en ω'_1 la hauteur du point ω, j'obtiens en $a'\omega'_1$ la ligne de plus grande pente qui est aussi la trace verticale du lattis supérieur. Ce lattis se projette sur le mur auxiliaire $x_1 y_1$ tout entier suivant sa trace verticale $a'\omega'_1$. – Le lattis inférieur se projetterait suivant une ligne parallèle issue du point d' situé sur la ligne de gorge. Sur cette projection verticale auxiliaire E' je dessine l'embrèvement a'e'c'.

Pour rabattre on pourrait prendre comme charnière la ligne d'about a'a b ; mais la pièce une fois en herse mêlerait ses lignes avec celles de la pièce en plan ce qui amènerait de la confusion. C'est pourquoi nous prenons une charnière $\varphi\sigma$, placée un peu au-dessous, ce qui revient en réalité, à rabattre sur un plan horizontal φ Y, ~~placé~~ un peu plus bas que le dessus des sablières.

Cela posé, le point ω se rabat sur une perpendiculaire $\omega\omega_1$ à la charnière, et nous avons vraie grandeur, en $\varphi\omega'_1$ son rayon de rotation sur le mur auxiliaire $x_1 y_1$.

La ligne de voie est donc rabattue suivant $Q\omega_1$.

(c) Mise en place des arêtes supérieures. – C'est alors que, sur la herse E, nous pouvons, de chaque côté de la ligne de voie, porter la demi-largeur $\frac{\ell}{2}$, $\frac{\ell}{2}$ de l'empanon, ce qui nous donne en $m_1 a_1$ et $n_1 b_1$ la herse des arêtes supérieures ; nous en déduisons, par un relèvement, les projections a m et b n de ces arêtes, et, par suite, les deux points m et n, sommets supérieurs de l'occupation de l'empanon sur l'arêtier. – Ces points m et n sont, à leur tour rabattus en m_1 et n_1 sur la herse.

Remarque. – Si l'on joint $X\omega_1$ on obtient la herse de l'arête ZX du trièdre, et la parallèle $S m_1 n_1$ à cette ligne est le rabattement de l'arête de croupe S m n de l'arêtier. Les points m_1 et n_1 déjà trouvés, doivent être sur cette arête rabattue, ce qui donne une bonne vérification.

(d) Mise en place des arêtes inférieures d q et c p. – Remarquons d'abord que l'empanon n'est déversé que parce qu'il est équarri, ce qui veut dire que sa section droite est un rectangle. – L'élévation auxiliaire E' donne en B une des dimensions de l'équarrissage et la herse E_1 donne en ℓ l'autre dimension ; géométriquement parlant, dire que la pièce est équarrie, cela signifie que le plan de face latérale b n c p est perpendiculaire au lattis. – Nous aurions donc pour construire ce plan à résoudre le problème suivant :

Problème. – Par une droite b n d'un plan (ici le lattis supérieur) mener un autre plan qui lui soit perpendiculaire.

Solution. – 1° On prend un point quelconque g g' sur la droite b n ; 2° par ce point on mène une normale g c - g'c' au plan (lattis supérieur) ; 3° on cherche la trace horizontale c'c de cette normale et joignant ce point à la trace horizontale b de la droite donnée on obtient en b c la trace horizontale du plan demandé.

Remarques. – 1° Au lieu de prendre quelconque ce point de départ g'g de la normale sur la droite b n, les charpentiers se donnent le point d'arrivée de cette normale en c' sur la ligne de

gorge, ce qui leur fournit de suite, en plan, le point c, pied de l'arête inférieure de droite sur la ligne de gorge. - 2° L'arête de gauche dq, se trace parallèle à cp, et à la même distance de ma, que cp est de bn. - 3° La figure abcd, serait le parallélogramme d'occupation de l'empanon sur la sablière. Mais nous aurons à tenir compte de l'embrèvement.

(e) *Mise en herse de l'embrèvement.* - Remarquons d'abord que l'empanon étant une pièce équarrie, une fois en herse, ses faces de dessus et de dessous se projetteront l'une sur l'autre, tandis que ses faces latérales se projetteront en entier suivant la droite $d_1 m_1$ pour la face de gauche et $c_1 n_1$ pour celle de droite.

Cela posé, nous reproduisons en E_2, rabattue, la projection verticale auxiliaire E' et nous en déduisons de suite sur la herse, fig. E_1 en $d_1 c_1$ et $a_1 b_1$ les arêtes du parallélogramme d'occupation, et en $e_1 f_1$ l'arête d'about de l'embrèvement.

(f) *Projection horizontale de l'embrèvement.* - De la herse, par le problème inverse du rabattement, nous remontons des points e_1 et f_1 aux projections e et f, de l'arête d'embrèvement, laquelle se confond, en plan, avec la ligne d'about.

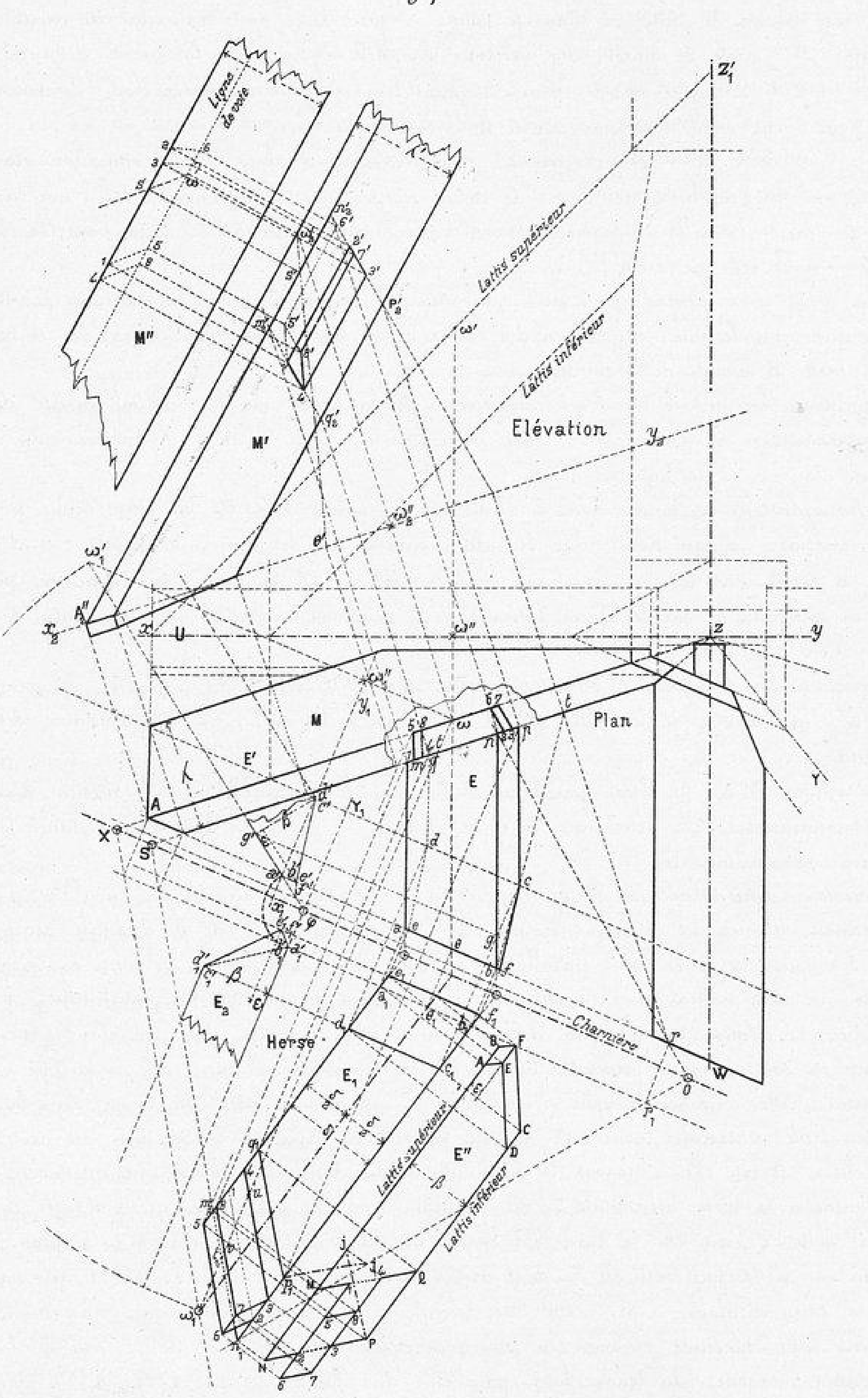
Remarques. - 1° Les points d et c sont avec les points d_1 et c_1 sur une même perpendiculaire à la charnière, ce qui donne une seconde manière de déterminer les points c et d, en commençant d'abord par la mise en herse de l'empanon. - 2° Les lignes de rappel des points p et q donnent en p_1 et q_1 sur les faces latérales de l'empanon rabattu les deux autres sommets de son occupation sur l'arêtier.

(g) *Projection de l'empanon sur ses faces latérales.* - Prenons la figure E_1 et donnons-lui quartier en E". - La hauteur de la pièce est δ donnée en E' ou en E_2; c'est la distance des deux lattis de croupe.

On voit en MNPQ, obtenu par lignes de rappel, le parallélogramme supérieur d'occupation. L'arête d'embrèvement EF, est déterminée par sa distance ε, au lattis supérieur, distance fournie en ε par la projection auxiliaire E'.

(h) *Projection horizontale du tenon, fig E 1.2.3.4 - 5.6.7.8.* - La racine du tenon 1.2.3.4, se détermine en prenant le tiers des côtés mq et np de l'occupation. Du côté de l'angle aigu, mq, les arêtes 1.5 et 4.8 des joues sont parallèles à celles de l'empanon. - Le bout du tenon 5.8.6.7 est formé par un plan vertical qui est, en général, le plan projetant horizontalement l'arête ZX du trièdre. - L'about 2.6 - 3.7 sera déterminé par cette condition que son plan passe par la droite mp et soit de plus, perpendiculaire à la face rencontrée, c'est-à-dire à la face verticale Sp de l'arêtier. Cette condition remplie permettra une introduction aisée du tenon dans la mortaise et une coupe facile à exécuter pour cette dernière. Cherchons d'abord la direction des arêtes 2.6 et 3.7, de l'about. A cet effet, menons le plan d'about dont il vient d'être question. Prolongeons np jusqu'à sa trace horizontale t. - Le point t est d'une part, sur np prolongée et d'autre part sur la droite bc, qui est la trace horizontale de la face latérale nbcp. - Le plan mené par nt, perpendiculaire à la face verticale St de l'arêtier aura donc sa trace horizontale tr qui passera par t et qui sera perpendiculaire à St. - Cette trace recoupe en r la ligne d'about, qui est la trace horizontale du lattis supérieur. - Donc rn est l'intersection du plan d'about avec le lattis supérieur et comme les joues du tenon sont parallèles aux lattis, les arêtes 2.6 et 3.7 de l'about sont parallèles à la direction trouvée rn, ce qui suffit pour les déterminer.

Fig. 71.



(i) Mise en herse du tenon (fig. E_1). La racine 1.2.3.4 s'obtient en prenant le tiers des côtés de l'occupation. Les points 5 et 8 du bout sont, d'une part, sur la ligne $d_1 q_1$ projection en raccourci de la face latérale de gauche, et, d'autre part, sur les lignes de rappel menées des points 5 et 8 de la figure E, ce qui suffirait pour les déterminer. Mais cette construction serait pénible à faire sur le chantier.

Mais remarquons que sur la figure E_1 la ligne $t_1 \omega_1$ est le rabattement de la ligne $t\,\omega$ (fig. E) du lattis. Par conséquent si sur la même droite ou sur une droite parallèle on prend, à partir de la racine du tenon, une longueur $u\,v$ égale à $t_1 \omega_1$ on aura en v un point de l'arête du bout, ce qui suffit à tracer cette arête. L'arête d'about J.6 (fig. E_1) pourrait

se trouver par des lignes menées des points 7 et 6 de la figure E. – Mais on peut avoir immédiatement la direction des arêtes 3.7 et 2.6 de l'about. Il suffit pour cela de rabattre en $\sigma r_1 n_1$ la droite rn qui a été trouvée tout à l'heure (Sh).

Remarque. – On peut, directement, sur les deux figures en herse E_1 et E" déterminer les directions $n_1 r_1$. – En effet, nous nous rappelons que cette droite $n_1 r_1$, rabattement de nr, est l'intersection avec le lattis, d'un plan mené par le côté NP du parallélogramme d'occupation perpendiculairement au plan de ce parallélogramme.

Mais sur la herse le lattis est confondu avec le plan horizontal. – Le plan du parallélogramme a pour lignes de niveau $p_1 q_1$ (fig. E_1) et pour ligne de front NP (fig. E"). Par conséquent une normale à ce plan menée par un point quelconque Pp, par exemple de la droite NP aura pour projection horizontale $p_1 J_1$ perpendiculaire sur $p_1 q_1$ et pour projection verticale Pj, perpendiculaire sur NP. Sa trace horizontale est le point J_1 et $J_1 n_1$ donne la direction demandée.

La figure E_1 une fois achevée, on lui donne quartier en E". Les explications sont inutiles pour cette opération.

§ 52. – *Mortaise de l'empanon dans l'arêtier (fig. M, M' et M").*

Prenons un nouveau mur $x_2 y_2$ parallèle aux faces verticales de l'arêtier et projetons-y cette pièce. – La hauteur ω''_2 et ω'_2 du point ω de l'arête du trièdre nous est connue par $\omega''\omega'$ de l'élévation; ce qui nous donne en $A'_2 \omega'_2$ la direction de toutes les arêtes et nous permet de les obtenir.

(a) *Entrée de la mortaise.* – Par des lignes de rappel menées des points $m\,n\,p\,q$ de la figure M, nous obtenons en $m'_2 n'_2 p'_2 q'_2$ les côtés du parallélogramme d'occupation.

Remarque. – Ces côtés sont en vraie grandeur sur la figure M'. – Nous les avions déjà en vraie grandeur, savoir: $p_1 q_1$ sur la herse figure E_1 et MQ sur la figure E". – Cela permet des vérifications importantes.

L'entrée de la mortaise 1'2'3'4' s'obtient en prenant le tiers des côtés de l'occupation.

(b) *Jouées de la mortaise.* – La ligne de voie $\theta\omega$ projetée (fig. M') en $\theta'\omega'_2$ donne la direction des arêtes 1'5' et 4'8'. – Pour en avoir les limites, au fond de la mortaise on pourrait mener par les points 5 et 8 de la figure M des lignes de rappel. Mais elles seraient d'un tracé pénible. Il est préférable de donner d'abord quartier en M" à l'arêtier. L'épaisseur δ est prise sur le plan (fig. M). La ligne de voie $\delta'\omega'_2$ (fig. M') est projetée en $\delta\omega$ (fig. M") et donne la direction des arêtes 1.5 et 4.8, lesquelles sont d'ailleurs limitées en projection, à la ligne de voie, ce qui détermine les points 8 et 5, desquels on déduit par lignes de rappel sur la figure M' les points 5' et 8' et par suite les arêtes 5'6' et 8'7' du fond de la mortaise.

L'about 6'7'2'3' de la mortaise se projette sur la figure M' tout entier en ligne droite. Cela tient précisément à ce que le plan de cet about est perpendiculaire à la face verticale de l'arêtier. Des points 6' et 7' de la figure M' on déduit par lignes de rappel les points 6 et 7 sur la figure M" et, dès lors, toutes les projections sont terminées.

§ 53. – *Arbalétrier de croupe déversé (fig. 72).*

(a) *Mise en herse.* – Les données générales sont les mêmes que sur les figures 70 et 71.

On voit en ZW (fig. A) la ligne de voie. - L'élévation donne en Z'_1 et Z'_{11} les hauteurs des sommets des trièdres formés par les lattis supérieurs et par les lattis inférieurs. - Comme pour l'épure précédente on prend un mur auxiliaire x, y, perpendiculaire au lattis de croupe. La ligne de voie ZW (fig. A) s'y projette (fig. A') suivant Z'_1a', ligne de plus grande pente du lattis supérieur de croupe.

On fait la mise en herse sur le plan horizontal en ayant soin, pour dégager les lignes de la herse de celles du plan, de prendre une charnière J'J un peu au-dessous du plan de dessus des sablières. Ce rabattement se fait en se servant de la figure A'' qui est une reproduction exacte de la figure A'.(1)

La ligne de voie une fois rabattue en WZ_1 (fig. A_1) l'équarrissage en largeur δ, que l'on veut donner à l'arbalétrier permet d'établir les herses des faces latérales. Il est bon de dévoyer la pièce mais simplement au jugé. Sur la figure 72 on a pris un peu plus de largeur à gauche qu'à droite afin que le déversement qui se produit sur la droite n'ait pas pour mauvais effet d'exagérer, du côté droit, l'empiètement de l'arbalétrier de croupe sur l'arêtier. Une fois la pièce relevée, il faudrait que le dévirement ait été calculé de telle sorte que sur le plan (fig. A) la ligne de voie ZW fût à égale distance des arêtes a et c.

(b) Le tenon et l'embrèvement du pied. - On relève les arêtes de dessus a et b et on en déduit comme pour l'empanon déversé, la position des arêtes de dessous c et d. - On se souvient que l'on se sert à cet effet de la normale d'k' menée au lattis (fig. A'), rabattue en d'k (fig. A'') et ramenée en kd (fig. A). - L'about abfg de l'embrèvement se détermine comme pour l'empanon.

On dessine la racine du tenon (fig. A') en 1'2'3'4' et son bout en 5'6'7'8' on le reproduit (fig. A''). - Ses joues sont formées par des plans perpendiculaires aux lattis; - Donc sur la herse (fig. A_1), ces joues se projettent en entier suivant des droites 2.5 et 3.8, que l'on limite aux points voulus par des lignes de rappel menées de la figure A''.

La herse une fois établie, on en déduit le plan (fig. A) et la mise sur quartier A_2. Il est inutile d'insister. L'opération se fait comme pour l'empanon.

(c) L'embrèvement et les déjoutements du sommet. - Le déjoutement se trace, à priori, en plan (fig. A); à droite il se compose d'un plan vertical m n l, formé par la face de l'arêtier et qui occupe tout l'espace compris entre les arêtes cm et bn, espace dû au déversement. - Ce plan mn, détermine dans l'arbalétrier de croupe une entaille triangulaire m l n - m'l'n' (fig. A') ...... m''l''n'' (fig. A''), sur laquelle, pour bien la distinguer, nous avons tracé des hachures.

De même, du côté gauche, la face verticale de l'arêtier pratique une entaille triangulaire stu (fig. A) s't'u' (fig. A') s''t''u'' (fig. A'') ..... etc .... marquée par des hachures.

A partir des verticales nl - n'l' etc. et tu - t'u' ..... le déjoutement se fait, en tour ronde, par des plans verticaux npz, à droite et tvz à gauche, qui convergent au point z.

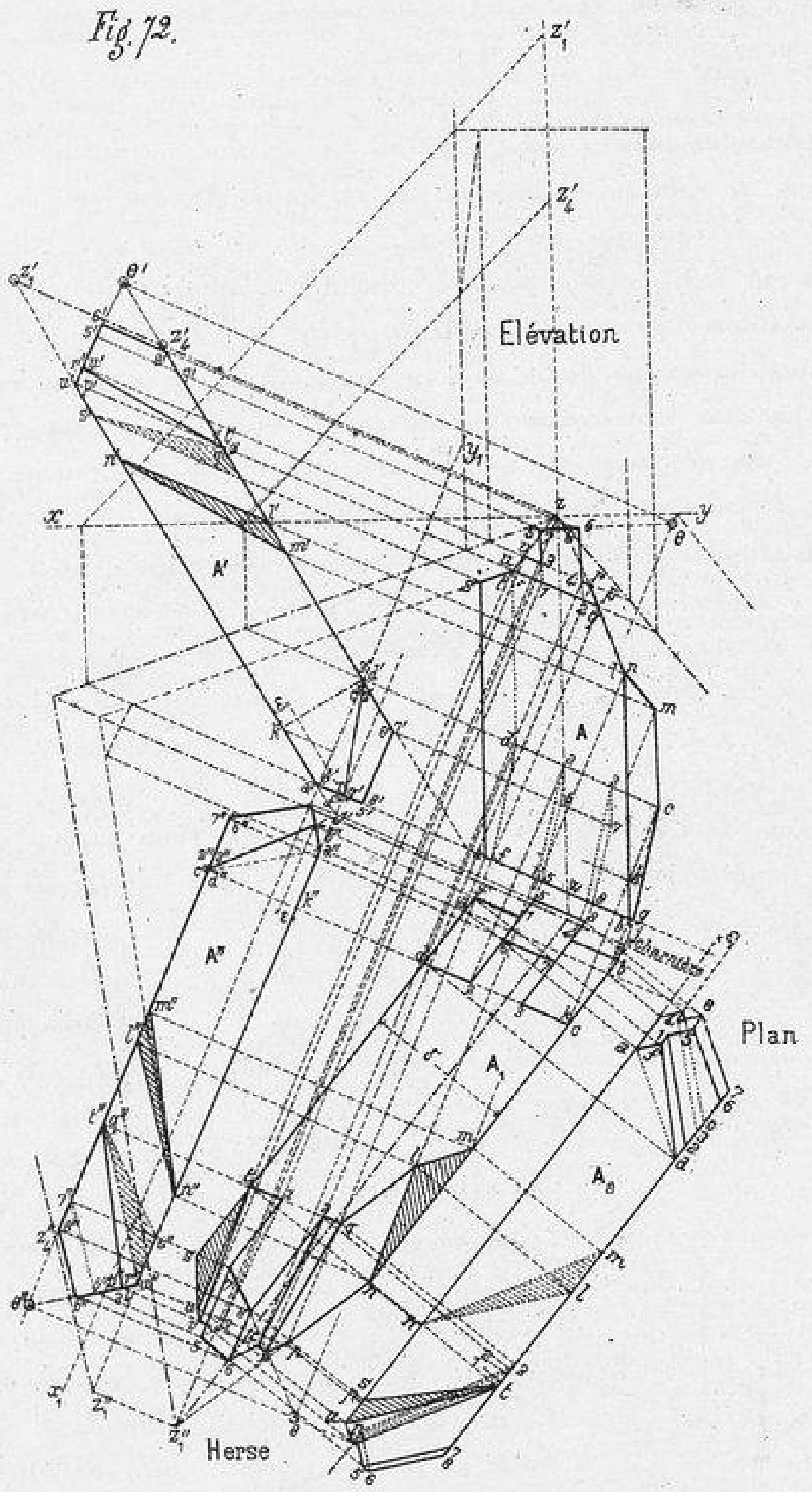
Le déjoutement de droite donne naissance à un pentagone nlprq - n'l'p'r'q' .... etc ....

---

(1) Avec un peu d'habitude on pourrait se dispenser de dessiner en entier la figure A'' et même la figure A'. - Ces deux figures ne servent, ici, que de projections auxiliaires; néanmoins elles permettent de se mieux reconnaître dans les lignes et nous conseillons de les dessiner complètement.

tandis que celui de gauche donne naissance dans le cas particulier de la fig. 72, à un simple triangle t u v - t'u'v'. - On aurait pu également, si la pièce avait été plus déroyée vers la gauche, avoir de ce côté un pentagone. Il est facile de suivre sur les figures A" A_1 et A_2 les projections de ces deux déjoutements. - On remarquera que le côté supérieur n p du pentagone de gauche (fig. A_1) converge au point Z_1 rabattement du sommet du trièdre sur la ligne de voie tracée dans le lattis supérieur. - Le côté inférieur l q, tracé dans le lattis inférieur, est parallèle à ce côté n p.

Fig. 72.



(d) Le tenon du sommet. - Sa racine est le rectangle 1.2.3.4. tracé sur le pas de l'embrèvement, (fig. A). On déduit de la figure A toutes les autres projections sur les figures A' A" A_1 et A_2.

Remarques: 1° L'about du tenon a son arête 5.6 (fig. A) qui est horizontale et comme sur la projection A elle est perpendiculaire aux projections des arêtes, c'est que l'angle que ces deux directions font dans l'espace, est un angle droit (1).

Sur la herse, fig. A_1 ce sont les arêtes de la pièce qui sont horizontales, tandis que la ligne 5.6 ne l'est plus. Néanmoins l'angle que fait 5.6 avec les arêtes doit être aussi un angle droit.

2° La ligne 7.8 du dessous du bout du tenon rencontre la ligne de dessus 5.6 en un point θ' (fig. A') θ (fig. A). - Ce point rappelé en θ" et θ sur les figures A' et A_1 donne un point de concours de ces deux lignes qui peut être commode.

Nota. - L'empanon et l'arbalétrier qui viennent d'être étudiés donnent une idée de la manière dont on fait le déversement des pièces équarries. Nous allons, dans les para-

(1) Théorème relatif à un angle droit projeté en vraie grandeur.

graphes qui suivent faire les épures de ces deux pièces dans le cas où elles seraient delardées.

Nous avons vu § 64, fig. 43, que l'on délardait les pièces lorsque l'on voulait que leurs faces latérales fussent contenues dans des plans verticaux, ce qui, pour le cas où les charpentes sont apparentes donne un effet plus satisfaisant.

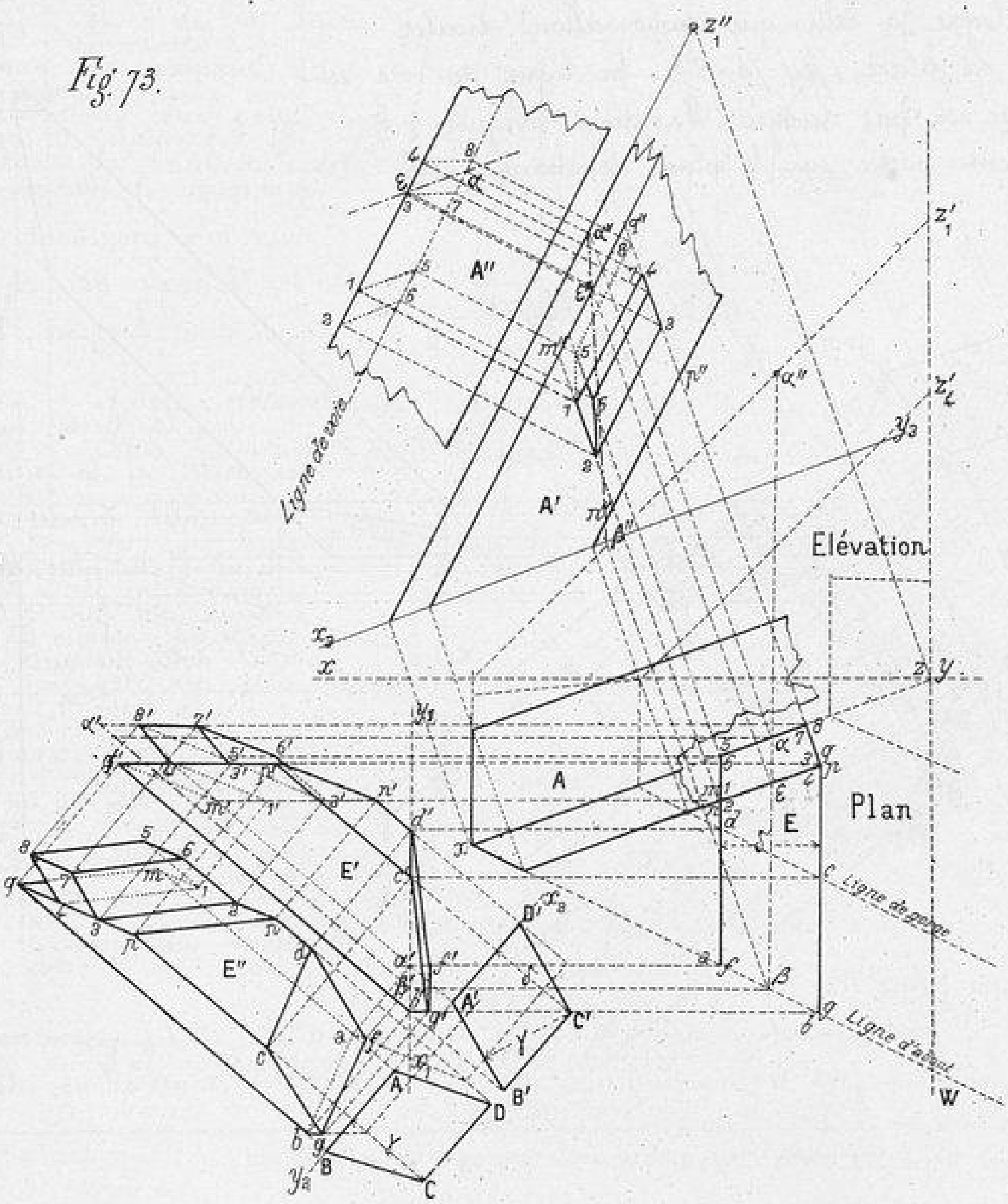
§ 54. – Empanon délardé (fig. 73).

(a) *Mise en place.* – Les données sont les mêmes que sur les figures 71 et 72. – L'empanon que nous étudierons est un de ceux qui sont indiqués à gauche soit sur la figure d'ensemble 62 soit sur la figure 64.

La ligne de voie est donnée à priori en $\alpha\beta$ fig. E, sur le plan, et l'équarrissage en largeur δ est indiqué aussi à priori, sur ce plan ce qui donne en bp et am les projections des faces latérales. – Le tenon a son about formé par un plan $p\,8$ vertical et perpendiculaire à la face de l'arêtier.

(b) *Projection de l'empanon sur les faces d'épaisseur (fig. E').* – On prend en x_1y_1 un nouveau mur parallèle aux arêtes de l'empanon et après avoir pris sur l'élévation en α''' la hauteur du point α de la ligne de voie on en déduit en $\beta'\alpha'$ la projection de cette ligne de voie sur le nouveau mur, ce qui permet d'obtenir les projections de toutes les arêtes, du tenon et de l'embrèvement sur la figure E'. De simples lignes de rappel suffisent pour y arriver.

Fig. 73.



(c) *Projection de l'empanon sur sa face de lattis (fig. E'').* – On donne en E'' quartier à la pièce E', ce qui exige d'abord la recherche en A'B'C'D', sur un mur x_2y_2, de la section droite (parallélogramme) de la pièce).

On reproduit en ABCD cette section droite en utilisant pour cela la

seconde hauteur y du parallélogramme ; mais alors c'est la face A'B' et non plus A'D' qui est couchée sur le plan horizontal. On en déduit les arêtes de la figure E" et par des lignes de rappel menées de la figure E' tous les points utiles de la figure E".

(d) *Mortaise de l'empanon dans l'arêtier* (fig. A, A' et A").- On prend en $x_1 y_1$ un nouveau mur parallèle à la face verticale de l'arêtier.- La ligne de voie de l'empanon projetée en B"α" sur ce mur fait connaître la direction des arêtes 2.6 - 1.5.- Le parallélogramme d'occupation m"n"p"q" a deux de ses côtés verticaux. Il s'obtient immédiatement par lignes de rappel issues de la figure A. L'entrée de la mortaise 1.2.3.4. s'obtient en prenant le tiers des côtés verticaux. Quant à l'about 3.4 - 7.8, il est tout entier projeté en ligne droite puisque le plan de cet about est perpendiculaire à la face verticale de l'arêtier.- On donne quartier à l'arêtier en A". (Explications inutiles).

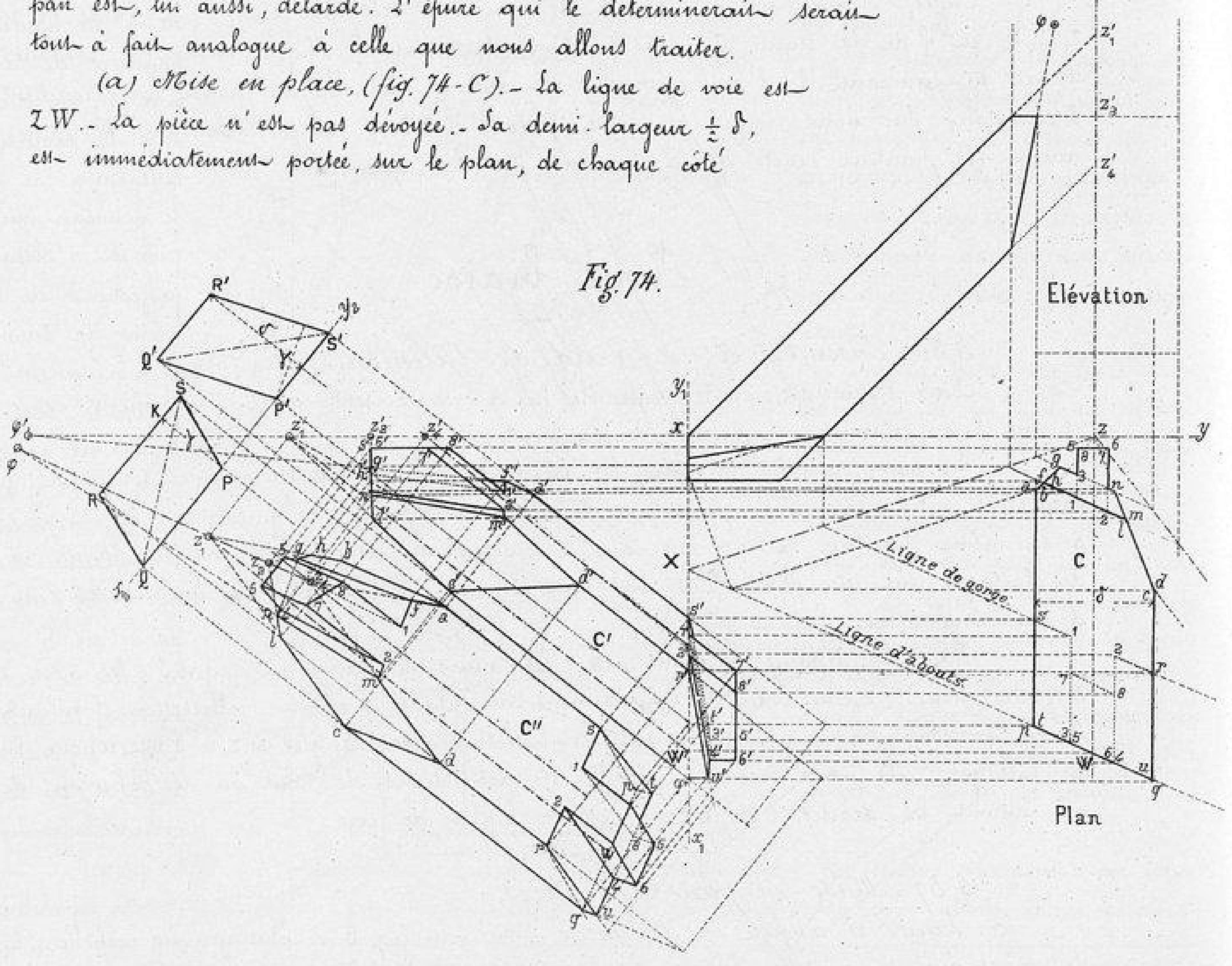
§ 55.- Arbalétrier délardé de croupe biaise.

Comme second exemple de pièce délardée nous étudierons l'arbalétrier de croupe biaise.

On voit cet arbalétrier délardé indiqué sur les figures d'ensemble 63 et 64. Sur cette dernière la ferme de long pan est biaise et l'arbalétrier de long pan est, lui aussi, délardé. L'épure qui le déterminerait serait tout à fait analogue à celle que nous allons traiter.

(a) *Mise en place*, (fig. 74-C).- La ligne de voie est ZW.- La pièce n'est pas dévoyée.- Sa demi largeur ½ δ, est immédiatement portée, sur le plan, de chaque côté

Fig. 74.



de la ligne de voie ce qui détermine les faces verticales u d et p a. Le déjoutement se fait par les plans verticaux d m n (à droite) et a f g (à gauche) convergeant au point Z.

(b) *Projection sur les faces d'épaisseur.* – Comme au §54 on prend en $x_1 y_1$ un nouveau mur parallèle aux arêtes de la pièce, on détermine d'abord en $W'Z'_1$ (fig. C') en reportant la hauteur du sommet Z, la projection de la ligne de voie et l'on en déduit celles des arêtes. Des lignes de rappel menées des différents points de la figure C suffisent pour limiter et déterminer toutes les lignes de la figure C'.

(c) *Projection sur le lattis* (fig. C"). – On donne quartier à la figure C'. – à cet effet, on cherche d'abord en P'Q'R'S' sur un mur $x_2 y_2$ la section droite (parallélogramme) de l'arbalétrier. – La hauteur δ de la figure C' est empruntée à la largeur δ de la figure C.

On reproduit en P Q R S, en s'aidant de la seconde hauteur y, le parallélogramme de section droite ; mais on place horizontal le côté P Q qui, sur la figure C', ne l'était pas. – On en déduit les projections des arêtes sur la figure C" et par des lignes de rappel menées des différents points de la figure C' on achève de déterminer la figure C".

Nota. – Remarquer les points de concours tels que $Z'_1\ Z'_2\ Z'_4$ et f' de la figure C'. $Z_1\ Z_2\ Z_4$ et f de la figure C". – La position du point f' (fig. C') point de concours sur l'axe du rampant de l'embrèvement est déduite de celle du point correspondant de l'élévation. Sur notre croquis ce point f de l'élévation est en dehors de la feuille. On en aurait la hauteur exacte en la prenant sur la figure 72.

Noue biaise.

§ 56. – *Ensemble d'un nœud de bâtiments.* (fig. 75).

Deux bâtiments I et II (ensemble. fig. A) se croisent en Z, et forment en ce point ce que l'on nomme un nœud de bâtiments.

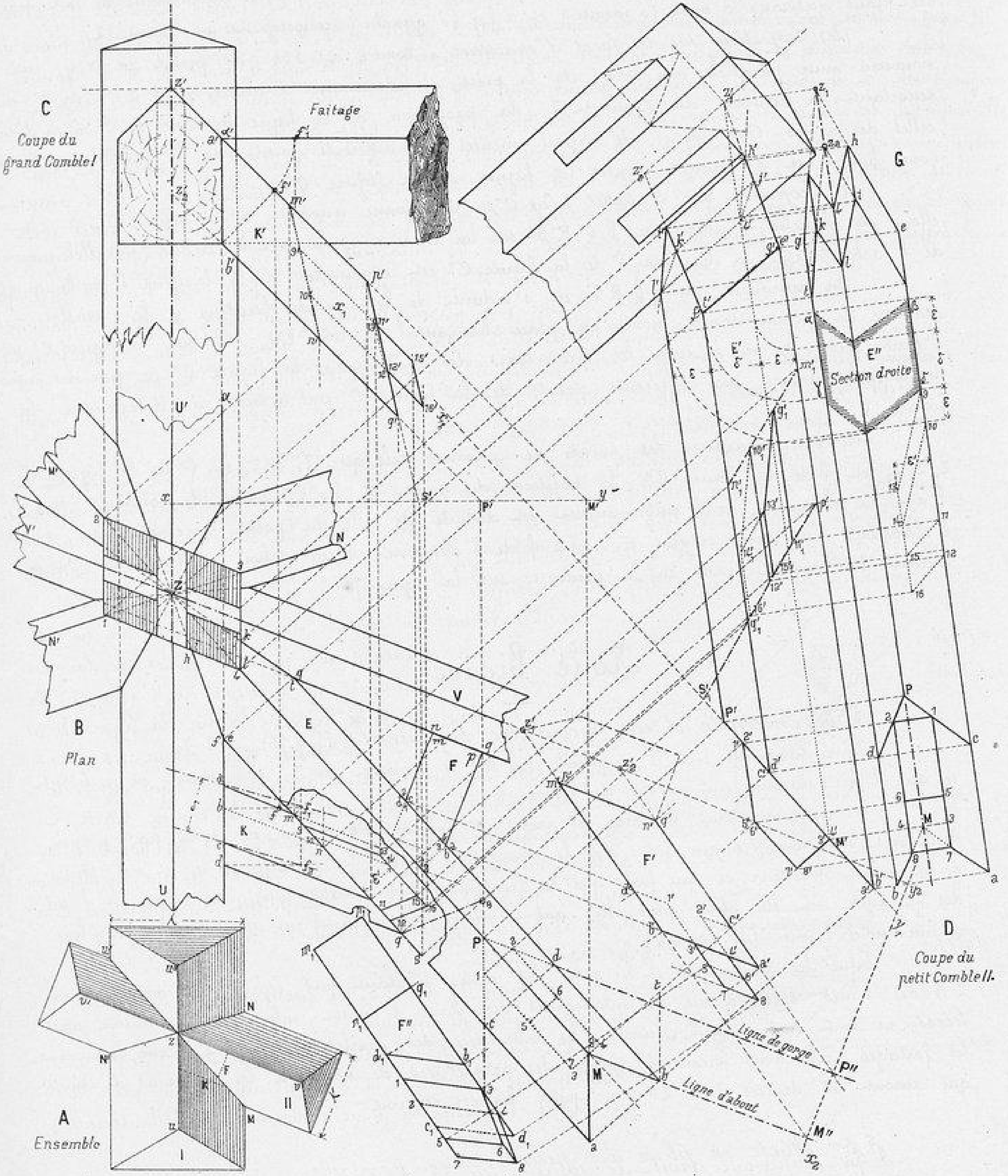
Les axes, confondus ici avec les arêtes de faîtage u u' et v v', ne sont pas perpendiculaires entre eux, ce qui fait que le nœud est *biais*. Les faîtages u u' et v v' sont à la même hauteur, ce qui fait que le croisement est réalisé par une noue. Si l'un des faîtages eût été placé plus bas que l'autre, on aurait eu un noulet au lieu d'une noue (voir fig. 60, n, n).

Enfin les distances λ et λ' entre les murs n'étant pas égales, les axes Z M et Z N des noues, c'est-à-dire les intersections des plans d'égout, intersections formant gouttières, ne sont pas dirigées suivant les bissectrices des angles u Z v' – v' Z u' que forment les faîtages ; cela nous forcera à dévoyer les arbalétriers de noue ou les chevrons de noue qui auront les droites Z M, Z N ...... pour lignes de voie.

§ 57. – *Mise en place des pièces.*

(a) *Lignes d'about et de gorge.* – On voit fig. B à plus grande échelle, le plan des pièces qui se croisent. – Le point Z croisement des faîtages se nommera le nœud. –

Fig. 75.


C
Coupe du
grand Comble I
Faitage
B
Plan
A
Ensemble
G
Section droite
D
Coupe du
petit Comble II
Ligne de gorge
Ligne d'about

Il y aura le nœud de lattis supérieur Z'_1 et celui de lattis inférieur Z'_2 (fig. C). ZM et ZN sont les lignes de voie des noues. ZV et Zu les arêtes des faîtages. Les coupes normales fig. C et fig. D faites sur chacun des combles ont permis d'établir en Z'_1M' et Z'_1P' (fig. C) les plans de lattis supérieur et inférieur, desquels on a déduit (fig. B) la ligne d'about M'M de grand comble et la ligne de gorge de grand comble PP'. On a, de même, déduit de la coupe fig. D, les lignes d'about (MM") et de gorge PP" du petit comble.

(b) *Poinçon et faîtages.* – Le poinçon 1, 2, 3, 4 (fig. B) se trace en se retournant sur les gouttières. Il a donc la forme d'un parallélogramme. Si les portées des combles avaient été égales, on aurait obtenu un losange. Les faîtages se déduisent l'un de l'autre par la loi des homologues, en se retournant sur les diagonales 1.3, 2.4.

(c) *Noue dévoyée.* – On dévoye la noue ZM (fig. B) comme on a fait pour l'arêtier de croupe biaise. A cet effet, on a porté en Mt sur une perpendiculaire à la ligne de voie, l'épaisseur à donner à la pièce. On a mené tb parallèle à Ma, et on a obtenu le point b, sur la ligne d'about du petit comble, d'où l'on a déduit, en ba, la largeur mise en place.

(d) *Déjoutements.* – L'assemblage au nœud Z, se fait par déjoutement en tour ronde suivant les plans verticaux fhZ - gkZ. etc......

Les faîtages s'assemblent dans le poinçon à tenon et mortaise. Les noues ne s'y assemblent que par engueulement, sans tenon et même sans embrèvement; la gouttière ZM fait que le point 4 situé sur l'arête du poinçon est plus bas que les deux points h et k ce qui empêche de relier facilement ces trois points par un embrèvement horizontal; à moins d'adopter la disposition indiquée ci-contre, fig. 76.

Fig. 76.

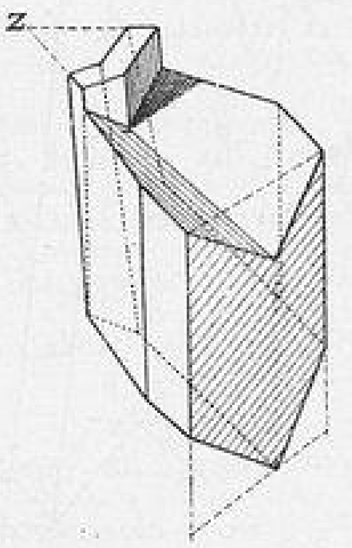
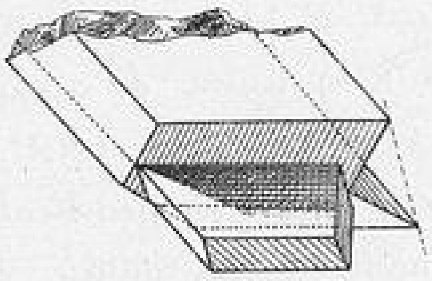


Fig. 77.



(e) *Projections du chevron de noue.* – On a pris en x_1y_1 un nouveau mur parallèle aux faces verticales de la noue et, par reports de hauteurs on a obtenu en E' (fig. G) la projection du poinçon et de la noue. Enfin la figure E' a reçu quartier en E". Les opérations pour obtenir ces projections sont absolument analogues à celles qui ont été faites et expliquées à l'occasion de la croupe biaise. – On remarquera que sur le plan (fig. E) les points e et g sont sur une même ligne de rappel, et que en élévation (fig. E') plusieurs points se superposent en apparence. Cela tient à ce que les faîtages ont été retournés par la loi des homologues.

La figure 77 montre, en perspective, la disposition du tenon cm pied de la noue.

On voit en E" (fig. G) la section droite de la noue permettant de déterminer l'équarrissage de la pièce de bois dans laquelle la noue s'obtiendrait par délardement.

§ 58. – *Empanon droit de noue (fig. 75, F, F', F")*

Un empanon peut avoir sa direction perpendiculaire à l'arête du faîtage. Tel est

celui qui est indiqué en F sur la figure d'ensemble A, et également en F sur le plan (fig. B). Dans ce cas ses arêtes sont des lignes de plus grande pente du plan de lattis et la pièce n'a pas besoin d'être déversée ni délardée. On dessine l'empanon en F sur le plan (fig. B). On le représente en F' sur la coupe du petit comble fig. D.- Ses arêtes y sont projetées en vraie grandeur et il ne reste plus qu'à lui donner quartier, ce qui a été fait sur la figure F". Pour comprendre ces différentes projections on n'a besoin que de regarder les figures F, F' et F", sur lesquelles les mêmes points sont indiqués par les mêmes lettres ou les mêmes numéros.

On remarquera que l'empanon repose à plat joint sur le faîtage par l'intermédiaire du rectangle d'occupation $m\,n\,p\,q$ - $m'n'p'q'$ - $m_1 n_1 p_1 q_1$. Il n'y a pas de tenon.

§ 59.- Empanon déversé de noue. (fig. 75 K).

(a) Arêtes de dessus et mise en largeur.- Si la direction de l'empanon est parallèle aux lignes d'about ou de gorge (K, fig. A), alors les arêtes du prisme ne sont plus dirigées suivant des lignes de plus grande pente des lattis et la pièce, équarrie, a besoin d'être déversée.

Le déversement se fait comme pour l'empanon de croupe biaise.

On se donne en $a\,m$, sur le plan, fig. K, la position d'une arête. Mais on ne peut, à priori, tracer l'autre, $c\,p$, à une distance égale à l'équarrissage δ. On fait un rabattement horizontal de la pièce, ordinairement autour de l'arête $\alpha\alpha'$ du faîtage; on choisit (fig. K' et fig. K) un point ff', sur l'arête $a\,m$, et on le rabat en $f'f_1$.- L'arête rabattue est $a f_1$ et l'on peut alors construire l'autre arête rabattue $c f_2$ à la distance δ de la première; ce qui donne le point c sur la ligne d'about de faîte $a\,b$, et par suite l'autre arête $c\,p$.

(b) Arêtes de dessous et déversement.- Si, comme pour la croupe biaise (§ 51.d) on a eu soin de prendre le point mobile ff' (fig. K') sur la perpendiculaire $b'f'$ abaissée de la ligne de gorge de faîte sur le lattis supérieur, alors la perpendiculaire $f\,b$ menée en plan (fig. K) donne en b le départ de l'arête de dessous $b\,n$. L'autre arête s'obtient de même en $d\,q$.

(c) About du tenon 11-12-15-16.- Comme pour l'empanon de croupe (§ 51-h) la direction $q\,\theta$ des arêtes de l'about du tenon s'obtient en cherchant l'intersection du plan d'un des lattis, avec un autre plan qui sera le plan d'about, mené par le côté $p\,q$ (fig. E) $p'q'$ (fig. K') et $p_1'q_1'$ (fig. E') du parallélogramme d'occupation, et perpendiculaire à la face verticale de la noue.- Nous prendrons le lattis inférieur.- On se sert de la projection E'. Le plan d'about en question est perpendiculaire au mur $x_1 y_1$, sa trace verticale sur ce mur est $p_1'q_1'S_1'$ et sa trace horizontale est $S_1'\theta S$ perpendiculaire sur $x_1 y_1$. On prend en θ l'intersection de cette trace avec la ligne de gorge $P\,P'$ qui est la trace du lattis inférieur, et joignant θ au sommet q, qui est aussi dans le lattis inférieur, on obtient en $q\,\theta$, la direction cherchée.

Le reste du tracé s'achève comme pour l'empanon déversé de croupe.

On devra s'exercer à mettre la pièce en berse et à lui donner quartier sur ses faces normales.

(d) Mortaise dans la noue (*fig. E'*). – Les lignes de rappel indiquent suffisamment la concordance des points entre les figures E, E' et E". On remarquera que sur la figure E' l'about du tenon 11', 12', 15', 16' doit se projeter en ligne droite ; puisque ce qui caractérise le plan de l'about, c'est d'être perpendiculaire sur le mur x, y_1.

Escaliers.

8e Leçon.

§ 60. – Généralités.

Un escalier est une construction destinée à racheter deux niveaux différents et à permettre de passer facilement de l'un à l'autre. – Lorsque l'espace dont on dispose est considérable, un plan incliné constitue la meilleure disposition à adopter. Si l'espace était plus restreint le plan incliné AB (fig. 78) aurait une pente trop rapide pour que l'on pût y poser le pied et l'y maintenir aisément.

Alors on substitue au plan incliné AB une série de plans horizontaux étagés ab - cd - ef, nommés marches ou degrés dont l'ensemble constitue un escalier. – On nomme giron (g) d'une marche, la profondeur ab ou cd de l'espace sur lequel pose le pied. – En réalité c'est la distance ab (fig. M) qui sépare l'arête a d'une marche de la projection, sur son plan de dessus, de l'arête c de la marche située immédiatement au-dessus.

On nomme hauteur (h) d'une marche la différence de niveau cb qu'elle rachète.

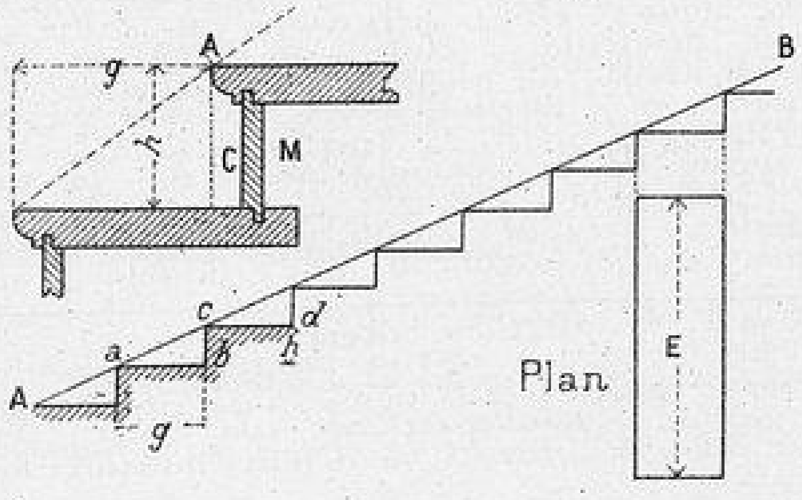
L'emmarchement (E) est la longueur totale, comptée parallèlement aux arêtes.

L'échappée est la distance verticale d'une marche à la surface d'intrados de la rampe supérieure. – A la rigueur l'échappée pourrait être égale à la hauteur ordinaire d'une personne, mais c'est un minimum auquel il ne faut jamais descendre. L'échappée ne devra jamais être inférieure à 2 mètres.

§ 61. – Relations entre le giron et la hauteur.

La hauteur des marches et la grandeur des girons varient avec la grandeur des bâtiments et avec l'espace disponible, en plan, comparé à la différence de niveau qu'il faut franchir.

Fig. 78.



La hauteur ordinaire h est de 16c et le giron qui lui correspond est de 32c. Ce sont les dimensions dont il faut autant que possible se rapprocher. On voit qu'elles répondent à un plan incliné dont la pente serait égale à ½. Cela donnerait sensiblement 6 marches par mètre en hauteur (6 x 16 = 96 cent. au lieu de 100 cent.) et 3 marches par mètre en plan (3 x 32 = 96 cent.). Ce sont en effet ces proportions que les architectes

admettent, à priori, dans l'étude d'un projet. Mais il peut se faire que l'on s'en écarte, soit pour les escaliers intérieurs, lorsque l'espace fait défaut pour placer 3 marches par mètre en plan, soit pour les escaliers extérieurs à grande circulation pour perrons ou terrasses, lorsque l'on veut les établir sur une pente plus douce que $\frac{1}{2}$.

Dans le premier cas (escalier intérieur à petit développement) on ne devra jamais dépasser $0^M,20$ pour la hauteur h, et dans le second cas (escaliers à grand développement) descendre au-dessous de $0^M,12$.

Lorsque l'on augmente la hauteur h d'une marche il faut en diminuer le giron g afin que la fatigue d'une personne qui monte n'en soit pas augmentée et inversement. On emploie d'ordinaire l'une des deux formules suivantes:

(1) $g + 2h = 0^M,64$ (formule de Blondel)

(2) $g + h = 0^M,48$

La formule (1) de Blondel donne une compensation plus exacte que la formule (2). Elle est établie d'après ce principe que sur un plan horizontal ($h = 0$) la distance moyenne que nous parcourons sans forcer le pas est de $0^M,64$ (1), tandis que sur une échelle verticale ($g = 0$) la meilleure hauteur à donner aux échelons est de $0^M,32$. La formule de Blondel s'applique aux cas extrêmes du plan horizontal et de l'échelle verticale et l'on admet qu'elle s'applique aussi aux cas intermédiaires, c'est-à-dire à un escalier quelconque.

Appliquons-la: 1° à l'escalier type de pente $\frac{1}{2}$. - Il faut faire $g = 2h$, ce qui donne: $3h = 0^M,64$ et $h = 0^M,16$, $g = 0^M,32$.

2° à l'escalier extérieur pour terrasse $h = 0^M,12$, cela donne: $g + 0,24 = 0^M,64$ d'où $h = 0^M,12$ et $g = 0^M,40$.

3° à un escalier intérieur de pente maxima $h = 0^M,20$, d'où $g + 0,40 = 0,64$ et $g = 0^M,24$.

Dans ce dernier cas, comme l'espace de 0,24 serait insuffisant pour poser le pied il sera bon (voir M, fig. 78) de faire déborder la marche A sur la contre-marche c, ce qui augmentera l'espace disponible pour une personne qui monte, mais non pour une qui descend.

§ 62. - *Calcul des dimensions des marches.*

Ligne de foulée. - Appliquons la formule de Blondel au calcul d'un escalier. - Le projet d'ensemble fait connaître: 1° La hauteur totale H de l'espace à franchir, c'est-à-dire la différence de niveau des sols des deux étages que l'escalier doit réunir et 2° le développement, en plan de la *ligne de foulée*, c'est-à-dire de la ligne suivant laquelle se tiendrait, selon toute probabilité, une personne seule qui monterait ou descendrait l'escalier. En général, dans les escaliers la ligne de foulée s'établit à $0^M,50$ ou $0^M,60$, en plan, de la rampe ou main-courante sur laquelle on s'appuie pour monter ou descendre. C'est à peu près la distance en plan de la main de la personne qui tient la rampe à la verticale qui passerait par son centre de gravité. - Prenons comme exemple l'escalier indiqué en plan

---

(1) En faisant dans la formule $h = 0$, ce qui répond au plan horizontal cela donne: $g = 0^M,64$; en y faisant $g = 0$ ce qui répond au cas de l'échelle verticale cela donne: $2h = 0^M,64$ d'où $h = 0^M,32$.

sur la figure 79. - Ce plan est à l'échelle de $0^M,02$ pour 1 mètre (1/50). - L'escalier est analogue à ceux que l'on construit à Paris dans les maisons à loyer. - La place disponible pour la cage[1] est en général assez restreinte, ses dimensions sont ici de $4^M,95$ sur $2^M,95$ les marches ont $1^M,20$ d'emmarchement. Le Palier[2] a une largeur de $1^M,40$, ce qui permet aux portes A A d'avoir $1^M,20$ d'ouverture et d'être garnies de chambranles a, a... de $0^M,$ de largeur (1,20 + 0,10 + 0,10 = 1,40). Le vide B, a $0^M,55$ d'ouverture.

L'escalier est dit en *quartier-tournant*, ce qui veut dire que en plan les deux volées droites M N et P Q de la ligne de foulée sont réunies entre elles par un demi-cercle NP.

La ligne de foulée est tracée en M N P Q à $0^M,50$ du vide.

Enfin nous supposerons que la hauteur H totale à franchir soit $H = 3^M,60$ ce qui, en admettant de 0,20 à 0,25 pour l'épaisseur des planchers en fer répond à une hauteur sous plafond de $3^M,35$ à $3^M,40$.

Cela posé : Calculons le nombre des marches, suivant lequel il faut diviser la ligne de foulée. - Soit n, ce nombre total des marches de l'étage ; nous aurons une première équation : (1) $n h = H$, ici $n h = 3,60$.

La dernière marche fait corps avec le palier ; elle a reçu le nom de *marche d'arrivée*. - La première marche (N° 1) porte le nom de *marche de départ*, quand elle est la première de tout l'escalier, c'est-à-dire située à rez-de-chaussée, et le nom de *marche de remontoir*, lorsqu'elle est la première d'un étage intermédiaire. - La marche de départ repose sur le sol, elle est exposée à l'humidité, c'est pourquoi elle se fait ordinairement en pierre dure.

Remarquons (fig. 79) que la dernière marche (N° 22) ou marche d'arrivée d'un étage est formée par le palier. Par conséquent, si l'étage comprend n degrés, la ligne de foulée M N P Q ne devra être divisée qu'en n-1 parties.

Mesurons avec le compas à pointes sèches, la longueur rectifiée de la ligne MNPQ. Nous trouvons ici pour sa longueur totale rectifiée G = 6,65.

Nous pouvons donc écrire la seconde équation :

(2) $(n-1)\, g = G$; ici $(n-1)\, g = 6,65$.

Enfin la formule de Blondel nous donne une 3e équation :

(3) $g + 2h = 0^M,64$; ce qui permet de déterminer les 3 quantités g, h et n.

---

(1) On nomme cage d'un escalier l'espace vide entouré de maçonnerie dans lequel l'escalier sera construit. - Tant que l'escalier n'est pas placé la cage forme un grand vide cylindrique ou prismatique dans toute la hauteur de l'édifice.

(2) On nomme Palier, un espace plan qui sépare deux révolutions de l'escalier. - Son but est : 1° de donner en A A ... un accès facile aux appartements de chaque étage ; 2° de rendre insensible, à la personne qui monte, les variations de la hauteur et du giron des marches d'un étage à l'autre ; ces variations sont rendues inévitables par la différence de hauteur des étages ; 3° de procurer un repos aux personnes qui ont plusieurs étages à franchir. - Dans les escaliers dits à *vis*, c'est-à-dire établis sur plan exactement circulaire, le palier est remplacé par une *marche palière*, qui n'est autre chose qu'une marche d'une largeur plus grande (double ou triple) que les autres marches.

C'est surtout n qu'il importe de connaître ; il suffit pour cela d'éliminer g et h entre les trois équations (1) (2) et (3)

De (1) on tire : $h = \frac{H}{n} = \frac{3,60}{n}$.

De (2) on tire : $g = \frac{G}{(n-1)} = \frac{6,65}{(n-1)}$

Substituant dans (3) cela donne l'équation :

(4) $\frac{G}{n-1} + \frac{2H}{n} = 0^M,64$, ou en développant :

(5) $nG + 2nH - 2H = 0,64\,n^2 - 0,64\,n$, qui est du second degré en n, et serait compliquée à résoudre.

Mais remarquons : 1° qu'il faut prendre pour n un nombre entier et que, par conséquent, la valeur de n n'a pas besoin d'être déterminée avec précision ; 2° Que l'escalier doit assez peu s'écarter de l'escalier type pour lequel on aurait $h' = 0^M16$ et par suite $H = n \times 0,16$.

Par conséquent dans l'équation (5) remplaçons H par $n \times 0,16$, cela nous permettra d'avoir n en facteur dans les deux membres et ramènera l'équation au premier degré.

Elle devient alors, en divisant les deux membres par n :

(5') $G + 2H - 2 \times 0,16 = 0,64\,n - 0,64$.

d'où l'on tire :

$n = \frac{G + 2H + 0,32}{0,64}$; Dans le cas actuel cela donne :

$n = \frac{6,65 + 7,20 + 0,32}{0,64} = 22,14$.

On forcera soit en plus, soit en moins et l'on prendra $n = 22$ ou $n' = 23$ ce qui donne dans chaque cas pour h et g

pour $n = 22$	$h = \frac{H}{n} = \frac{3,60}{22} = 0^M,164$	$g = \frac{G}{n-1} = \frac{6,65}{21} = 0^M,316$.
pour $n' = 23$	$h' = \frac{H}{n'} = \frac{3,60}{23} = 0^M,156$	$g' = \frac{G}{n'-1} = \frac{6,65}{22} = 0^M,302$.

Remarques : 1° Pour avoir g nous avons divisé la longueur totale G de la ligne de foulée par n-1 et non pas par n, puisque le palier compte pour une marche.

2° On prendra de préférence $n = 22$ parce que 22 est un nombre pair. La ligne de foulée sera donc divisée en un nombre impair ($n-1 = 21$) de parties égales, ce qui placera l'axe d'une marche (ici la marche N° 11) dans l'axe longitudinal ZZ de la cage (fig. 79).

Ayant ainsi calculé, $n = 22$ nous divisons sur le plan fig. 79, la ligne de foulée en 21 parties égales et nous pourrions tracer les arêtes des marches normales à cette ligne, comme cela est indiqué dans la partie inférieure, non balancée, W du plan.

Dans la partie qui est en ligne droite MN ou PQ les arêtes des marches seront donc parallèles, tandis que dans le quartier tournant NP elles convergeront au centre.

§63. – Principe du balancement des marches.

Dans ces conditions, pour quelqu'un qui gravirait l'escalier en restant sur la ligne de foulée, le tracé serait très bon, et si l'on donnait, fig. 80, le développement de la section obtenue dans l'escalier par un cylindre vertical qui aurait pour base la ligne de foulée, cylindre que l'on nomme le *cylindre de foulée*, nous trouverions toutes les arêtes des marches disposées en m° 2° 3° …….. 12° 13° …….. sur une seule droite MQ, répondant à une base de $6^M,65 = G$ et à une hauteur de $3^M,60 = H$.

Mais étudions la trajectoire suivie par quelqu'un qui, dans l'hypothèse du tracé W non balancé, monterait en se tenant sur la courbe de jour m.n.p.q. - A cet effet développons le cylindre qui aurait cette courbe pour base et que nous nommerons le cylindre de jour.

De m en n, fig. 79 sur la partie droite, le développement fournira en ne s'occupant que des arêtes supérieures des marches, une ligne droite m''n'', qui aura la même pente que pour la ligne de foulée. - Pour achever le développement nous prendrons, en section droite, fig. 80, une longueur n'p' égale au développement n p (fig. 79) du demi-cercle de jour, et à la suite, une longueur p'q'' égale à la partie droite pq. - La pente de ce dernier développement sera donnée par la droite p''q'' (fig. 80) parallèle à m''n''. - En joignant n'' et p'' nous aurons le développement de l'hélice située sur le demi-cercle du cylindre de jour. - On voit donc que pour quelqu'un qui monterait en se tenant sur le collet (1) des marches, l'effet-

Fig. 79.

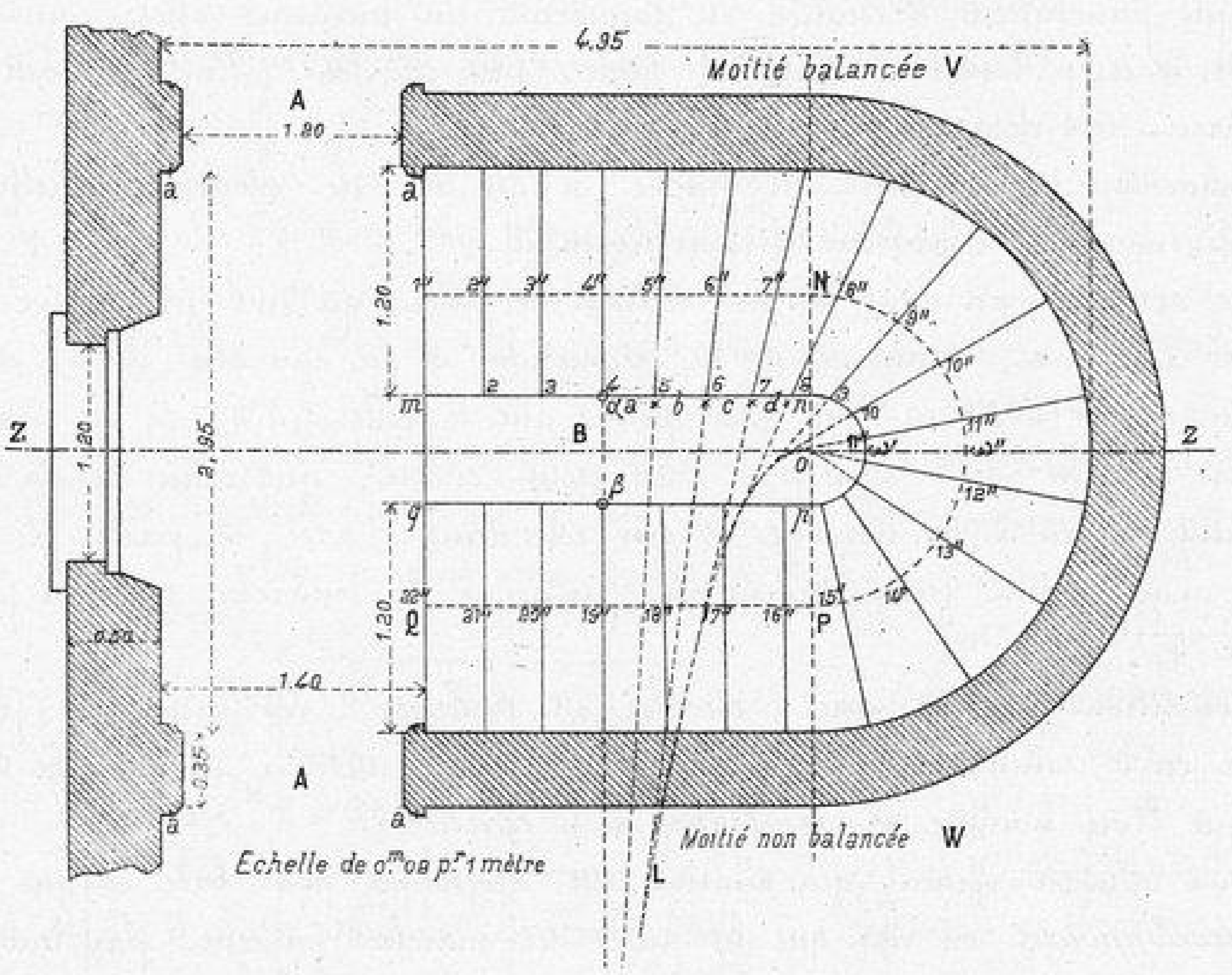
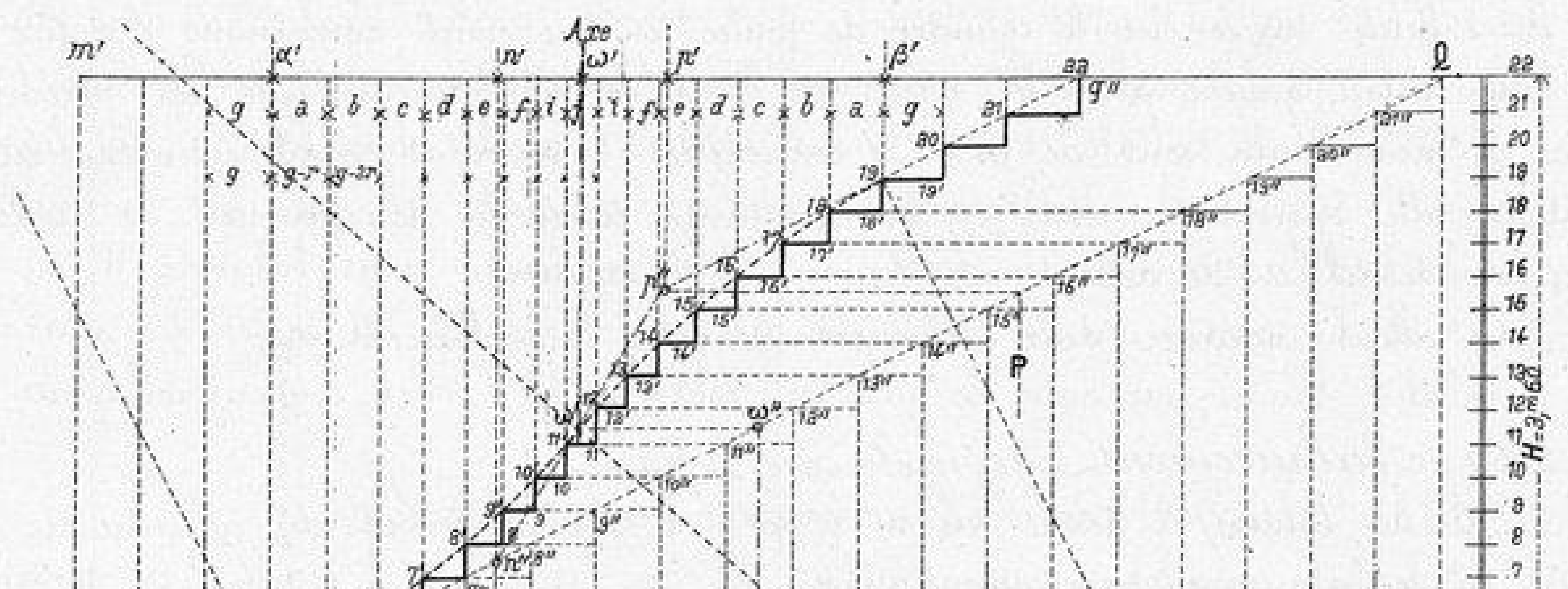


Fig. 80.



(1) Le collet d'une marche est la portion de la marche située près du limon ; c'est la partie la plus étroite de la marche.
Le limon est une construction qui soutient toutes les marches du côté du cylindre de jour. Les marches s'y assemblent par leur collet

produit serait le même que si après avoir gravi un plan incliné m"n" en pente assez douce, ou un escalier qui s'inscrirait dans ce plan incliné, on trouvait, brusquement, un plan incliné à pente plus rapide n"p", auquel succéderait encore un troisième plan incliné p"q" de même pente que le premier.

Dans la portion n"p" les marches auraient une largeur au collet qui serait brusquement beaucoup plus faible que dans les parties droites. Cela constituerait un danger pour les personnes qui franchissent l'escalier et donnerait un mauvais effet comme coup d'œil :- Aux points n" et p" toutes les surfaces situées près du jour (limon, main courante) présenteraient un jarret très désagréable.

Ces inconvénients disparaîtront en partie si au lieu de modifier brusquement les largeurs au collet, nous les modifions progressivement :

Ainsi, par exemple, au lieu de ne réduire le collet qu'une fois arrivé en n (fig. 79) au quartier tournant, commençons la réduction à la marche N° 4.- Nous donnerons à celle-ci un collet (4-5) un peu plus petit que le collet (3-4) de la marche N° 3. Le collet (5-6) de la marche N° 5 sera pris plus petit encore, que celui de la marche N° 4 et ainsi de suite jusqu'à la marche 11 qui est dans l'axe.- A partir de celle-ci les collets iront en augmentant progressivement, jusqu'à la marche 19, qui fait pendant à la marche 4.

Dans ces conditions, on dit que l'escalier est *balancé*.- Les marches (fig. 79-V) au lieu de converger en O, comme en W sont, en plan, tangentes à une courbe OL qui est leur enveloppe, et que l'on nomme la *développée de l'escalier*.(1)

Imaginons un cylindre vertical qui aurait cette développée pour base et que nous nommerons le *cylindre développoïde*, on voit que les arêtes des marches forment par leur ensemble une surface gauche à plan directeur, à noyau et à directrice.

Le plan directeur est le plan horizontal.- Le noyau est le cylindre développoïde.- La directrice est l'hélice tracée sur le cylindre de foulée, et que nous nommerons l'*hélice de foulée*.

Cette surface gauche dont les arêtes des marches ne forment que des génératrices isolées, constituera, si nous l'abaissons de 20 à 30 centimètres l'intrados, ordinairement en plâtre, de l'escalier ; elle engendrera aussi en la montant et en la descendant de quantités voulues la surface de dessus et de dessous du limon de l'escalier.

Nous allons indiquer deux manières de faire le balancement.

§ 64.- Balancement géométrique. (fig. 80).

1° On dessine, comme ci-dessus, en m"n"p"q" le développement du cylindre de jour dans l'hypothèse où le balancement ne serait pas fait.

2° On se donne, arbitrairement, la première et la dernière marche balancées.- Ici nous avons pris comme extrêmes les marches N° 4 et N° 18, ce qui détermine en α et en β symétrique de α par rapport au milieu ω' de la rampe rapide n"p", le point de départ et

(1) Cette courbe serait la développée de la trajectoire orthogonale des marches.

d'arrivée d'une courbe $\alpha \omega' \beta$ que l'on substitue à la ligne brisée $\alpha\, n''\, p''\, \beta$, fig. 80.

3° Cette courbe est tangente en α et β aux rampes $m''\alpha$ et $\beta\, p''$ et de plus elle doit passer par le point milieu ω'. On pourra la tracer soit à la main, soit au compas, soit encore avec une règle élastique.

4° Cette courbe de balancement une fois dessinée, on détermine en 5', 6', 7'..... ses points de rencontre avec les plans horizontaux des dessus des marches, et l'on en déduit en a, b, c, d... i j i..... d, c, b, a, les largeurs qu'il faut donner aux collets, largeurs que l'on prend sur la fig. 80 pour les reporter en (4-5), (5-6), (6-7) etc...... sur le plan (fig. 79).

§ 65. - Balancement arithmétique.

On s'impose par cette méthode, que les marches décroissent en progression arithmétique depuis la première marche balancée (N° 4) jusqu'à l'axe (N° 11, inclus) pour croître ensuite, suivant une progression inverse, jusqu'à la dernière marche balancée (N° 18).

Soit r la raison inconnue de cette progression. - Nous mesurerons soigneusement sur la courbe de jour la longueur $\alpha\, n\, p\, \beta$ rectifiée sur laquelle doit porter le balancement. - Nous avons trouvé ici pour cette longueur $L = 3^M,15$.

Nous pouvons donc former le tableau suivant :

N^os des marches	Collets — Expression des longueurs	Collets — Longueurs calculées
4	g - r	31c,6 - 2c,5 = 29c,1
5	g - 2r	——— 26,6
6	g - 3r	——— 24,1
7	g - 4r	——— 21,6
8	g - 5r	——— 19,1
9	g - 6r	——— 16,6
10	g - 7r	——— 14,1
+ 11	g - 8r	milieu 11,6
12	g - 7r	——— 14,1
13	g - 6r	——— 16,6
14	g - 5r	——— 19,1
15	g - 4r	——— 21,6
16	g - 3r	——— 24,1
17	g - 2r	——— 26,6
18	g - r	——— 29,1
Totaux...	15g - 64r	——— 314c,0

Nous avions $g = 0,316$.

La 2° colonne nous donne $15g - 64r = L = 3,15$ d'où nous déduisons :

$15 \times 0,316 - 64r = 3,15$, et

$r = \frac{15 \times 0,316 - 3,15}{64} = \frac{4,74 - 3,15}{64} = 0^M,0248$;

En forçant on prendra pour la raison

$r = 0^M,025$, soit $2^c,5^{mm}$.

La 3° colonne donne les longueurs des collets. - Chaque nombre, jusqu'au 11°, s'y obtient en retranchant la raison 2c,5 du nombre situé au-dessus ; au-delà du 11° nous retrouvons les mêmes quantités en ordre inverse.

Nota. - La somme des collets donne $3^M,14$ au lieu de $3^M,15$, l'erreur est de 1 centimètre ; elle est insignifiante.

9° Leçon.

Epure du limon d'escalier.

§ 66. - Construction d'un escalier à volées droites.

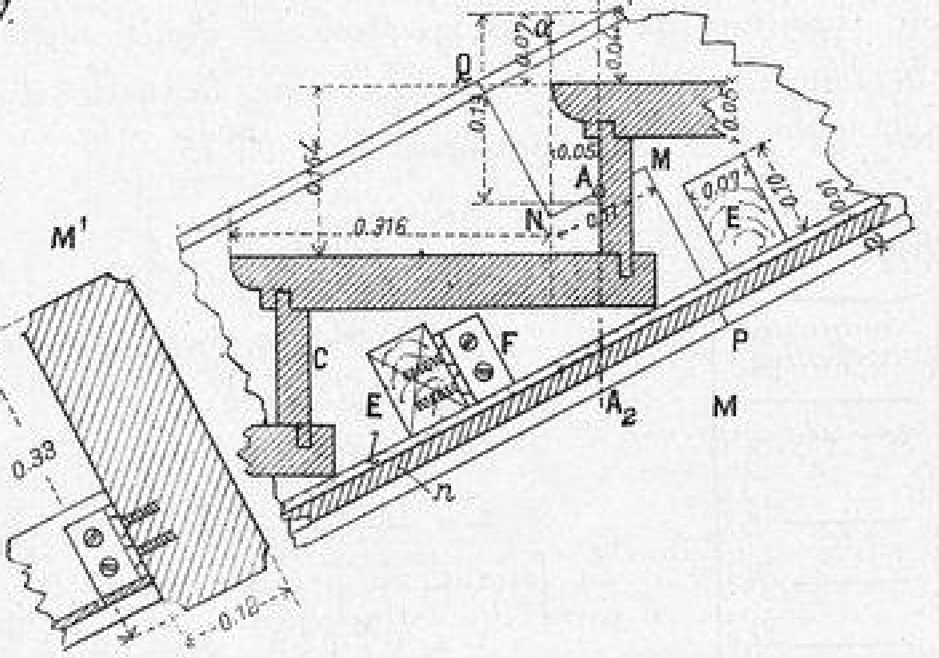
(a) Détail de la Coupe. - La figure 81 donne en M la coupe d'un escalier dont les marches s'appuieraient sur deux pièces de bois inclinées droites. - Le mur, les pièces de bois, ou les constructions en pierre qui supportent les marches se nomment Échiffre. - Lorsque l'échiffre est suspendu on lui donne plus ordinairement le nom

de limon.

Sur la figure M qui est à l'échelle de 1/10 le limon est formé par une forte planche de 0,12 d'épaisseur (voir la coupe M') et d'une hauteur de 0,33 en section droite; cette planche est inclinée à la pente donnée par des marches telles que nous les avons calculées au § 62 (g = 0,316, h = 164). Les marches s'y assemblent par une entaille de 0,04 de profondeur environ.

L'épaisseur des marches est de 0,05; elles sont reliées entre elles par des planches verticales C, dites *contre-marches*, qui s'assemblent dans les marches, à *rainure et languette*. La saillie de l'arête des marches en avant des contre-marches est de 0,05 environ, et la marche est profilée en quart de rond. Le limon est relié au mur par des entretoises E, E ....E' de 0,07 x 0,10 qui sont fixées par un bout au mur, à l'aide d'un scellement en fer et qui s'assemblent dans le limon à tenon et mortaise. Le tenon est consolidé par une équerre en fer F, boulonnée ou vissée.

Fig. 81.



Pour former le dessous ou *intrados* de l'escalier, un lattis l, est cloué sur les entretoises et un enduit en plâtre, de $0^M,02$ d'épaisseur environ est appliqué sur ce lattis.

En exécutant ainsi à grande échelle la coupe M, on reconnaît que pour pouvoir loger aisément tous ces détails de la construction dans le limon, il faut donner à ce dernier une hauteur $A_2 A A_1$ comptée suivant la verticale égale à $0^M,38$ (1), soit 0,19 au-dessus du point milieu A.

(b) *Enture du limon droit.* Ce limon ne peut pas être fait d'un seul morceau. On est obligé d'enter plusieurs pièces les unes au bout des autres.

On choisit en A (fig. M), à peu près au droit de la contremarche, le milieu de l'enture et celle-ci est formée par 3 plans perpendiculaires à la face verticale du limon, savoir: 1° le plan MN, parallèle à la pente de l'escalier et d'une longueur de 0,11 environ; 2° le plan MP, et 3° le plan NQ, perpendiculaires tous deux au plan MN.

De plus (voir P, fig. 82) il sera bon que la partie rentrante QNM soit munie d'un tenon, et que la partie saillante NMP soit creusée en mortaise, qui consolideront l'assemblage dans le sens latéral.

Nota. En prenant (fig. 81) le milieu de l'enture en A, au droit de la contre-marche, on voit que l'on évite ainsi de faire traverser l'assemblage par les entailles pratiquées dans le limon pour recevoir les extrémités des marches. Sur le croquis M, cela place le point A à 0,05

(1) Évidemment cette hauteur variera suivant les cas et chaque fois il sera nécessaire d'étudier cette coupe M.

environ en dedans de l'arête des marches.

Cette étude une fois faite pour un limon droit, nous allons en profiter pour faire l'étude d'un limon courbe.

§ 67. – Épure du limon d'un escalier en quartier tournant.

(a) *Préliminaires.* – Nous avons reproduit fig. 82 à une échelle cinq fois plus grande, c'est-à-dire à l'échelle de $0^M,10$ pour 1 mètre, l'escalier dont l'ensemble et le balancement ont été étudiés §§ 63 et 65, fig. 79.

Sur la ligne de foulée les marches VI-VII-VIII...... ont 0,316 de giron. Sur la ligne de jour, les collets ont été pris égaux aux longueurs fournies par le balancement arithmétique (voir le tableau § 65), ce qui a donné les points 11-10-9-8 etc...... En joignant les points correspondants 11 et XI, 10 et X, 9 et IX, etc...... on obtient les arêtes des marches et la développée OL, base du cylindre développoïde se met facilement en évidence. Nous donnons au limon une épaisseur de 0,12 (comme sur la fig. M') et nous obtenons de nouveaux points 11'-10'-9'-8' également situés sur les arêtes des marches. – Pour faciliter les explications, nous nommerons :

1° *Cylindre intérieur* (ou cylindre de jour), celui qui a pour base la courbe 11.10.9.8 ;

2° *Cylindre extérieur*, celui qui a pour base la courbe 11'-10'-9' ;

3° *Cylindre moyen*, celui qui aurait pour base la courbe b, c, d, e, f, g .... située à égale distance des précédentes ;

4° *Cylindre de foulée*, celui qui a pour base la courbe de foulée XI, X, IX ....

Les arêtes des marches coupent ces divers cylindres en des points que nous imaginerons reliés par une courbe gauche.

Sur le cylindre de foulée cette courbe sera très exactement une hélice, mais sur les trois autres, si on les développait, on aurait à cause du balancement, une ligne courbe et non pas une ligne droite.

Par généralisation nous nommerons encore ces courbes des hélices.

Nous aurons donc l'hélice de jour, ou hélice intérieure, l'hélice moyenne, – l'hélice extérieure, l'hélice de foulée. – La fig. 80 du balancement géométrique nous donnait en $\alpha\ \omega'\ \beta$ le développement de l'hélice de jour ; en M ω''Q, celui de l'hélice de foulée.

Le solide qui constitue le limon sera limité de la manière suivante :

1° Il sera compris entre le cylindre intérieur et le cylindre extérieur ;

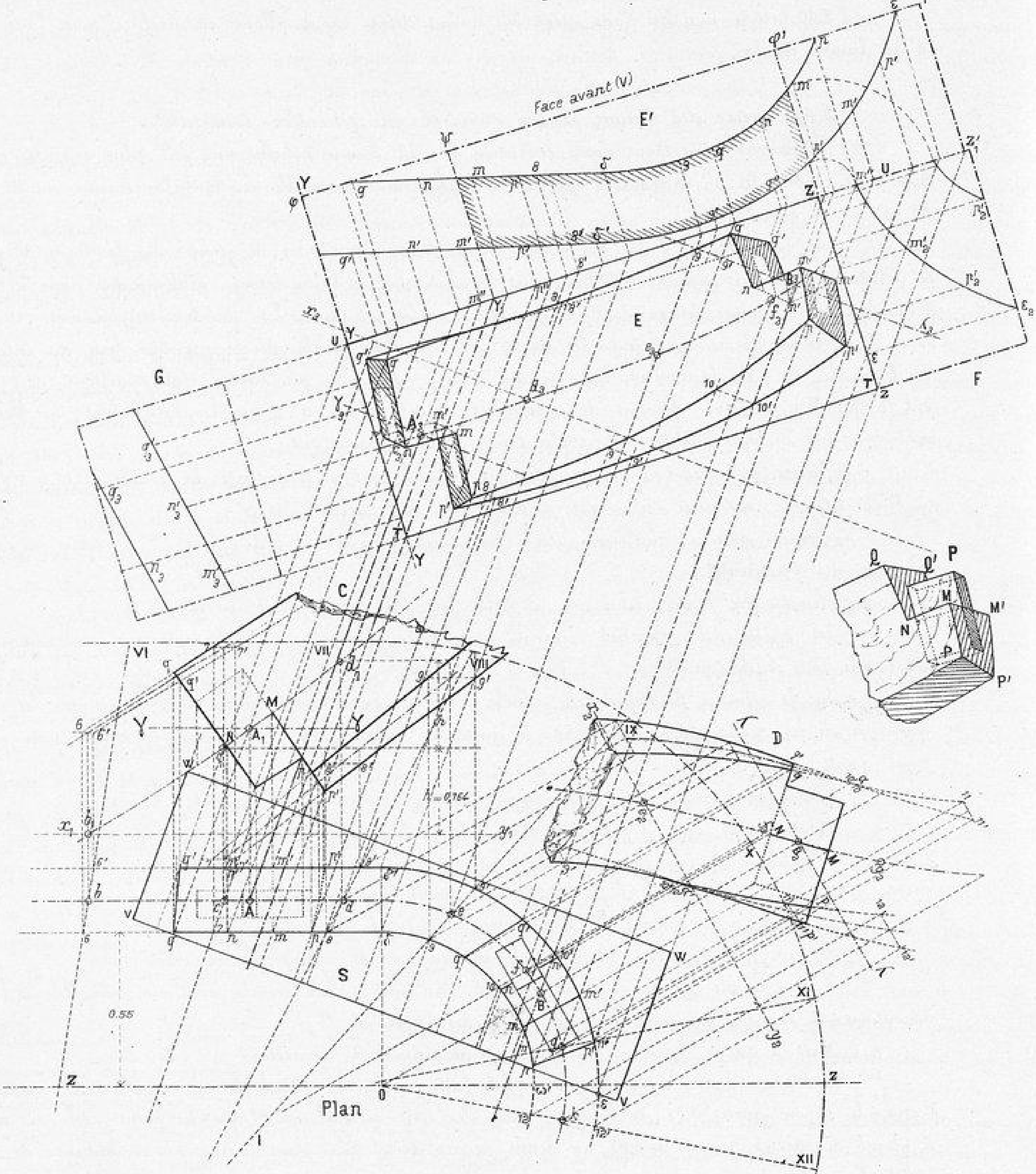
2° Il sera limité en dessus et en dessous par une surface gauche continue, parallèle à la surface discontinue à laquelle appartiennent les arêtes des marches.

Mais à quelle hauteur au-dessus et au-dessous de ces arêtes ?

C'est ce que la coupe fig. 81 nous fait connaître. – Dans le cas actuel nous voyons fig. 81 : 1° que le limon aura 0,38 de hauteur dans le sens vertical et 2° que ses points, tels que α situés à plomb des arêtes seront à 0,04 au-dessus de ces arêtes. Par conséquent en remontant de 0,04 toutes les arêtes des marches, on aura les génératrices du dessus du limon, et en les descendant de 0,38 - 0,04, soit de 0,34, on aura les génératrices du dessous.

Nous considérons de préférence le point A, situé d'une part à mi-hauteur du limon, et d'autre part sur le cylindre moyen b, c, d, e, f, ... Entraînons ce point dans le mouvement général

Fig. 82.



de l'escalier, il décrira dans le cylindre moyen une hélice égale à l'hélice moyenne et que nous nommerons *l'hélice centrale*. On voit (fig. 81) qu'il suffira pour l'obtenir de descendre l'hélice moyenne de 0,19 - 0,04, soit de 0,15 centimètres. En plan la ligne c.d,e,f,g.... représente la projection horizontale de l'hélice centrale.

(b) *Joints du limon*. — Cela posé: Le limon, du moins dans sa partie courbe, sera formé de pièces de bois d'une longueur peu considérable.

Nous allons nous donner, en plan, sur l'hélice centrale c,d,e,f..... la position, en A, et en B, du milieu de l'enture de chacune des extrémités du tronçon. Nous avons vu, fig. 81, qu'il convenait de prendre ce milieu à 0,05 en arrière de l'arête de la marche. C'est pourquoi A est pris à 0,05 en arrière de c et B à 0,05 en arrière de f.

(c) *About inférieur*. — Nous allons étudier (fig. 82) sur deux projections verticales auxiliaires fig. C et fig. D chacun des abouts du tronçon. — Sur un mur $x_1 y_1$ parallèle à la tangente à l'hélice moyenne en A, nous projetons le limon. A cet effet nous obtenons d'abord en $b_1 c_1 d_1$....... l'hélice centrale (chaque point est à une hauteur de marche, soit 0,164 au-dessus du précédent). Puis en remontant et en descendant ces points de 0,19 (demi-hauteur du limon) nous obtenons des points moyens de la surface de dessus et de dessous de ce limon. Par ces points moyens en menant des horizontales, nous avons les projections verticales des génératrices des surfaces gauches, génératrices que nous limitons en 7.7' - 8.8' - 9.9'. etc. aux lignes de rappel menées par les points correspondants 7.7' - 8.8'..... du limon, en plan.

Nous pouvons donc, en joignant ces points par des courbes continues, dessiner sur une certaine étendue (fig. C) les deux hélices intérieures de dessus et de dessous 7.8.9...., et les deux hélices extérieures de dessus et de dessous 7'.8'.9'.....

Enfin le point A, milieu de l'enture est rappelé en A_1 sur l'hélice centrale.

Cela fait, on trace fig. C en A_1 l'enture comme on l'avait fait fig. M sur l'escalier droit. Elle se compose: 1° d'un plan longitudinal MN, donné par la tangente à l'hélice centrale, et 2° de deux plans normaux Nq'q et Mp'p. — On y ajoutera si l'on veut un tenon et une mortaise. Mais pour le moment nous supposerons que ce tenon et cette mortaise n'existent pas.

De la projection C, par des lignes de rappel on revient au plan et l'on détermine fig. S, en m m' et n n' les deux droites intersections des plans qui forment l'enture, et en q q' et p p' les lignes courbes, intersections des surfaces gauches du dessus et du dessous du limon, avec les plans normaux NQ et MP.

(d) *About supérieur* (fig. D). — On prend, de même, en $x_2 y_2$ un nouveau mur parallèle à la tangente en B (milieu de l'enture) à l'hélice centrale. — On commence par déterminer en $e_2 f_2 g_2$ l'hélice centrale: on la remonte et on la descend de $0^m,19$; on trace ensuite les génératrices 9-9' - 10-10' - 11-11'...... du dessus et du dessous; on les limite aux lignes de rappel issues de la fig. S, et, comme tout à l'heure on obtient les hélices de dessus et de dessous, extérieures 9' - 10' - 11'..... et intérieures 9.10.11......

En B_2 on a sur l'hélice centrale le milieu de l'enture; on la dessine comme pour le joint A, en q'q NM p p', et par des lignes de rappel, on en déduit, en plan (fig. S) la projection horizontale de l'about supérieur.

§ 68. – Taille du Limon (fig. 82).

(a) Solide capable (en plan. fig. S). – Pour tailler le limon on commencera par déterminer un parallélipipède rectangle susceptible de le contenir, sans trop de jeu. C'est ce que l'on nomme le Solide capable. – En plan (fig. S) ce solide sera limité par deux plans verticaux V et W, parallèles entre eux et serrant d'assez près, la projection du limon. – Le plan V sera la face d'avant et le plan W la face d'arrière du solide. Ce prisme capable sera incliné; pour connaître l'inclinaison à lui donner, prenons en $x_3 y_3$ un nouveau mur parallèle aux faces V et W, et projetons y le limon tout entier fig. E. Nous suivrons exactement pour cela la même marche que ci-dessus; il est inutile de l'indiquer de nouveau.

Nous avons en $c_3 d_3 e_3 f_3$ ..... fig. E l'hélice centrale. Nous en déduisons en 8, 9, 10 ..... 8' 9' 10' 11' ...... les hélices de dessus et de dessous.

Quant à la projection des joints des entures, nous conseillons, après avoir déterminé soigneusement en A_3 et B_3 les milieux de ces entures, de mener sur les figures C, D et E, par ces points, des plans horizontaux y et h, y_3 et h_3 et de prendre les hauteurs, positives ou négatives, de tous les points m, m', n, n' etc ..... qui sont aux environs, par rapport à ces points, de même que l'on prendra les largeurs à gauche et à droite, par rapport aux lignes de rappel AA_3 et BB_3 (marquées en traits mixtes sur l'épure).

(b) Le solide capable, en élévation. – Dès lors, fig. E, on peut limiter le solide par 2 plans inclinés T, T et U U, et par deux autres plans Z Z et Y Y perpendiculaires aux précédents. Le plan T sera la face de dessous et le plan U la face de dessus du solide; le plan Z sera la face de droite et le plan Y la face de gauche.

(c) Cylindre capable. – Du prisme capable on déduit le cylindre capable, lequel s'obtient en délardant tout le bois compris en dehors du cylindre intérieur et du cylindre extérieur. Pour faire ce délardement, il est nécessaire de faire apparaître sur les 4 faces inclinées du prisme, les traces de ces deux cylindres.

(d) Rabattements des faces de dessus et de dessous. – A cet effet les génératrices des cylindres qui passent par les points importants de l'épure ont été prolongées jusqu'aux faces de dessus et de dessous; considérons d'abord la face de dessus. Ses intersections avec les génératrices sont m'' p'' ...... – On rabat en φ Y Z φ' cette face, et prenant toutes les profondeurs sur le plan, par rapport aux faces d'avant ou d'arrière, on reporte ces profondeurs de m'' en m', de p'' en p', etc .... et cela donne de q en δ, et de q' en δ' deux parties droites auxquelles succèdent des arcs d'ellipses.

La face de dessous, indéfiniment prolongée serait coupée par les deux cylindres, suivant des courbes identiques à celles qui viennent d'être obtenues. C'est pourquoi on suppose que par une translation verticale la face de dessous est appliquée en $Z_1 Y_1$ sur celle de dessus et de cette façon, la section en vraie grandeur s'obtient par une seule opération pour les deux faces. – Seulement ce qui répond à la face de dessus est compris entre φ et φ' et ce qui répond à la face de dessous est limité entre ψ et ψ'. – La partie bordée par des hachures est commune aux deux faces.

(e) Faces de gauche et de droite. – On cherchera de même fig. F et fig. G, les intersections par les faces latérales.

(f). Taille du cylindre capable. – Cela fait, on délardera la pièce à la hache d'abord, à l'herminette et ensuite à la bisaiguë jusqu'à ce que une règle bien droite puisse s'appliquer exactement sur les surfaces taillées et en étant guidée par les points marqués des mêmes lettres sur les différentes faces : à ce moment le cylindre sera taillé.

(g) Taille des surfaces gauches et des joints. – Cette taille se fait sur trait, ce qui veut dire qu'elle s'exécute à côté de l'épure et que l'on peut, au compas prendre sur cette épure, au fur et à mesure de l'avancement du travail, telle mesure que l'on voudra.

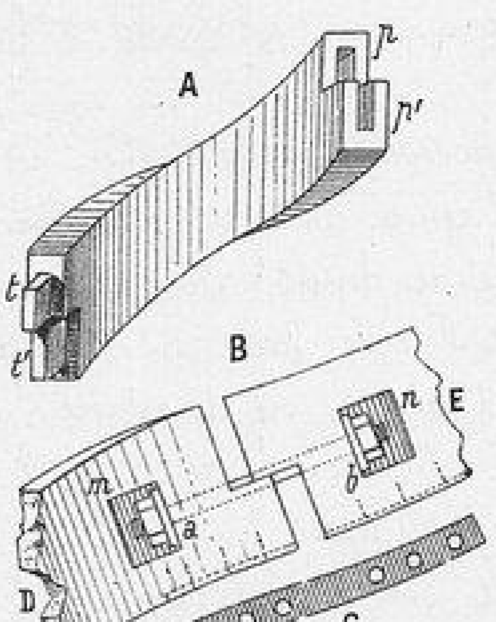
On pourra, une fois les cylindres intérieurs et extérieurs apparus, mesurer au compas sur la figure E, les quantités dont il faut raccourcir, par rapport aux faces du prisme, les génératrices de ces cylindres pour fixer exactement les positions des points m, m', n, n', p, p' des joints, et des points 9.9' – 10.10' – 11.11'...... des hélices de dessus et de dessous. On pourra même, pour ces hélices, prendre des points intercalaires entre les points numérotés. – Dès lors, on reliera par des lignes droites tous les points situés sur les mêmes génératrices de dessus ou de dessous, et la taille s'achèvera facilement.

Leçon supplémentaire.

§ 69. – Détails de construction. – Ferrures.

Le limon au lieu de posséder sur chacun de ses abouts à la fois un tenon et une mortaise, pourrait présenter deux tenons tt' à son joint inférieur (fig. 83, A) et deux mortaises pp' à son joint supérieur. Mais cette disposition nécessite un solide capable d'un volume plus grand que celui que nous avons étudié fig. 82.

Fig. 83.



On pourrait même (fig 83. B) supprimer complètement les tenons et les mortaises, faire l'assemblage à plat joint, mais alors il faudrait un boulon m n, pour serrer et maintenir l'enture.

Le boulon est à deux têtes mobiles. L'une d'elles n, reçoit une clavette, l'autre m, un écrou. La mise en place se fait comme il suit :

Un trou a b, fait à la dimension de la tige du boulon est fait à la tarière dans les deux pièces, dans le sens des fibres ; il passe par le milieu de l'enture.

Deux cavités m n, ont été creusées du côté où seront placées les marches, leur profondeur est à peu près la moitié ou les deux tiers de celle du limon ; elle doit être suffisante pour loger l'écrou et même pour lui permettre de tourner.

Le tronçon de limon D, étant supposé mis en place, le boulon a été introduit à l'avance dans le tronçon supérieur E et fixé avec la clavette. L'écrou est mis de champ dans la cavité m du tronçon D ; on présente alors le tronçon E, le boulon qu'il porte avec lui pénètre dans le conduit a préparé pour le recevoir et vient se placer devant l'écrou, lequel est alors tourné et serré à l'aide d'une clef à manche recourbé.

Mota. – Il est bon de placer des écrous même lorsque les entures sont armées de tenons

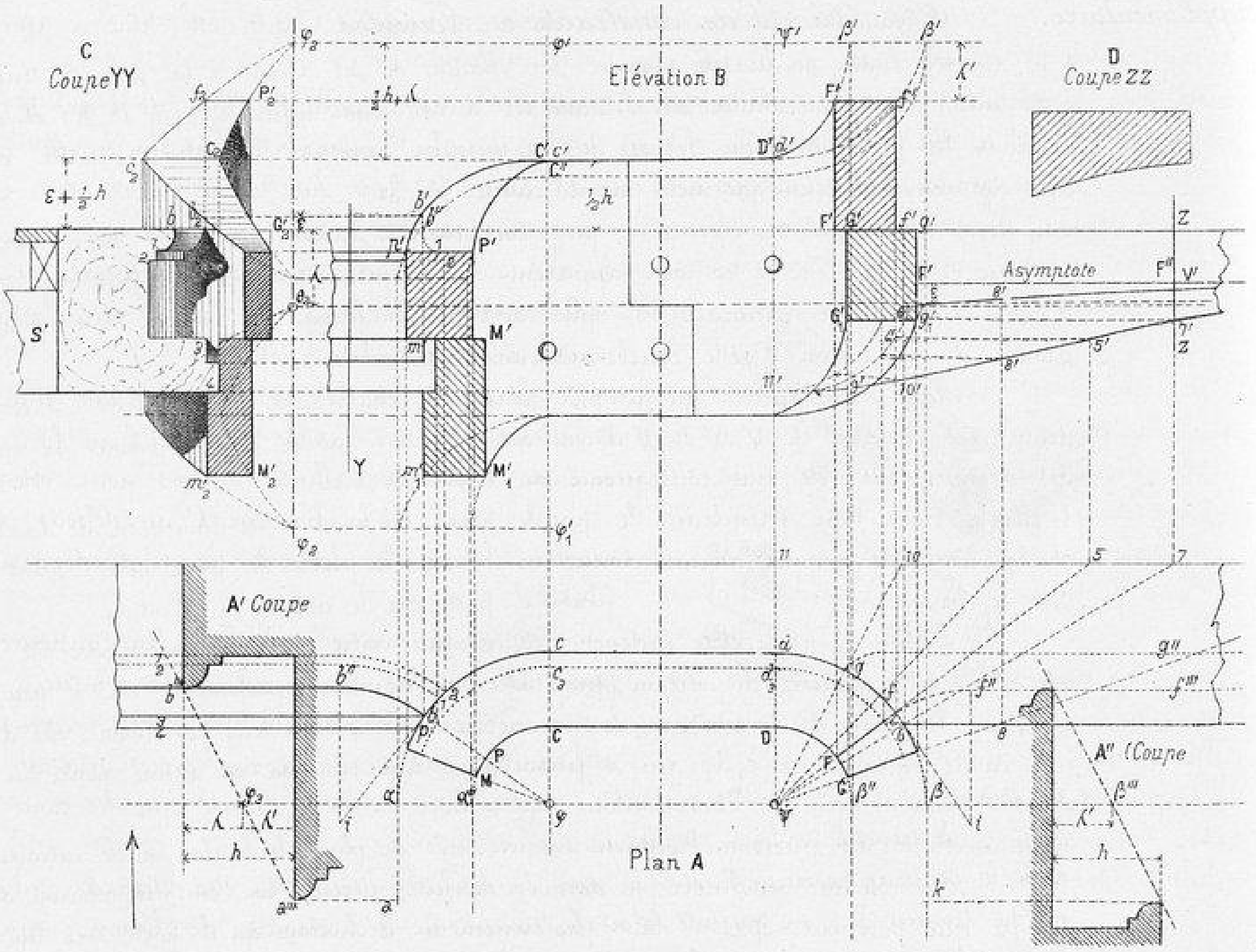
et de mortaises, comme sur les figures 82 ou 83 A. - On ajoute même une bande de fer C (fig. B), vissée et logée dans une rainure pratiquée exactement à sa demande dans la face de dessous du limon et souvent aussi dans celle du dessus.

§ 70. - Assemblage du limon avec le palier.

La fig. 84. A donne en plan, l'arrivée sur le palier de la rampe inférieure et le départ de la volée supérieure. On lira ces explications en suivant à la fois sur la figure 84 et sur les perspectives fig. 85 et 86. - Les lettres se correspondent sur ces trois figures.

Une poutrelle, indiquée en perspective sur la figure 85, traverse toute la cage et est scellée par chaque bout dans les deux murs. - Des solives S S, s'y assemblent à l'arrière, pour former le plancher du palier. D'un côté elle forme en b b''' la marche d'arrivée. - Son arête est légèrement cintrée de b en b''. - De l'autre côté, la marche de remontoir est également cintrée en f'''f''f. (fig. 84. A). Le limon avant de rencontrer le palier, s'arrondit suivant les deux quarts de cercle, dont les centres fig. A sont φ et ψ. - La partie horizon-

Fig. 84.



tale du limon a sa surface de dessus C"D" (fig. B en coupe C) située au-dessus du sol du palier à une hauteur $\ell + \frac{1}{2}h$; ℓ représente la hauteur de la surface supérieure du limon au-dessus des arêtes des marches, et h la hauteur des marches.

Dans ces conditions, à partir du point b situé à gauche et à plomb de l'arête de la marche d'arrivée, jusqu'au point c, du cercle de raccordement le limon devra monter d'une demi-hauteur de marche, et, du point de raccordement d situé à droite jusqu'au point f qui est à plomb de l'arête du remontoir, il s'élèvera encore d'une demi-hauteur de marche.

Les faces de dessus et de dessous du limon seront formées par un conoïde défini comme il suit: C'est le conoïde de droite que nous définissons ; celui de gauche est analogue.

1° Les génératrices seront horizontales ;

2° Il a pour axe (c'est-à-dire pour directrice rectiligne) la verticale V V' qui passe par le centre du cercle d f B.

3° Il a pour directrice une courbe gauche dont la projection horizontale est le quart de cercle d f B et dont la projection verticale passe par les trois points suivants, savoir :

d' projection du point d, situé à la hauteur $\ell + \frac{h}{2}$ au-dessus du sol du palier.

f' projection du point f, arête du remontoir, lequel est situé à une hauteur $\frac{1}{2}$ h, au-dessus du point précédent.

B' projection du point B, qui est dans le plan de front de l'axe V du conoïde et dont la hauteur λ au-dessus de la marche immédiatement inférieure c'est-à-dire du remontoir est donnée par la coupe A" faite sur les marches. Cette courbe d'f'B' est donc déterminée, en élévation, par trois points ; de plus en ℓ' elle est tangente à la verticale B'B qui est le contour apparent du cylindre auquel elle appartient ; au point d', afin d'avoir un raccordement plus agréable à l'œil, on la fait tangente à la partie droite c'd' du limon : Cette courbe est donc assez bien définie.

Nota. – On aurait pu adopter pour cette courbe, en élévation, une ellipse dont les demi-axes eussent été V'B' et V'd' ; mais dans ce cas le point f'f au lieu d'être une des données eût été une conséquence du choix de l'ellipse. – Alors pour obtenir f' une fois l'ellipse tracée, on prendrait le point situé à la hauteur λ au-dessous du point B' et la ligne de rappel aurait donné en f, sur le plan, le point de départ du remontoir sur le limon.

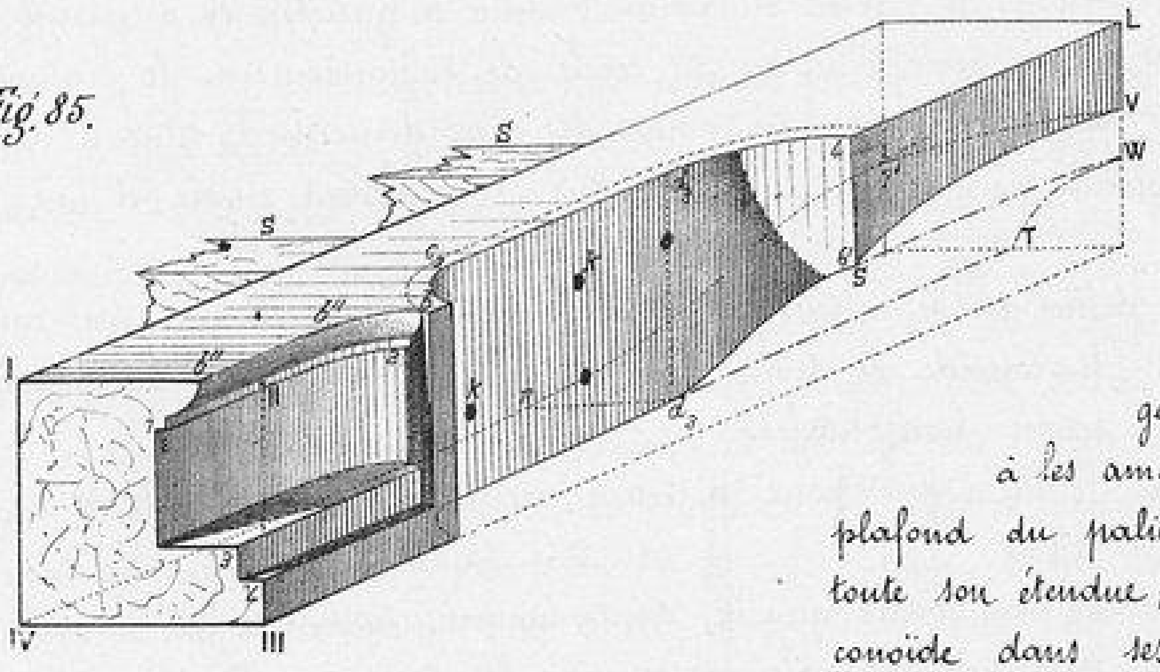
Le limon peut être indépendant de la poutrelle ou bien, au contraire, faire corps avec elle. Cette dernière disposition, préférable au point de vue de la solidité, a l'inconvénient d'exiger beaucoup de bois. Dans le premier cas la poutrelle fig. 85 est recreusée suivant une cavité cylindrique $c_3 d_3$ qui s'emboitera dans une gorge correspondante pratiquée dans le limon (fig. 86). Des boulons, dont nous n'avons figuré que les trous en K, K ...... maintiendront les pièces au contact.

Du côté du remontoir, le dessus de la poutre doit être délardé suivant une surface qui pourrait être le prolongement du conoïde de limon, lequel sera supposé remonté de toute la saillie du limon sur la poutre.

On voit facilement sur le plan A comment les génératrices Vd – Vg – Vf, etc ......

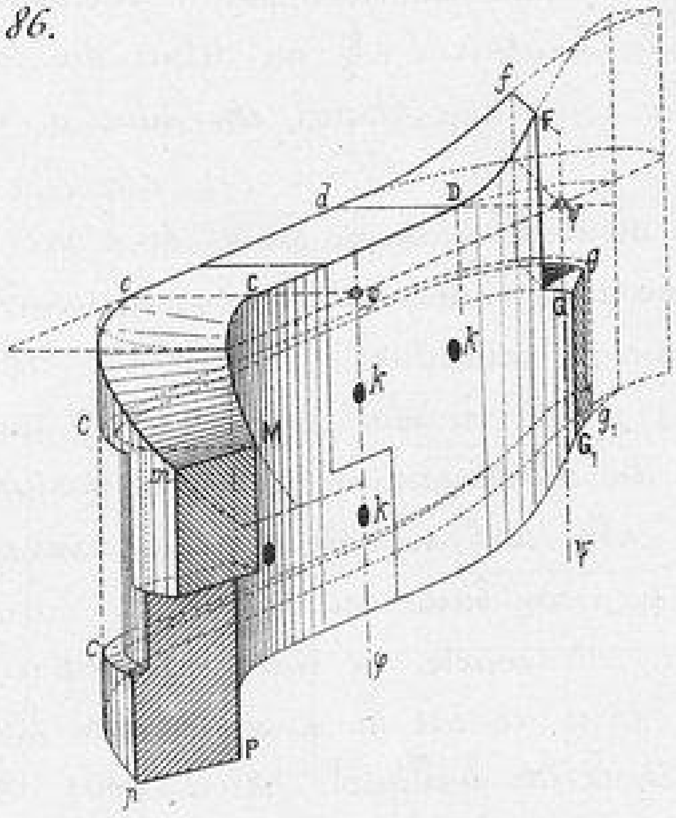
du conoïde ont été prolongées jusqu'aux faces d'avant ou d'arrière de la poutre et comment ont été obtenues les courbes d'intersection 6'V' et 10'7'..... de ces faces et du conoïde.

Fig. 85.



Ce conoïde ainsi prolongé a l'inconvénient de délarder beaucoup trop la poutre et de l'affaiblir. C'est pourquoi il est préférable au lieu de prolonger les généra-trices du conoïde de les recourber comme on le voit pour les génératrices f f'f'', et g g'', de manière à les amener de front. De cette façon le plafond du palier sera toujours horizontal dans toute son étendue; dans l'autre cas il eût été conoïde dans ses deux angles.

Fig. 86.



La figure 85 montre en S W T d, à quoi se réduit alors le délardement. Il n'est plus dangereux.

Nota. – En général ce délardement du dessous de la poutrelle se fait sur place, à l'herminette, une fois que l'escalier est posé. Il n'a pas besoin d'être très soigné puisque le plafond reçoit ordinai-rement un enduit en plâtre.

Joints du limon. – Les joints sont formés par des plans verticaux Mm - Pp (à gauche) et Ff, Gg (à droite) qui projettent verticalement des généra-trices du conoïde.

L'Épure fig. 84 et les perspectives cavalières des figures 85 et 86, suffisent pour faire comprendre les détails de la construction.

§71. – Escalier suspendu, dit escalier Anglais.

Dans ce système les marches sont massives. Elles pourraient être aussi bien en pierre qu'en bois. On voit fig. 87, la perspective cavalière de l'une d'elles.

La pression se transmet de l'une à l'autre par l'intermédiaire d'un plan, bc, ou b'c' qui forme une surface de lit, normale au rampant cc' de l'escalier. De plus, une partie horizontale ab, forme le recouvrement d'une marche sur l'autre. Il suffit que la première marche de départ, située au bas de l'escalier soit bien assise sur un solide massif de fondation pour qu'elle supporte la seconde marche, qui supportera la troisième et ainsi de suite.

Le profil de la marche règne en m p sur la partie antérieure et il se retourne en m n sur le côté. – La figure 88 montre en A l'élévation et en B le plan d'un pareil escalier. Pour le consolider on boulonne entre elles les marches de deux en deux ainsi que le montre

la coupe C, faite sur un boulon.

Les barres de fer ff ...... qui soutiennent la main courante ont leur portée g.g, vissée sur les parois des marches. Ces barres sont recourbées à angle droit. Elles se tiennent donc légèrement en dehors de la marche, ce qui permet d'utiliser très complètement cette dernière, ou tout au moins de réduire sa longueur d'emmarchement.

Fig. 88.

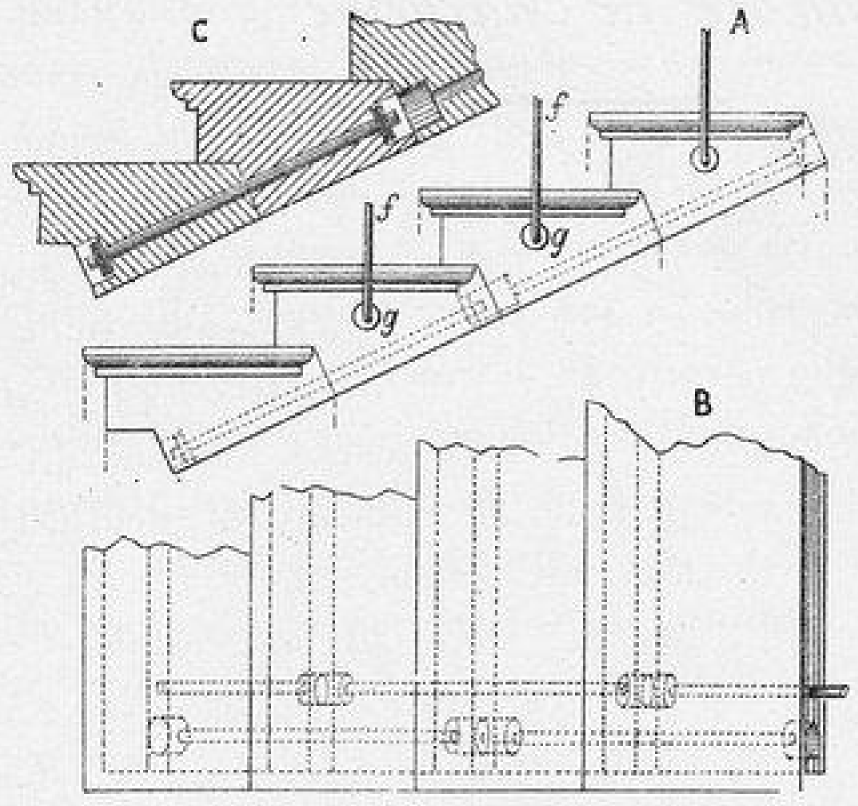
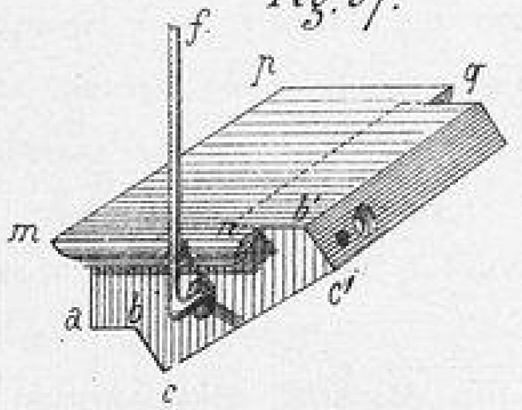


Fig. 87.

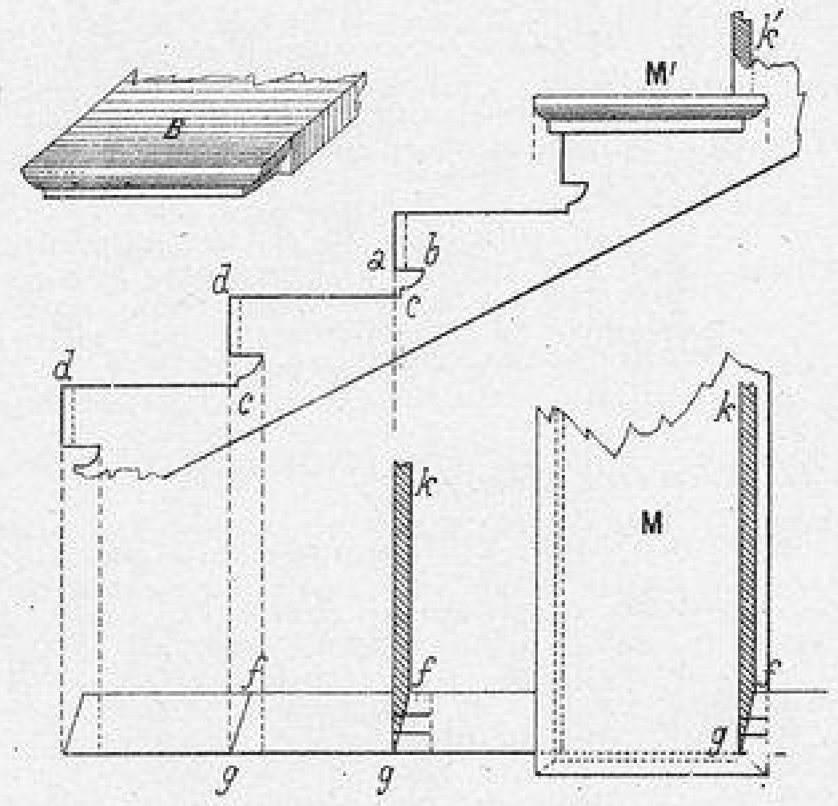


Les escaliers construits dans ce système ont un certain aspect de légèreté, et ils prennent moins de place que ceux construits avec limon plein.

§ 72. – Escalier avec limon en crémaillère, ou escalier demi-anglais

(fig. 89). – C'est en cherchant à conserver à l'escalier à limon l'aspect de l'escalier anglais qu'on a obtenu le système à limon taillé en crémaillère, presque exclusivement employé dans les maisons d'habitation bâties avec un certain soin.

Fig. 89.



Les marches présentent les dimensions indiquées à propos de l'ancien escalier, seulement elles sont moulurées sur l'arête antérieure et sur l'arête latérale qui sera du côté du vide (fig. 89. B).

Le limon est entaillé en a b c suivant les moulures des marches. Ces dernières reposent sur lui par l'intermédiaire des parties horizontales telles que cd, cd. Elles font saillie en dehors du limon (voir en M).

Enfin la contremarche k'k ..... est assemblée dans la marche, comme à l'ordinaire, c'est-à-dire à rainure et languette; elle est taillée en biseau fg du côté du limon, ainsi que ce dernier, et elle est clouée ou mieux encore, vissée sur lui.

De cette façon tous les joints sont aussi dissimulés que possible et l'aspect est celui d'un escalier suspendu, surtout lorsque le plafond de dessous de l'escalier est terminé et enduit soigneusement.

Nota. – Nous étudierons d'autres systèmes d'escaliers dans les dernières leçons de

coupe de pierres. L'analogie est complète entre les escaliers en pierre et ceux en bois.

Fin de la Charpente.

III. – Coupe des pierres.

§1. – Généralités.

11ᵉ Leçon.

(a) *Objet.* – La Coupe des Pierres est l'art de donner aux pierres qui entrent dans une construction les formes qui conviennent le mieux pour assurer la stabilité de l'édifice.

(b) *Le Projet.* – L'architecte ou l'ingénieur, chargé de la construction, arrête, dans un projet, la position, la forme et les dimensions des différentes parties de l'édifice. Il est guidé pour la création de ce projet par des considérations esthétiques et mécaniques dans le détail desquelles nous n'avons pas à entrer dans ces leçons.

(c) *L'épure d'ensemble.* – Ce projet met en présence des surfaces qui sont les limites des masses solides (murs, voûtes, plafonds, planchers, etc .....) qui constitueront la construction. Nous devrons donc prendre ces surfaces et, dans ce que nous nommerons l'Epure d'ensemble, étudier les intersections auxquelles elles donnent lieu par le fait de leur coexistence. – Ce sera là un problème de géométrie descriptive.

Cette épure se trace grandeur d'exécution, soit sur un parquet horizontal, soit sur un mur vertical sur lequel a été appliqué un enduit en plâtre, aussi plan que possible. – A Paris et dans les grandes villes, où l'on dispose difficilement de grands espaces horizontaux, les épures se font presque toujours sur des murs verticaux.

(d) *Tracé de l'appareil.* – Ces masses solides sont, en général, trop volumineuses pour être monolithes, c'est-à-dire prises dans une seule pierre. Il faut les décomposer, en pierres plus petites, susceptibles d'être maniées et dont les formes sont calculées de telle sorte: 1° qu'en les juxtaposant convenablement elles réalisent les masses solides du projet dans leur ensemble, 2° qu'elles se maintiennent en équilibre les unes à côté des autres, 3° qu'elles ne soient pas fragiles. – Il faut donc, pour ainsi dire, briser les masses d'ensemble en fragments déterminés, que l'on pourra tailler séparément et venir ensuite mettre en place.

Cette décomposition en pierres de dimensions raisonnables constitue ce que l'on nomme l'appareil. – Il est bon de remarquer, dès à présent, que les pierres suivant lesquelles on décomposera les constructions seront enveloppées par des portions plus ou moins considérables des grandes surfaces en présence. Ces portions de surfaces se nomment douelles, panneaux. Ces douelles, ou ces panneaux, seront limités, eux-mêmes, par des lignes que l'on pourra considérer comme des génératrices des surfaces. Ces génératrices se rencontreront en des points qui appartiendront aux courbes d'intersection des surfaces de telle sorte que l'épure d'ensemble et l'appareil s'exécuteront simultanément dans une seule et même opération.

(e) *Préparation du trait.* – Une fois le tracé de l'appareil terminé on prendra séparément chaque pierre et par des projections, par des rabattements, par des coupes, par des développements ...... etc. on préparera tous les éléments nécessaires à la taille de ces pierres sur le chantier.

Cette 3ᵉ partie constitue ce que l'on nomme la préparation du trait. Elle doit être faite par quelqu'un très au courant des opérations de la taille.

(f) *Application du trait sur la pierre.* – Enfin la 4e partie, c'est-à-dire la taille de la pierre, s'exécute sur le chantier, par des ouvriers exercés, en utilisant les éléments empruntés à l'épure. Dans chaque cas nous indiquerons comment se fait cette application du trait, et comment, d'une pierre brute sortie de la carrière, on peut tirer le solide représenté sur l'épure.

§ 2. – Définitions – fig. 1.

On appelle *pierres de taille* a, a, des pierres taillées suivant certaines faces d'après des épures exactes. – La grandeur de la pierre n'a aucune influence sur cette dénomination.

On appelle *moëllons* b, b, les pierres qui ne sont pas taillées d'après des épures.

Dans les constructions, les pierres sont, en général, rangées en zones séparées par des surfaces perpendiculaires à la pression que supportent les pierres. Quand la seule force est la pesanteur, comme dans la plupart des murs, les surfaces sont horizontales. – Ces zones s'appellent *assises*. – Les surfaces qui séparent les assises s'appellent *lits*. – Les surfaces qui séparent deux pierres d'une même assise et qui, dans le cas d'un mur, sont verticales, s'appellent *joints*. – Le plan vertical c, d, est une surface de joint dans la 3e assise. – Les lits sont donc les surfaces à l'aide desquelles la pression se transmet d'une assise à l'autre. Il est important que les lits soient très exactement taillés, tandis que pour les joints, cette considération est beaucoup moins importante.

Pour chaque pierre, on distingue le lit de pose et le lit de dessus. – Le plan horizontal f d, est le lit de pose, pour la pierre N° 3, il est le lit de dessus pour la pierre N° 2. Le premier doit être taillé beaucoup plus exactement que le second : En effet, quand on pose la pierre sur la couche de mortier étendue sur celle qui précède, on peut répartir le mortier de manière à combler les creux ou *flaches* qui subsistent sur le lit de dessus de la pierre inférieure ; mais on ne peut opérer de même pour le lit de pose de la pierre supérieure.

Lorsqu'on a ainsi superposé deux pierres, on les bat fortement avec des masses de bois, afin d'exprimer le mortier en excès. Ainsi comprimé, le mortier se répand dans les flaches, lie les pierres et répartit uniformément la pression.

Les joints de deux assises superposées ne doivent pas être en prolongement les uns des autres ; ils doivent se découper.

On appelle *découpe*, la distance c d entre un joint et le joint voisin de l'assise supérieure ou inférieure.

Dans une construction, on alterne ordinairement des pierres courtes et des pierres profondes. On appelle *carreaux* C, celles qui ont de plus grandes dimensions sur le parement du mur, et *boutisses* B, celles qui ont de plus grandes dimensions suivant la profondeur du mur ; c'est ce qu'on exprime en disant que les boutisses ont plus de queue et moins de tête.

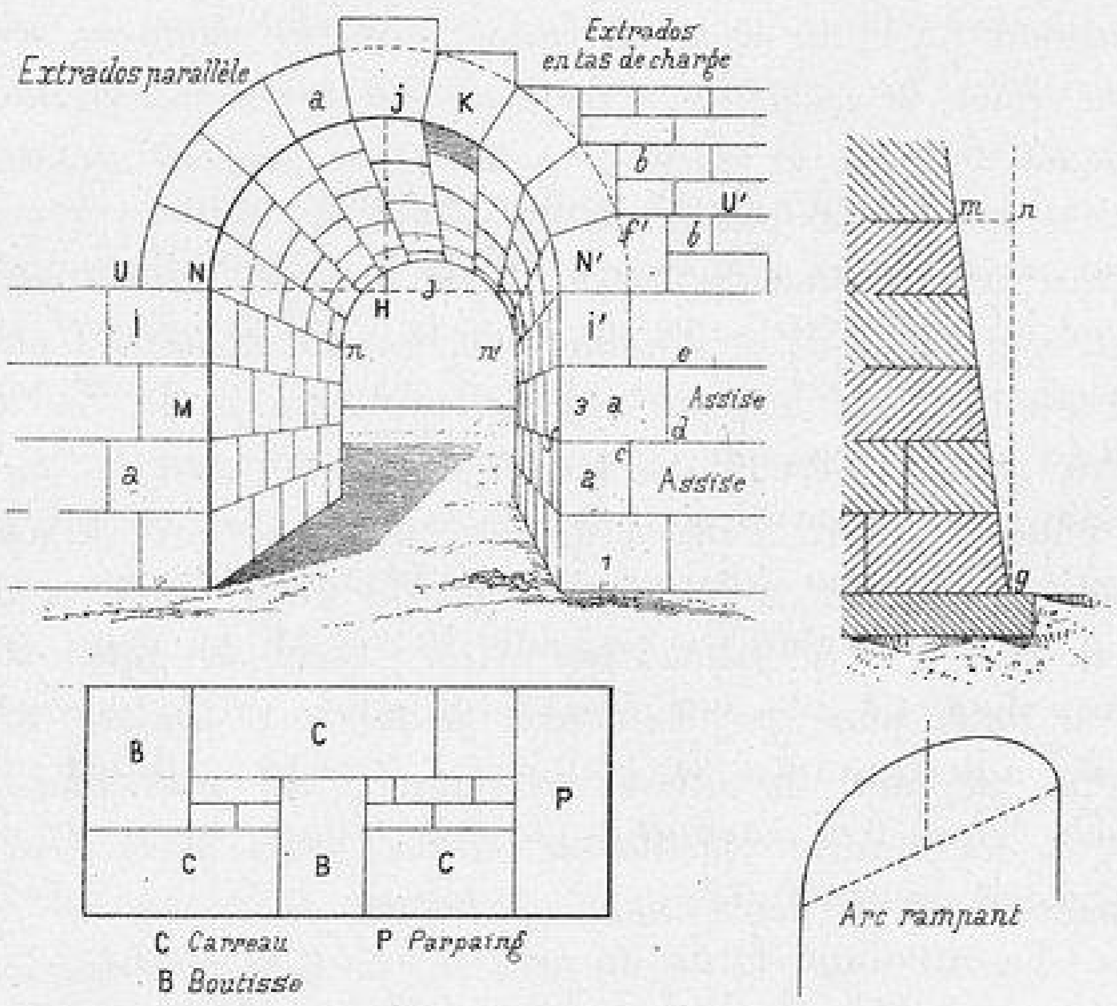
On nomme *parpaing* P, une pierre qui fait parement sur les deux faces du mur : les parpaings doivent être traités avec le plus grand soin.

Quand un mur n'a pas ses parements verticaux, on dit qu'il a du *fruit* ou du *talus*. La différence de ces deux expressions est dans la mesure. Le fruit a pour mesure la tangente de l'angle avec la verticale, et le talus la tangente de l'angle avec l'horizon. – Le fruit f, est donc

donné par le rapport $\frac{mn}{ng}$, tandis que le talus serait donné par le rapport inverse $\frac{ng}{mn}$.

On nomme *voûtes* des constructions où les matériaux se soutiennent par leur arc-boutement.

Fig. 1.



On nomme, dans une voute:

Pieds droits, les murs M, qui s'élèvent jusqu'à l'origine de la voûte.

Naissance, N est la surface de séparation des pieds droits et de la voûte.

Imposte I, la dernière assise des pieds droits; elle est en général marquée par une moulure; c'est proprement à cette corniche qu'on donne le nom d'imposte.

Intrados, la surface NJN', njn' de la voûte qui est vue.

Extrados, celle qui est cachée Uf'. Dans les voûtes, l'intrados est taillé avec soin, et l'extrados n'est que dégrossi; on le recouvre d'une couche de mortier ou de gravois.

Reins, les parties latérales de la voûte.

Voussoirs, chaque pierre de la voûte.

Douelle, la face courbe de chaque voussoir qui se trouve sur l'intrados ou sur l'extrados; en réalité les douelles sont des portions des surfaces d'intrados ou d'extrados qui appartiennent au voussoir. La douelle d'intrados est la plus importante des deux. Quand nous parlerons de la douelle d'un voussoir, il sera sous-entendu qu'il s'agit de la douelle d'intrados.

Clef, le voussoir supérieur; il y a presque toujours un nombre impair de voussoirs; la construction d'une voûte se termine par la pose de la clef que l'on presse fortement.

Contre-clefs, les voussoirs voisins de la clef; on leur donne ce nom surtout lorsqu'ils sont décorés d'une moulure.

Si l'intrados est cylindrique, la voûte est dite *en berceau*.

Dans une voûte en berceau, on nomme:

Ouverture, l'écartement NN' des pieds droits à la naissance;

Montée, la distance JH de la génératrice supérieure au plan des naissances.

Les voûtes en berceau se distinguent en 3 classes:

On les dit *en plein cintre* quand la montée est la moitié de l'ouverture; *surhaussées* ou *surbaissées* selon que la montée est supérieure ou inférieure à la moitié de l'ouverture.

Les voûtes surhaussées sont rares; l'ogive en est un exemple; elle est formée de deux arcs symétriques tangents aux pieds droits; on la dit équilatérale quand les deux arcs sont des arcs de cercle ayant leurs centres aux naissances.

Les voûtes surbaissées sont plus communes. On emploie pour directrices l'arc de cercle, la

demi-ellipse ou l'anse de panier. La demi-ellipse offre l'inconvénient de s'abaisser trop rapidement près des naissances. Dans les ponts sur rivière, les eaux ne trouvent pas un débouché suffisant s'il y a des crues. On préfère alors l'anse de panier qui s'élève plus sur les reins. Ces courbes se tracent avec des arcs de cercle.

On nomme *arcs rampants* fig. 1, des voûtes en berceau dont les naissances sont à des hauteurs différentes; on les rencontre dans les contreforts d'église et dans les rampes d'escalier.

Les voûtes, ne se soutenant que par les réactions mutuelles des voussoirs, tendent à renverser leurs pieds droits. Cet effort se nomme la poussée de la voûte.

On conçoit que si deux voûtes identiques reposent sur le même pied droit, elles produisent des poussées égales et contraires qui se détruisent, et le pied droit n'a plus besoin que de résister à la force verticale produite par le poids des pierres. Dans ce cas, on appelle les pieds droits des *piles*; lorsqu'ils ont à résister à une poussée horizontale, on dit qu'ils forment une *culée*. Dans un pont à plusieurs arches, c'est la dernière pile qui porte le nom de *culée*. Dans une pareille série de voûtes, les poussées se détruisent sur les pieds droits, si ceux-ci ne sont que des piles. On conçoit que si l'on détruit une arche, toutes les autres doivent tomber successivement les pieds droits n'étant plus assez forts pour résister aux poussées. C'est pourquoi on prend souvent la précaution de faire, de distance en distance, des piles plus épaisses, que l'on nomme des *piles-culées*, et qui seraient capables de résister seules, à la poussée d'une voûte, non contre-balancée par celle de la voûte située de l'autre côté.

§3. – Tracé des épures et procédés de taille.

Nous avons dit que les épures se tracent sur parquet horizontal ou sur aire verticale en plâtre. Un parquet se compose de planches reliées et dressées avec soin; dans la construction de ces parquets on évite le sapin dont les filets se déchirent trop lorsque l'on trace des lignes à la pointe d'acier; on préfère de minces planches de chêne. Sur ces parquets, les épures se tracent en grandeur d'exécution, absolument de même que les épures réduites se tracent sur le papier. – Néanmoins, il faut remarquer dès maintenant, que certaines constructions qui sont très faciles à exécuter sur une planche à dessin, comme le tracé de lignes parallèles de grandes longueurs, ou celui de circonférences de grand rayon, sont au contraire, longues et difficiles à réaliser exactement sur une épure en grandeur d'exécution. – Ces difficultés d'exécution sont, dans bien des cas, la cause du choix de telle méthode, plutôt que de telle autre. Nous indiquerons chaque fois, l'influence des procédés d'exécution sur le choix des méthodes adoptées par les appareilleurs.

On emploie pour tracer les lignes droites des règles lorsque la ligne est courte, et le cordeau lorsqu'elle est trop longue pour pouvoir être tracée de cette première manière. Pour les cercles, on se sert du compas ordinaire, ou du compas à verge, si les dimensions sont plus grandes. On est quelquefois obligé de tracer les cercles très grands par points, et l'on a pour cela plusieurs méthodes sur lesquelles nous reviendrons au paragraphe suivant.

Dans ces épures, les constructions se font à la craie, à la sanguine ou au charbon, et les lignes qui doivent subsister et être utiles dans la taille des pierres se tracent à la pointe d'acier qu'on appelle traceret. L'épure terminée, on balaie le parquet, et il ne

reste plus que les lignes tracées au traceret ; l'épure ainsi simplifiée doit rester jusqu'à l'achèvement total de la construction. Ensuite, on rabote légèrement le parquet pour pouvoir y construire une nouvelle épure. – Quand on opère sur un mur, on efface une épure en l'enduisant d'une nouvelle couche de plâtre.

L'épure terminée, on procède à la construction des panneaux.

Par exemple, sur le voussoir représenté en perspective fig. 2, le polygone ABCDE sera le panneau de tête ; on aura en CDC'D' le panneau de lit de pose ou lit de dessous ; en ABA'B' (caché) le panneau de lit de dessus. – En AEA'E' le panneau de dessus, peu important ; en EDE'D' le panneau de côté. – En BCB'C' la douelle, qui pourra se développer et être tracée sur un carton flexible. Si l'on avait joint BC et B'C' par des lignes droites, au lieu d'un cylindre la douelle eût formé la face d'un prisme : dans ce cas elle porte le nom de *douelle plate*.

Le menuisier est chargé des panneaux. Il les construit avec des règles minces assemblées à mi-bois et retenues par des pointes. Les panneaux étant achevés, on les cloue sur l'épure même comme l'indique la figure 2. L'appareilleur qui est chargé de l'épure a représenté les lits par une ligne aussi fine que possible, mais il a eu soin de prévenir le menuisier de l'épaisseur qu'on voulait donner au mortier interposé entre les lits ; cette épaisseur n'est jamais inférieure à 3 ou 4 millimètres ; le menuisier ménage donc cette épaisseur. – Les panneaux étant cloués sur l'épure, l'appareilleur les vérifie et examine surtout si l'on a laissé les dimensions nécessaires aux lits. Pour cela, il est muni souvent d'une tige qui a même épaisseur que les lits, et qui doit pouvoir circuler entre les panneaux et ne pas avoir de jeu une fois le travail du menuisier terminé. On marque les panneaux avec des lignes convenues et on les enlève pour les porter au chantier. On met en général une couche de peinture à l'huile sur la partie du panneau qui correspond au parement vu, afin que l'ouvrier la soigne d'une manière particulière.

Quand une construction dure longtemps, il importe de faire rentrer de temps en temps les panneaux à la salle d'épures, afin de les vérifier de nouveau.

A Paris, où l'espace horizontal est trop précieux pour en employer un très grand à des salles d'épures, on profite du bas prix du plâtre et de son excellente qualité pour construire des aires verticales sur un pan de mur quelconque soigneusement dressé. – Dans les épures ainsi construites, le niveau et le fil à plomb jouent un très grand rôle.

Outre les panneaux, on construit encore des *contre-panneaux* P_1, fig. 2, surtout dans le cas où la pierre est décorée de moulures. Ces contre-panneaux sont des planchettes en bois ou en métal ; ils s'appliquent perpendiculairement à la pierre, et portent en creux l'empreinte des saillies P, qu'on doit laisser subsister dans la pierre.

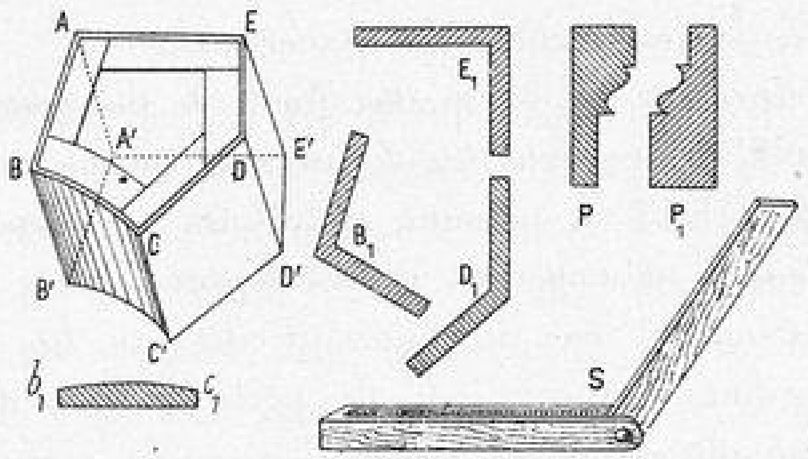
On appelait autrefois *cherche* et aujourd'hui cerce le contre-panneau d'une courbe ; b_1c_1 est la cerce de la courbe d'intrados BC.

On nomme *biveau* l'ensemble de deux règles suivant un angle déterminé. Cet instrument sert pour passer d'un plan à un autre. – E_1 est un biveau droit ou équerre. – D_1 est le biveau qui mesure l'angle rectiligne du dièdre formé par les deux plans ED et DC du voussoir.

Le biveau est dit *biveau cerce* si l'une de ses branches est courbe et sert à passer

d'un plan à une surface courbe, ou inversement. – B_1 est le biveau cerce répondant au plan de lit de dessus et à l'intrados.

Fig. 2.



La fausse équerre qui, en charpente, prend le nom de *sauterelle* S, se compose d'une branche de biveau assemblée à enfourchement, entre deux règles qui forment une seconde branche ; elle sert à tracer un angle d'une pièce sur l'autre. Elle pourrait donc remplacer un biveau, mais comme elle est variable et sujette à se déranger, il vaut mieux construire chaque fois les biveaux voulus, soit en bois, soit en zinc.

On nomme *jauge* une tige de bois droite, entaillée exactement à la mesure que doit donner l'ouvrier à une longueur. On l'emploie au lieu d'indiquer à l'ouvrier la dimension en mètres et fraction de mètre, afin d'éviter les erreurs souvent notables qui résulteraient des différences qui existent entre les divers mètres.

L'épure étant construite ainsi que les panneaux de lit, les panneaux de tête, les douelles etc...... on arrive à tailler la pierre.

On peut employer deux méthodes, la méthode par *équarrissage*, et la *taille directe*.

Dans la première, dite encore méthode par dérobement, on prépare un solide géométrique (ordinairement parallélipipède rectangle) capable de la pierre, et l'on opère par troncatures en retranchant successivement les portions de la pierre qui ne doivent pas rester.

Dans la taille directe, on prend le bloc de pierre tel qu'il sort de la carrière, et l'on y taille une des surfaces de la pierre à établir. Puis de cette surface, on passe à une voisine, au moyen de biveaux et de panneaux. Les panneaux nécessaires sont différents selon la méthode qu'on emploie. – Quand on taille une pierre par la méthode directe, on substitue en général, lorsque cela est possible, comme sur le voussoir de la figure 2, à la douelle courbe qu'elle renferme, un plan qui passe par les extrémités de la douelle, et l'on taille d'abord la pierre suivant ce plan que nous avons appelé *douelle plate*, ce n'est qu'ensuite qu'on creuse la douelle courbe.

La méthode par équarrissement est plus exacte et ne présente pas plus de travail quand la pierre est déjà grossièrement équarrie et qu'il y a peu de chose à faire pour l'équarrir parfaitement. A Paris, toutes les pierres arrivent presque équarries, parce qu'on évite ainsi le transport d'un poids considérable qui augmenterait le prix du transport sans augmenter celui de la pierre.

Mais il arrive souvent qu'on ouvre, ou du moins qu'on exploite une carrière uniquement pour un ouvrage ; alors l'équarrissement augmente beaucoup le travail et l'on peut être amené à y renoncer par économie. C'est l'affaire des maîtres appareilleurs de juger d'un coup d'œil si un bloc pourra contenir tel ou tel voussoir, et, grâce à l'habitude, ils se trompent rarement ; la taille est un peu moins rigoureuse, mais avec des soins, on arrive à d'excellents résultats.

Lorsqu'une pierre de taille est placée dans une construction, il importe de tenir compte de la constitution de cette pierre. Un grand nombre de matériaux présentent une stratification,

en sorte que la matière est composée de feuilles superposées, et la résistance est beaucoup plus grande perpendiculairement à ces feuilles que parallèlement. Ce fait est beaucoup plus grave qu'on ne le penserait au premier abord ; il faut avoir rigoureusement égard à cette considération et placer la pierre de telle sorte que la pression qu'elle supporte soit perpendiculaire à la feuille. La direction de ces feuilles constitue ce que l'on nomme le lit de carrière ; avec un peu d'habitude il est bien visible sur les pierres. Dans les voûtes, il est impossible de satisfaire rigoureusement à cette condition, puisque les pressions que supporte un voussoir sur ses deux lits ne sont pas parallèles ; mais il importe de s'écarter le moins possible de la perpendicularité de la pression sur la feuille. Les pierres qui ne sont pas placées conformément à cette indication sont dites en *délit*.

§ 4. – Tracé des cercles de grand rayon.

Quand un cercle a plus de 5 mètres de rayon, il est impossible de le tracer avec le compas à verge ; il faut le construire par points ; on détermine quelquefois les points par des ordonnées que l'on calcule, mais les appareilleurs emploient de préférence d'autres méthodes, telles que la suivante :

Soient trois points A B C par lesquels il faut faire passer un cercle, fig. 3.

1° Je joins AB, BC, et je prends à partir de A et de C, des longueurs AD, CE égales ;

2° Aux points D et E j'élève sur AB et sur BC des lignes perpendiculaires sur lesquelles je porte en dessus et en dessous des longueurs égales Da, b, c, ... au-dessous de AB et Ea', b', c', ... au-dessus de BC ;

Fig. 3.

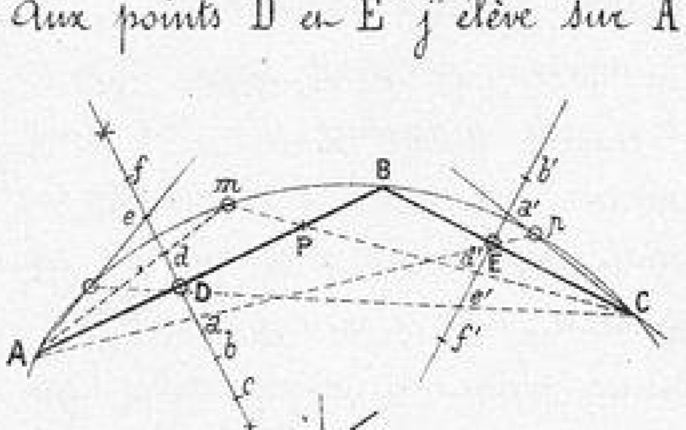
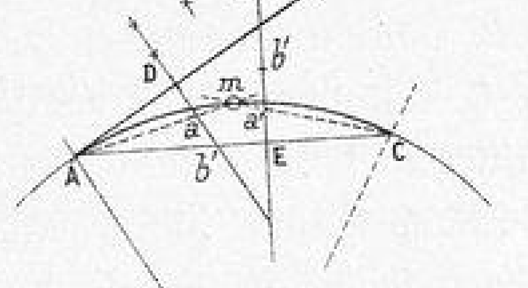


Fig. 3bis



3° Je mène les droites telles que Ad et Cd' ; le point de rencontre m de ces deux droites est un point du cercle.

En effet, ces deux triangles AmP et CBP sont semblables, car les angles dAD et d'CE sont égaux et les angles en P sont aussi égaux comme opposés par le sommet, donc les angles en m et B sont égaux et les points m et B sont sur le segment capable de cet angle décrit sur AC, c'est-à-dire sur un cercle.

La construction s'applique aussi lorsque, fig. 3bis, le cercle est défini par une tangente AD, le point de contact A, et un autre point C. La seule différence, c'est qu'une des cordes sera remplacée par la tangente. – On prend sur la tangente une longueur AD égale à la longueur CE prise sur la corde. On élève la perpendiculaire Da, Ea'. – On prend sur elles des points a, b, ... a', b', ... équidistants ; on joint Aa, Ca' et la rencontre donne en m un point du cercle. – Toutes ces opérations se font avec le cordeau et avec le compas d'appareil.

Les Murs.

Les murs.

§ 5.- Mur droit en talus, fig. 4.

(a) Épure d'ensemble.- On voit en A la coupe faite sur le mur par un plan vertical qui lui serait perpendiculaire.- a'b' est une ligne de plus grande pente du plan de parement extérieur du mur.- On dit que le mur est droit, parceque les horizontales de ses plans de parement intérieur et extérieur sont parallèles.

La construction est faite pour assises horizontales (N°1 - N°2 - N°3 ......). D'une assise sur l'autre les joints sont découpés. Ainsi sur l'élévation B, le joint c"d" n'est pas dans le prolongement du joint m"n".

(b) Détail d'une pierre.- Étudions la pierre a"c"d"g" de la 4e assise; en plan C sa projection horizontale est h k g d ..... En coupe A elle est toute entière projetée suivant le trapèze a'k'i'd'; ce trapèze constituera un panneau de joint.

(c) Taille d'un parallélipipède rectangle.- Avant de parler de l'application du trait sur la pierre, disons d'abord comment on taille un parallélipipède rectangle, fig. 4. D et E.

Il faut commencer par dresser une surface bien plane. Pour cela (fig. D), on pratique au ciseau, sur une face de la pierre brute, une ciselure très peu profonde α β, voisine de l'arête et sur laquelle une règle α β puisse s'appliquer bien exactement.

Sur la face opposée, que nous supposons avoir été dégrossie à la carrière, l'ouvrier place une seconde règle α'β', de telle sorte que son arête supérieure u'v' soit dans un même plan avec l'arête inférieure α β de la première. Pour s'assurer que cette condition est réalisée, il lui suffit de se reculer un peu et de déplacer cette seconde règle jusqu'à ce que ses rayons visuels rasant la ligne u'v' la mette en coïncidence apparente avec l'arête α β.- Il fait un trait sur la pierre en suivant l'arête u'v' et il pratique une ciselure plane le long de cette ligne comme il avait fait sur la première face.

Après quoi sur les deux autres arêtes il pratique des ciselures droites β v' et α u' (fig. E) qui relient les extrémités de celles qu'il vient de terminer.

A ce moment le plan est défini par quatre directrices rectilignes α u' v' β. Il ne reste plus qu'à enlever la pierre comprise entre les ciselures et à s'assurer, en y appuyant une règle dans toutes les positions, que la surface dressée est bien plane.

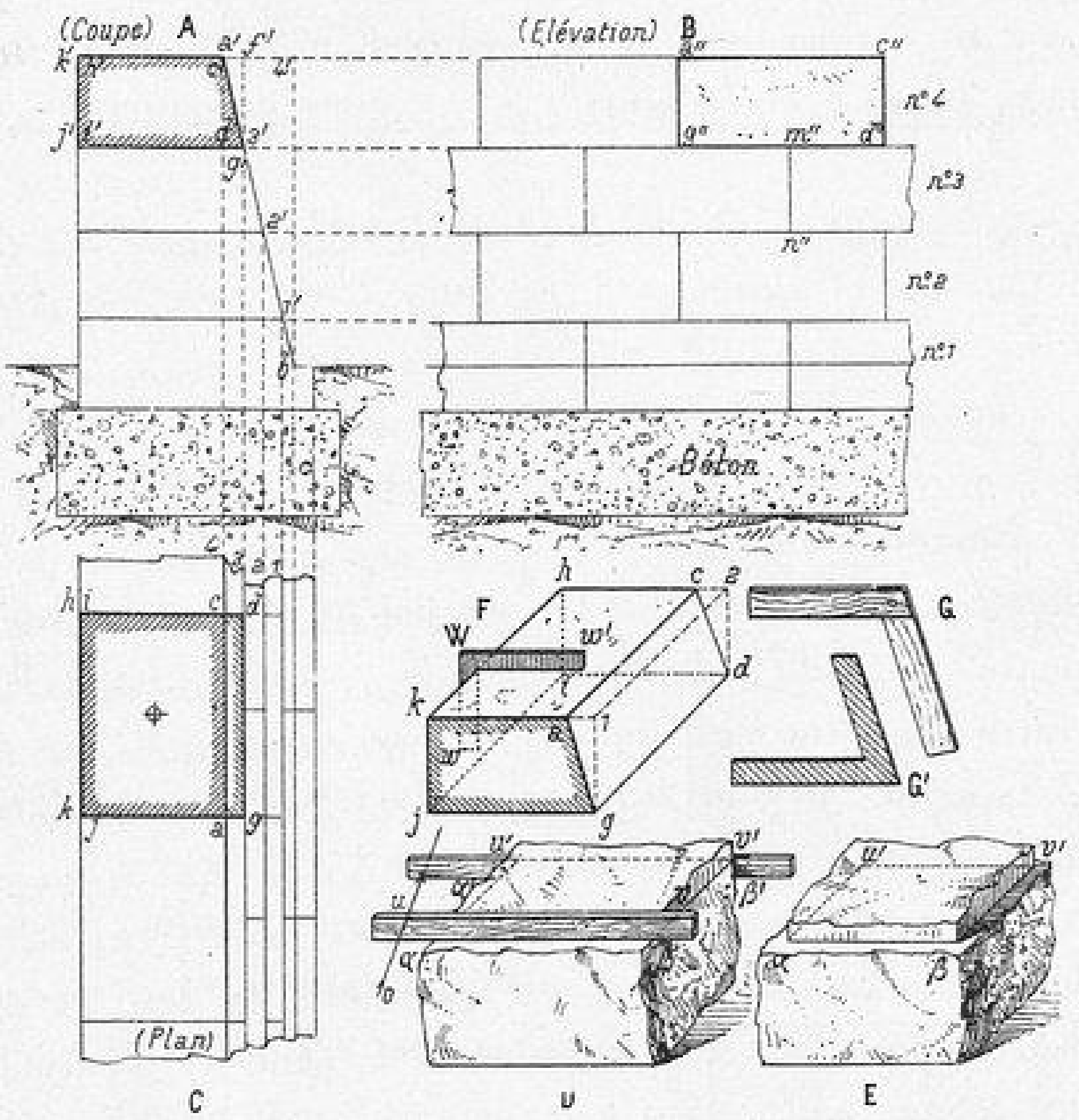
Sur ce plan, (fig. F) on tracera au crayon ou au traceret en h k 1 2 la base du parallélipipède. On aura pour cela relevé sur l'épure (fig. C) les dimensions ou, mieux encore, le panneau h k g d.

Pour faire apparaître les faces verticales, on pratiquera d'abord sur les parois verticales de la pierre brute une série d'entailles que l'on nomme des *jouées*. Elles seront telles que le fond de ces entailles soit bien droit, et que en appliquant (fig. F) la branche W w' d'une équerre sur le plan déjà fait, l'angle rentrant W de cette équerre étant appuyé sur le côté h k du rectangle de base et le plan de l'équerre tenu bien perpendiculaire à la face plane déjà taillée, l'autre branche W w de l'équerre coïncide bien avec le fond de la jouée.

On pratiquera ainsi deux jouées pour chaque face latérale du prisme, une à chaque angle h, k, etc ..... et l'on aura ainsi des directrices des plans latéraux. Ceux-ci se tailleront

donc ensuite facilement. On donnera aux arêtes latérales les longueurs voulues k j, 1 g etc..., on reliera par des droites j g d i les sommets inférieurs et le plan de la face de dessous sera défini, lui aussi par des directrices rectilignes ce qui permettra de le tailler.

Fig. 4.



(c) Application du trait sur la pierre; taille par équarrissement. — On prépare d'abord un solide capable de contenir la pierre d'appareil. Ce sera un parallélipipède rectangle dont la base h k d g se relève en plan (fig. C) et dont la hauteur j k' est donnée en coupe (fig. A). Nous venons de voir comment on le taille.

On a relevé (en coupe) le panneau de joint a'g'j'k', qui est un trapèze. On l'applique (fig. F) sur chacune des faces latérales, en a g k j et h c d i, et dès lors, le plan a c d g de parement en talus est déterminé par ses directrices et peut se tailler.

(d) Taille directe. — On pourrait éviter la taille complète du solide capable: A cet effet, après avoir dressé une face plane sur la pierre et y avoir appliqué (fig. F) le panneau de dessus h a c k, on passerait aux faces latérales en se servant de biveaux. Pour trois d'entre elles ce biveau sera l'équerre: W w' w; pour la face de parement ce sera un biveau G, relevé en k'a'd' sur la coupe A.

Nota. — Il vaudrait mieux commencer par dresser très soigneusement la face inférieure i j g d, qui servira de lit de pose, et par un biveau G', qui sera aigu au lieu d'être obtus, obtenir la face inclinée de parement.

Le lit de dessus h a c h peut être dressé avec un peu moins de soin que l'autre. D'ailleurs il a presque toujours besoin d'être retouché et dérasé sur le tas.

§ 6. — Mur en pan coupé. — fig. 5.

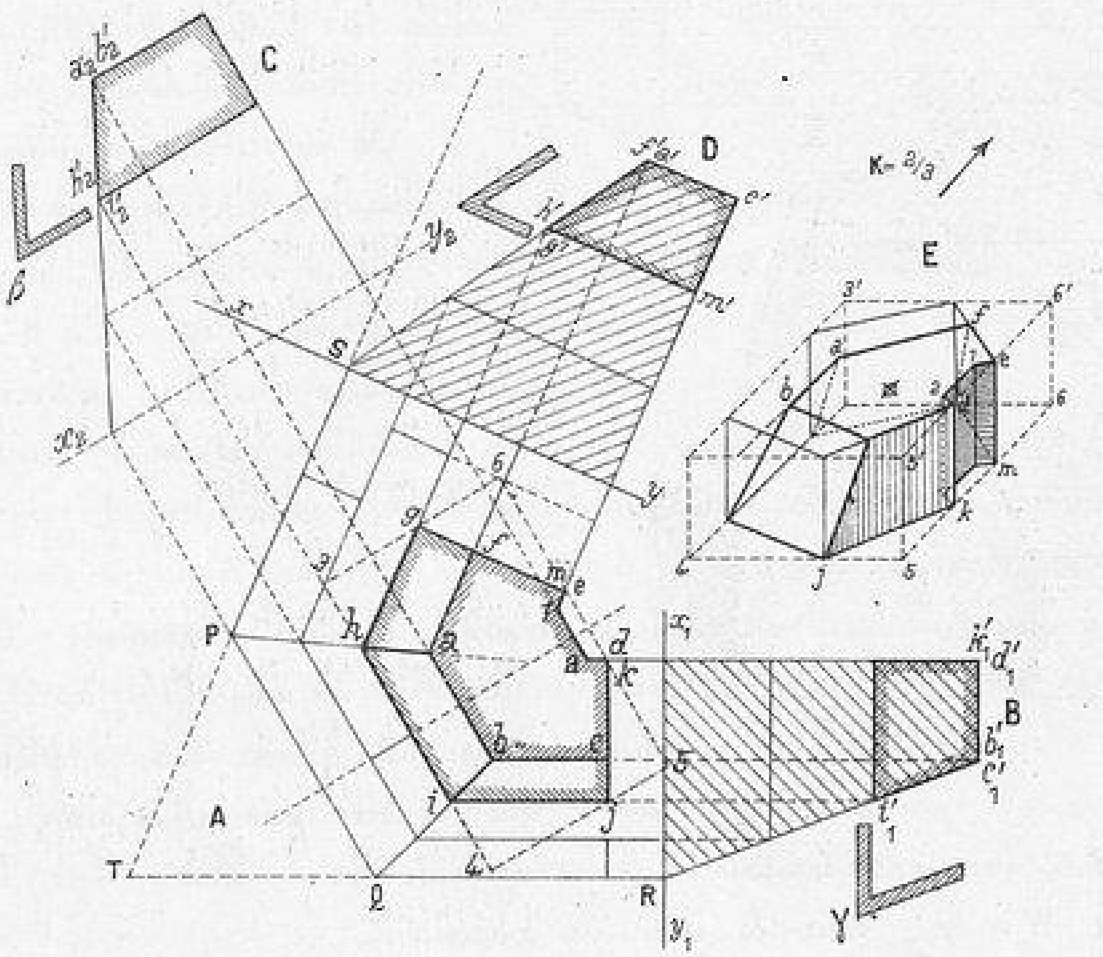
(a) Données. — Épure d'ensemble. — Deux murs, avec fruit, ont pour traces sur le sol les lignes SP et RQ; pour éviter en T, une intersection trop aiguë, on ajoute en PQ un petit mur dit en pan coupé. — On donne en D et en B les coupes sur chacun des murs principaux, ce qui fait connaître les fruits de chacun d'eux. Nous supposons ces fruits différents. — On a fait également en C, une coupe sur le pan coupé, et le fruit de ce mur intermédiaire a une valeur ordinairement comprise entre celles des fruits des murs principaux.

(b) Intersection des surfaces en présence. — Appareil. — Les surfaces en présence sont des plans.

Pour en trouver les intersections il faudrait posséder des horizontales de même niveau sur chacun d'eux. Comme les assises des pierres doivent être horizontales, nous sommes donc amenés à les représenter, c'est-à-dire à appareiller le mur; les lignes d'appareil, c'est-à-dire les lignes de lit, seront aussi les lignes auxiliaires que la géométrie descriptive nous dit de choisir pour résoudre les problèmes d'intersection.

Nous avons pris trois assises de pierre, qui apparaissent avec les mêmes hauteurs sur chacune des trois coupes. Les horizontales de lit se recoupent et font connaître en Pa et bQ les intersections des trois plans.

Fig. 5.



(c) Préparation du trait. – Étudions la pierre d'encoignure, dont les projections ou coupes sont figurées sur notre épure par un trait plus fort. On voit les divers panneaux, de lit ou de joint, indiqués par des hachures; ainsi que les différents biveaux qui pourront servir.

(d) Application du trait sur la pierre (fig. E, perspective).

1° Taille par équarrissement. – Le solide capable est un parallélipipède dont la base est prise en 3.4.5.6, sur le plan A; et dont la hauteur est celle de l'assise, prise sur une des coupes.

On a relevé sur ce plan, le panneau de dessus e f a b c … et le panneau de dessous m g h i j ….; on les porte sur les faces de dessus et de dessous du solide et, dès lors, tous les plans inclinés ou non qui doivent limiter la pierre, sont déterminés par des directrices rectilignes et peuvent être taillés.

2° Taille directe. – Disons immédiatement qu'elle est moins précise que l'autre. On dressera d'abord sur une pierre dégrossie la face plane de lit inférieur et on y appliquera le panneau de dessous g, h, i, j …

En se servant de biveaux relevés en α, β, γ sur les trois coupes D, C et B, on fera apparaître les trois plans des talus. Une équerre, servant de biveau, permettra d'obtenir les faces de joint, qui sont verticales, ainsi que l'angle rentrant e 1 2 d. – Il ne reste plus alors qu'à donner à la pierre la hauteur de l'assise, et à l'araser sur son lit de dessus.

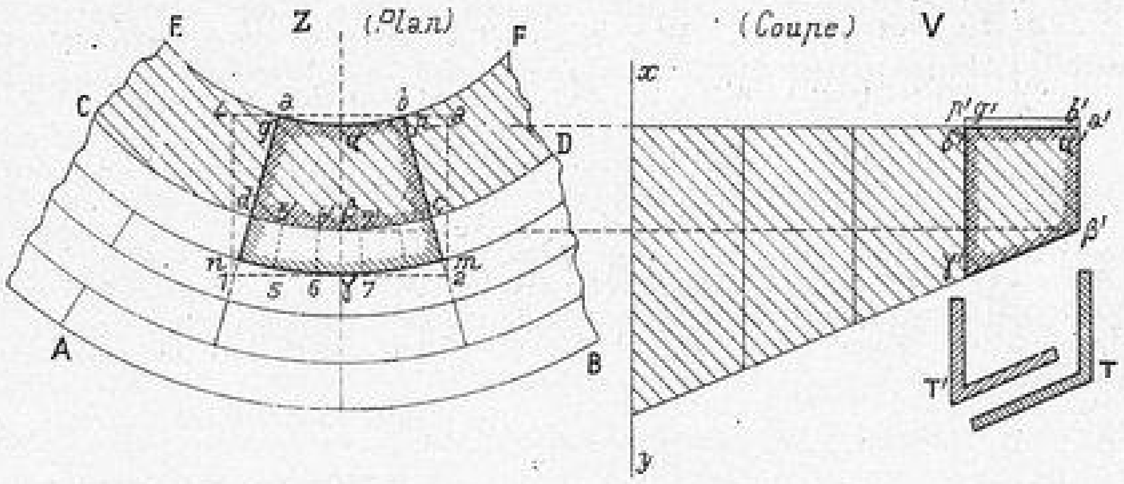
§ 7. – Mur conique, dit mur de tour ronde en talus, fig. 6.

(a) Données. – AB est le cercle de base du cône qui forme le parement extérieur du mur. La coupe V en fait connaître le fruit. – Le cône est de révolution.

(b) *Appareil.* – Nous prenons quatre assises. Les lignes de lit sont des cercles horizontaux tels que a b, d c, m n. Dans chaque assise les pierres sont séparées par des plans méridiens tels que a n et b m. Ces plans qui sont normaux aux cercles de lit constituent donc les surfaces de joint ; et les lignes de joint sont des génératrices d n ; c m du cône.

(c) *Préparation et application du trait sur la pierre.* – 1° Taille par équarrissement. – Le solide capable a pour base le rectangle 1.2.3.4 pris sur le plan Z (Voir sa perspective, fig. 7)

Fig. 6.



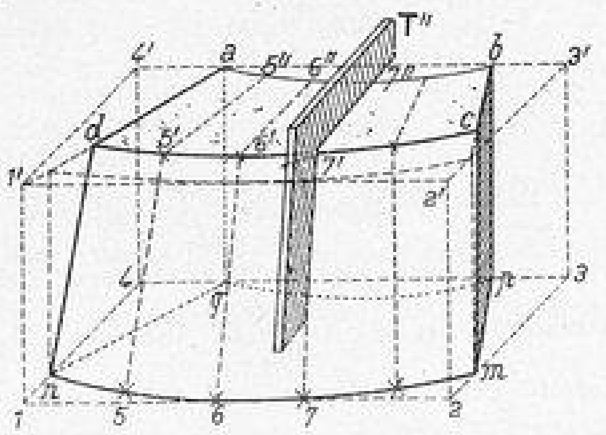
Sa hauteur est celle de l'assise. On applique sur ses faces de dessous et de dessus les panneaux de lit relevés en p q m n et a b c d sur le plan ; ce qui donne les directrices des plans de joint a n et b m que l'on peut, dès lors, abattre et tailler.

Quant à la surface conique d c m n, on a eu soin de diviser en un même nombre de parties égales le cercle de dessus c d, aux points 5', 6', 7'..... et le cercle de dessous m n aux points 5, 6, 7.. On pratique alors dans la pierre, des jouées rectilignes reliant ces points, et la pierre laissée brute entre ces jouées s'abat en dernier lieu.

La partie cylindrique intérieure a d, se taillera d'une manière analogue.

2° Taille directe. – Sur la pierre dégrossie on pratiquera d'abord un plan qui sera le lit de pose. On y appliquera le panneau de dessous m n p q. En se servant d'une équerre comme biveau, on fera apparaître les plans de joint a n et b n, et même le cylindre intérieur a b, p q.

Fig. 7.



On aura relevé sur la coupe V, le panneau de joint α' β' γ' δ', que l'on appliquera (fig. 7) en a d n q et b c m n sur les plans de joint qui viennent d'être terminés.

Dès lors le plan de lit de dessus est défini par deux directrices a d et b c ce qui suffit pour le tailler, on le fait apparaître et on y applique alors le panneau curviligne de dessus a b c d. Le cône s'obtient ensuite comme tout à l'heure.

Remarque. – En relevant sur la coupe V le biveau obtus T ou le biveau aigu T' du fruit du mur, et appliquant sa branche horizontale T'' (fig. 7) sur des rayons 5'5'' – 6'6'' – 7'7'' des cercles de lit, l'autre branche devrait donner chaque fois des génératrices du cône : Cela permettrait de tailler directement le cône en partant d'un seul des cercles de lit. Mais l'autre manière, en se guidant sur les deux cercles, est plus exacte.

Voûtes cylindriques horizontales simples

Voûtes cylindriques horizontales simples.

§ 8.- Définition d'une voûte simple.

On dit qu'une voûte est *simple*, lorsqu'il n'y entre qu'une seule surface; elle est *composée*, lorsqu'elle résulte de la rencontre de plusieurs surfaces. Par exemple, si deux cylindres se rencontrent, la voûte qu'ils forment par leur ensemble sera dite composée. Nous étudierons plus loin la voûte d'arête ou la voûte en arc de cloître qui résultent toutes deux de la rencontre de deux cylindres (ou berceaux) ayant même plan de naissance et même montée; nous verrons aussi la lunette cylindrique, etc..... Néanmoins une voûte peut être classée dans la catégorie des voûtes simples si son intrados rencontre l'intrados d'une autre voûte; mais il faut alors que cette autre voûte soit construite en maçonnerie de moellons, de briques, de béton, mais ne soit pas appareillée en pierres de taille. On dit alors que la première voûte *rachète* la seconde. Ainsi nous trouverons plus loin une porte biaise en tour ronde *rachetant* une voûte sphérique.

A.- Porte biaise dans un mur en talus. (fig. 8).

§ 9.- Épure d'ensemble.

(a) Données.- On donne un mur (fig C) dont les deux parements XX' et Y'Y ne sont pas parallèles. L'un, le parement X'X est vertical; l'autre a pour trace sur le plan des naissances pris comme plan horizontal (1) la droite Y'Y qui n'est pas parallèle à X. - Le mur est donc *biais*. De plus le parement Y a du fruit f. La coupe faite sur ce mur par le plan vertical $x_1 y_1$ (fig. D) perpendiculaire à Y fait connaître en YZ une ligne de plus grande pente et par conséquent le fruit du parement incliné.

Une porte plein cintre ABCDEF est pratiquée dans le mur. Le cylindre d'intrados a ses génératrices perpendiculaires à la trace X, mais obliques à la trace Y. La porte est donc droite par rapport au parement X, mais biaise par rapport au parement Y. Nous prenons notre plan vertical de projection principal xy (fig. A) parallèle au parement X, lequel donnera une section droite du cylindre tandis que le parement Y fournira une section oblique.

(b) Surfaces en présence.- Au point de vue géométrique nous avons en présence un cylindre et deux plans. La section droite faite par le plan X est toute trouvée; c'est le cercle ABCD..... en élévation et la droite abcd..... en plan. Pour trouver la section par le plan incliné Y rappelons la théorie: « On mène par chaque génératrice des plans auxiliaires convenablement choisis, on prend les intersections auxiliaires de ces plans et du plan sécant et les « points de rencontre des génératrices et de ces lignes auxiliaires sont des points de l'intersection cherchée ».

Il nous faut donc d'abord des génératrices, et comme le tracé de l'appareil en exige également, nous appareillons immédiatement la voûte. Nous constatons ici, comme

(1) On prend presque toujours le plan des naissances pour plan horizontal de projection.

dans presque tous les problèmes[1] de coupe de pierres, que nous étudierons par la suite, que le tracé de l'appareil et la recherche des intersections des surfaces en présence marchent ensemble. C'est une remarque que nous faisons ici pour ne plus y revenir par la suite.

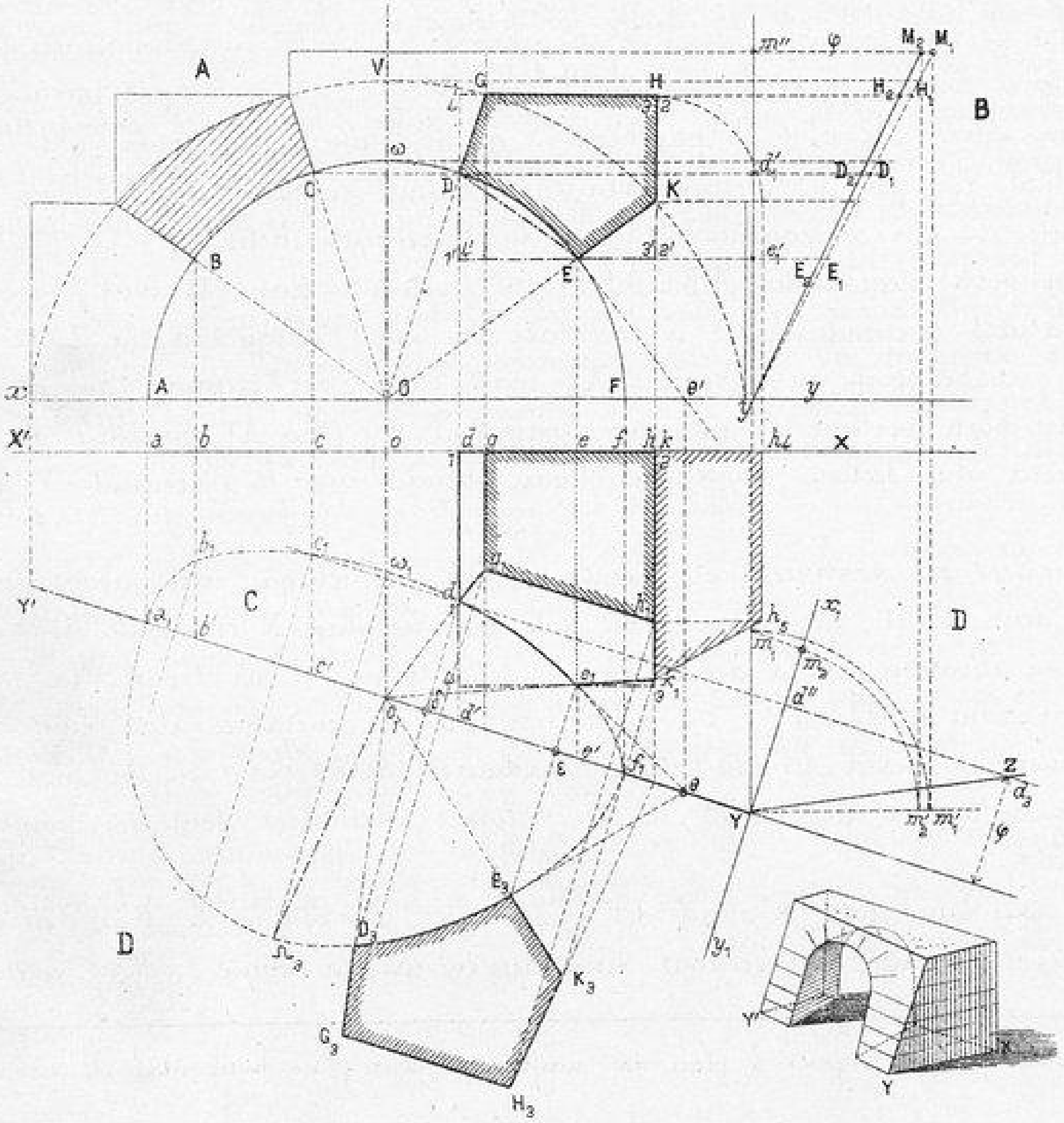
(c) *Appareil de la voûte.* – Le demi-cercle d'intrados a été divisé en un nombre impair de parties égales (ici cinq) aux points B C D E, ce qui donne les points de départ des génératrices, lesquelles constituent des lignes de lit d'intrados.

Les surfaces de lit sont, d'une manière générale, formées par le lieu des normales menées à l'intrados en tous les points des lignes de lit. Ces surfaces de lit dans le cas actuel sont donc des plans tels que ODG – OEK .... perpendiculaires au plan vertical et passant par l'axe OO' du berceau.

La profondeur DG ou EK des lits est donnée en traçant un extrados fictif x G K y qui n'est pas tout à fait parallèle à l'intrados. Il est bon de lui donner plus de largeur x A aux naissances qu'à la clef ω V.

On peut extradosser *parallèlement*, comme est le voussoir de gauche BC, ou extradosser *en tas de charge*, comme est le voussoir de droite DEKHG, qui est celui que nous étudierons spécialement. – On voit que, en dehors de sa *douelle cylindrique* DE, et de ses deux plans de lit DG et EK, le voussoir est limité à la partie supérieure par un plan horizontal GH, qui sera son *plan de dessus*, et sur le côté, par un plan vertical, qui sera son *plan de côté*.

Fig. 8.



(d) *Intersections des surfaces en présence.* – Cela posé, cherchons les intersections de toutes les surfaces en présence; si nous considérons l'ensemble de la voûte non encore appareillée, nous avons un cylindre de section droite ABCD qui recoupe un plan incliné Y'YZ. – Si nous prenons le voussoir seul, nous avons à trouver l'intersection, toujours avec le même plan Y'YZ, d'une portion DE du cylindre précédent,

[1] Dans les arches biaises les lignes de l'appareil ne pourront pas être prises comme génératrices des surfaces d'intrados.

et en plus de quatre plans DG, GH, HK et KE. Le voussoir peut donc, dans son ensemble, être considéré comme un cylindre parallèle à celui de la voûte, mais qui aurait pour base le pentagone mixtiligne DEKHG, et par conséquent toutes les intersections vont se trouver en employant une seule et même méthode: Voici celle qui est préférée par les appareilleurs:

Par chaque génératrice dd_1, - ee_1, - gg_1 etc.... on fait passer, comme auxiliaire, le plan qui la projette horizontalement. Ce plan détermine dans le talus une ligne de profil dont nous allons chercher le rabattement sur le plan vertical.

A cet effet (fig. C) coupons simultanément le talus par un plan de profil Ym_1 et par un plan de section droite Ym_2; prenons sur chacune des deux droites de section un point m_1 et m_2 situés sur la même horizontale, et amenons le tout en Ym_2' et Ym_1' à être de front. Nous obtenons ainsi (fig. B), en élévation, d'une part, la verticale ym'' et, d'autre part, les deux sections rabattues yM_2 (section droite) et yM_1 (section de profil); la première peut se dessiner à priori, puisque nous connaissons le fruit f du mur. On remarquera que la section de profil xM_1 doit s'écarter plus de la verticale que la section droite xM_2.

Cela posé: soit à trouver le point d_1 où la génératrice D perce le talus. Menons (fig C) le plan de profil qui contient cette droite; il perce la base du talus en d' et si nous pouvions connaître la profondeur $d'd_1$ le problème serait résolu. Prenons (fig. B) sur la verticale ym'' le point d_1' qui est au niveau de D, menons l'horizontale $d_1'D_1$ jusqu'à la rencontre avec la ligne de profil et nous obtenons en $d_1'D_1$ la profondeur cherchée, que nous relevons au compas et que nous reportons sur le plan (fig. C) de d' en d_1.

Nous obtiendrons de la même façon tous les autres points des intersections.

Remarque. - Cette méthode paraît un peu détournée; mais sur le chantier elle est très pratique, en ce sens qu'elle ne nécessite que l'emploi du compas et d'une équerre de dimension moyenne; c'est pourquoi elle est employée.

(e) *Détails géométriques.* - L'ellipse de tête s'obtient ainsi en $a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots$ (fig. C). Aux points a_1 et f_1 de naissance, elle doit être tangente aux génératrices de naissance aa_1 et ff_1 qui sont des lignes de contour apparent pour le cylindre d'intrados. Dans l'espace, les tangentes en ces points sont des lignes de profil. Pour avoir la tangente en un point quelconque e, menons le plan tangent tout le long de la génératrice. Sa trace (fig. A) sur le plan de section droite est la tangente $E\theta'$ qui perce la ligne de terre en θ'. Sa trace horizontale (fig. C) est $\theta'\theta$, parallèle aux génératrices puisque ces dernières sont horizontales. Elle rencontre la trace du talus en θ; la tangente est donc θe (que nous rabattrons tout à l'heure en θE_3). Le point le plus haut ω_1 est obtenu sur la génératrice la plus haute ω. La tangente y est horizontale. La ligne de naissance a_1f_1 et la droite $o_1\omega_1$ sont donc deux diamètres conjugués de l'ellipse.

Vérifications. - Les lignes de lit de tête, d_1g_1 et k_1e_1, prolongées, doivent aller passer par le point o_1 où l'axe du berceau perce le talus. La ligne de dessus g_1h_1 est horizontale et est parallèle à la trace YY' du talus.

§ 10. -

§ 10. – Préparation de la taille.

Nous aurons besoin, pour appliquer le trait sur la pierre, de détailler certains éléments du voussoir. Nous allons à titre d'exercice, dans cette épure, donner tous ces détails. Ils seront plus nombreux qu'il ne le faudrait rigoureusement pour la taille ; mais nous indiquerons plus loin ceux qui seraient strictement nécessaires et ceux qui ne serviraient que comme vérification de l'exécution.

1° *Panneau de tête droite.* – Nous l'avons en EDGH (fig. A) sur l'élévation.

2° *Panneau de tête oblique.* – Nous rabattons (fig. D) sur le plan horizontal le parement du talus. A cet effet la charnière est la trace YY'. Nous abaissons les rayons de rotation $d_1\delta$ – $e_1\varepsilon$.... perpendiculaires sur la charnière et nous trouvons la vraie grandeur à leur donner sur la figure B ; non plus cette fois sur la ligne de profil yM_1 mais sur la ligne de section droite yM_2. Ces rayons sont yE_2, yD_2. On les prend au compas ou au mètre, s'ils sont trop grands, et on les reporte (fig. D) de δ en D_3, de ε en E_3 etc ....

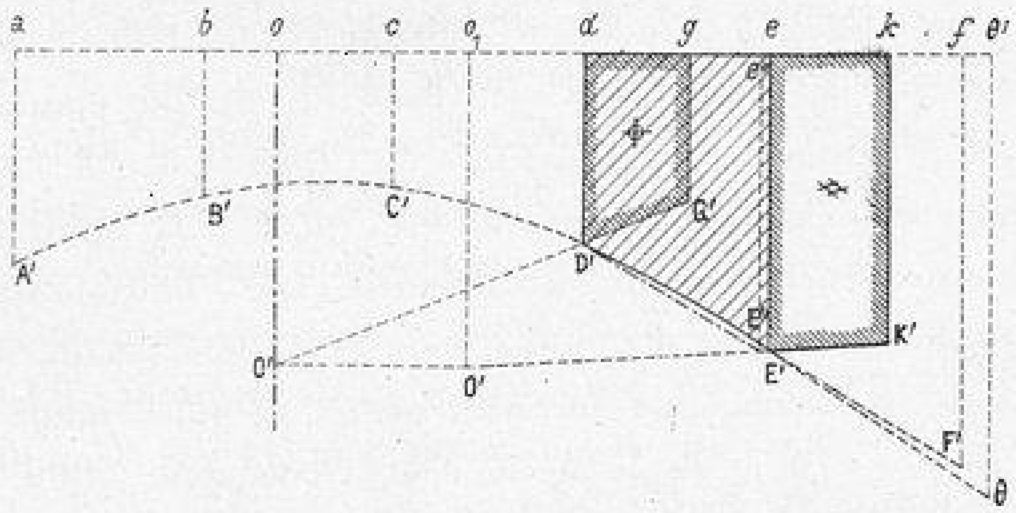
On opère de même pour tous les points $G_3 H_3 K_3$ du panneau. – Comme vérification on remarquera : que les lignes de lit G_3D_3 et K_3E_3 doivent concourir au centre O_1 ; que la ligne de dessus G_3H_3 est horizontale et parallèle à la charnière ; que la ligne de côté H_3G_3 est oblique à la charnière et parallèle à $O_1\Omega_3$; c'est le rabattement d'une ligne de profil. Pour se guider dans le tracé de l'ellipse on fera bien de rabattre, comme on l'a fait en $E_3\theta$, les principales tangentes. Aux naissances en f_1 et a_1 les tangentes sont des lignes de profil parallèles, par conséquent à $O_1\Omega_3$.

3° *Panneau de dessus.* – On le voit obtenu à priori en $g\,g_1\,h_1\,h$ sur le plan (fig. C).

4° *Panneau de côté.* – On le voit rabattu (fig. C) en $k\,k_1\,b_5\,b_4$.

5° *Panneaux de lit et douelle développée.* – On fait le développement de la surface d'intrados. A cet effet (fig. 9) sur une droite indéfinie on porte les longueurs ab, bc, cd .... qui sont les rectifications des arcs de section droite pris (fig. 5, A). Cette droite est la transformée de la section droite faite dans l'intrados par le plan de tête X'X. On élève des perpendiculaires aA', bB'...... sur lesquelles on porte les longueurs des génératrices prises sur l'épure (fig 5, C) de b en b_1 – de c en c_1 etc..... et joignant les points A'B'C'..... par une ligne continue on obtient la transformée de la section oblique.

Fig. 9.



On développe ensuite chaque panneau de lit de la même manière. Pour le lit de dessus on a pris dg (fig. 9) égale à DG (fig. 5, A) et gG' égale à la longueur de l'arête de dessus G. – Le panneau de lit eE'kK' a été obtenu de la même manière.

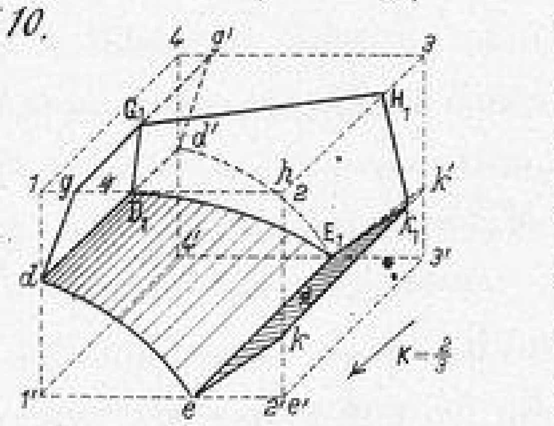
Dès lors la préparation de la taille est achevée.

§ 11. –

§ 11. – Application du trait sur la pierre.

(a) *Taille par équarrissement.* – Le solide capable sera le parallélipipède rectangle défini en 1, 2, 3, 4 ..... sur la figure 8 et représenté en perspective sur la figure 10. Nous avons pris les faces horizontales et verticales. Sur la face d'avant 4 3 4' 3' et sur la face d'arrière on appliquera le panneau de section droite DEKHG relevé fig. A ; ce qui permettra de tailler le prisme qui l'aurait pour base. Ce prisme est plus long qu'il ne faut, et l'on doit rogner ses arêtes de manière à faire apparaître la tête $D_1 G_1 H_1$ ..... de la face en talus. On pourrait pour cela relever sur l'épure à l'aide de jauges les longueurs de ces arêtes ; mais on confondrait facilement toutes ces jauges entre elles, c'est pourquoi on se sert des panneaux de lit que l'on applique sur les plans $d\,g\,D_1 G_1$ pour le lit de dessus et $k\,e\,K_1 E_1$ pour le lit de pose. On suit alors, avec une pointe traçante, les lignes de tête $D_1 G_1$ et $K_1 E_1$ de ces panneaux ce qui donne deux directrices du parement incliné et suffirait, à la rigueur, pour le tailler.

Fig 10.

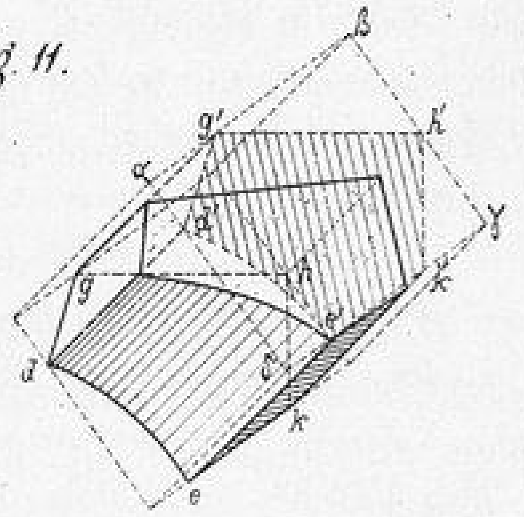


Mais en appliquant sur la partie cylindrique la douelle que l'on a relevée sur le développement (fig. 9 – D) et découpée sur un carton flexible, on peut tracer l'ellipse $D_1 E_1$. Enfin on peut joindre G_1 et H_1 par une droite ; dès lors tout le contour du plan de la tête en talus est tracé et la taille de ce plan est facile à faire.

Comme vérification le panneau de tête $D_3 E_3 K_3$ .... (fig. D) devra pouvoir s'appliquer exactement sur le parement une fois terminé.

Remarque. – Le solide capable placé comme nous l'avons indiqué mettrait la pierre en délit, surtout si le voussoir était trop près de la clef ; près des naissances cet inconvénient serait négligeable. Alors il faudrait, au lieu de placer horizontale la face 1 2 du solide, l'incliner suivant le lit de dessous EK. On voit fig. 11 en perspective la disposition à donner au solide capable. Il est inutile d'insister sur la manière dont on conduirait la taille dans ce cas.

Fig. 11.



(b) *Taille directe.* – On dresse d'abord un plan qui sera le plan de lit de pose EK. On y applique le panneau de dessous et, avec une pointe traçante, on en suit tout le contour. – On passe ensuite à l'intrados, mais on substitue à la douelle courbe la douelle plate qui aurait pour section droite la corde DE (fig. A) de l'arc. Ce passage d'un plan à l'autre se fait par un biveau donné (fig. A) par l'angle KED.

La vraie grandeur du panneau de douelle plate a été cherchée sur le développement en d D'e"E" (fig. 9) c'est un trapèze dont la hauteur d e" est un peu plus petite que celle, d e, de la douelle courbe, de toute la différence entre l'arc et sa corde, et dont le côté D'E" est droit au lieu d'être courbe. On suit à la pointe sur le plan qui vient d'être taillé le contour de cette douelle plate. – On passe du plan de douelle plate au plan de lit de dessus DG, également par un biveau EDG et ainsi de suite. On voit que à l'aide des biveaux et de panneaux on fait pour ainsi dire le tour du voussoir, mais en commençant presque toujours par le lit de pose.

La douelle cylindrique se creuse facilement, en dernier lieu, en se servant des deux directrices courbes l'une, l'arc de cercle dans le plan de section droite, l'autre l'arc d'ellipse dans le plan en talus.

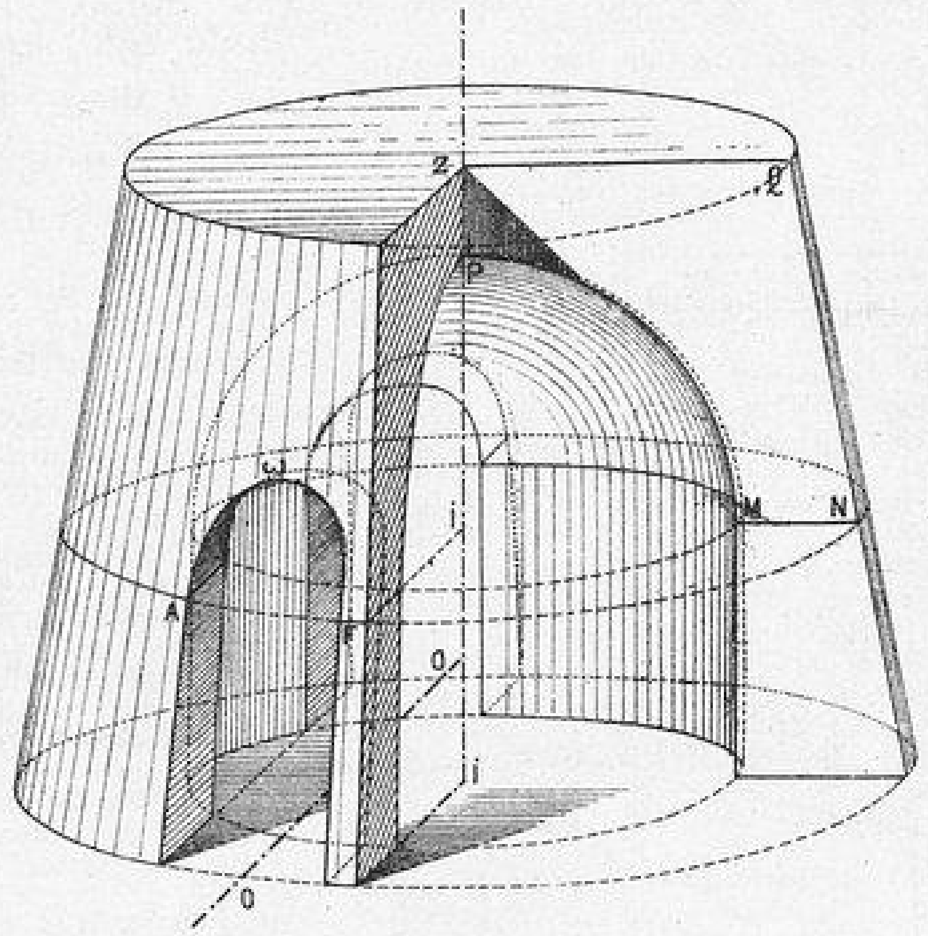
Porte biaise en tour ronde en talus rachetant une voûte sphérique.

12e Leçon.

§12. - Description de la voûte. (fig. 12).

La figure 12 montre, en perspective, l'ensemble des surfaces en présence. Une tour ronde est en talus, ce qui veut dire que sa surface extérieure est formée par un cône de révolution dont la génératrice est figurée en NQ sur la partie coupée. Intérieurement la tour est cylindrique et elle se termine par une partie sphérique MP.

Fig. 12.



Une porte cylindrique AωF est biaise, ce qui veut dire que son axe OO horizontal ne rencontre pas l'axe vertical de la tour.

La section droite du cylindre qui constitue la porte est un cercle; et nous supposerons que le plan de naissance AF de la porte est le même que le plan de naissance MN de la voûte sphérique.

Au point de vue géométrique nous aurons donc à chercher la double intersection du cylindre de la porte avec le cône extérieur de la tour et avec la sphère intérieure.

§13. - Epure d'ensemble (fig. 13).

(a) Données. - On voit en B le plan; le plan des naissances est pris comme plan horizontal et les voûtes sont supposées vues par dessous.

La figure A est une coupe faite par le plan méridien de front de la tour et de la sphère. L'axe de la porte est OO, en plan; il est pris perpendiculaire au plan vertical de projection; par conséquent, en élévation, la porte apparait projetée toute entière suivant un demi-cercle ABCDEF.

Le fruit extérieur de la tour est donné par la coupe méridienne NQ (fig. A) et la sphère intérieure est déterminée également par sa méridienne MUP.

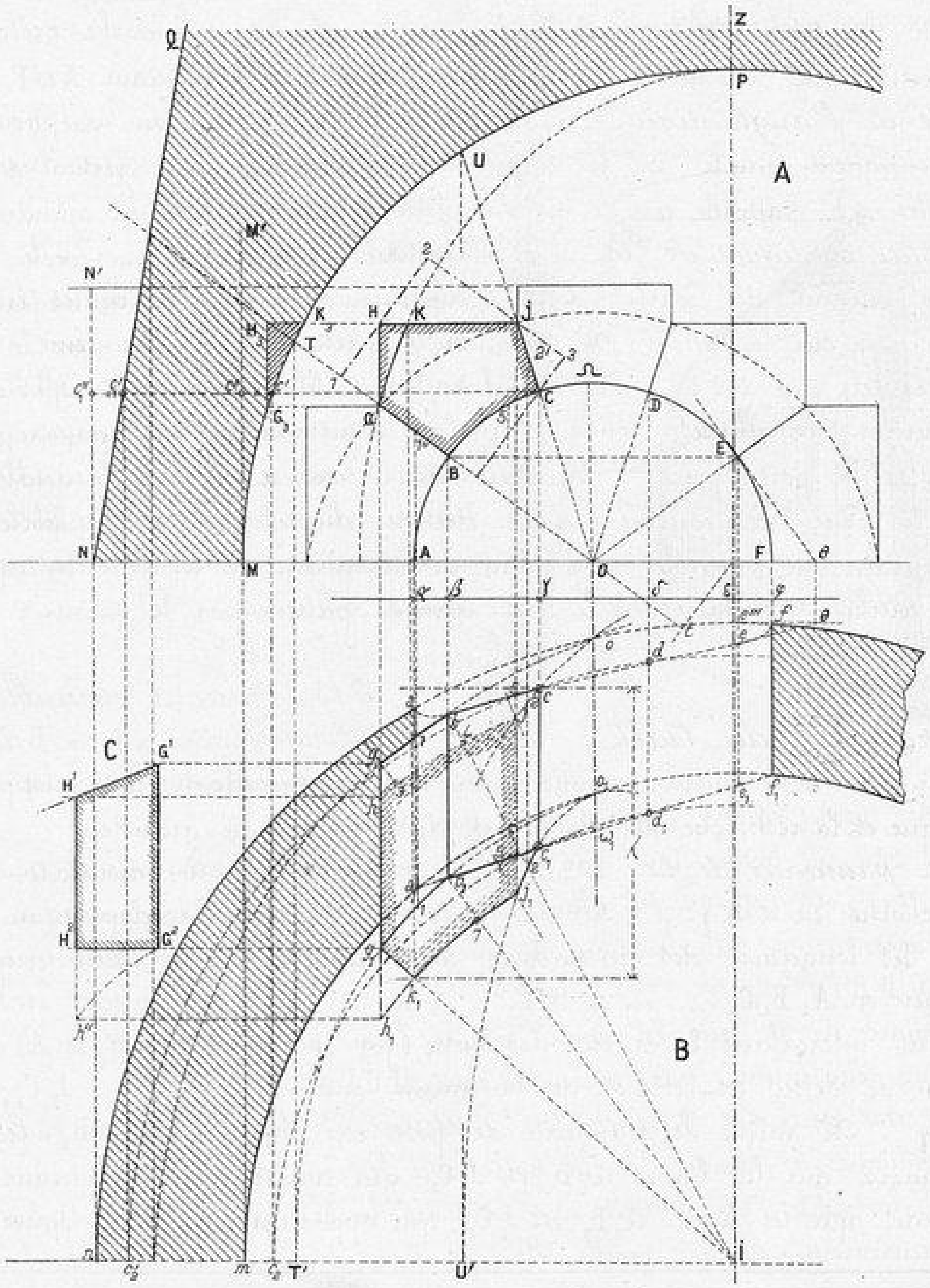
(b) Intersection des grandes surfaces en présence. - Il faut trouver les intersections des génératrices du cylindre d'intrados de la porte avec le cône et avec la sphère. On commence donc par appareiller la porte. On a pris cinq voussoirs limités sur l'intrados aux points ABCDEF, et extérieurement en des points tels que G et J, à un extrados fictif convenablement choisi.

Par les génératrices B, C....... du cylindre on fait passer des plans horizontaux qui déterminent des cercles auxiliaires dans le cône et dans la sphère. - L'épure indique pour la génératrice C, seulement, comment ces cercles sont obtenus. La difficulté que l'on a, sur une épure en grandeur naturelle, à tracer des cercles de grande dimension conduit à employer le procédé suivant :

1° Par les pieds N et M du talus extérieur et intérieur (fig. A) on mène une verticale, exactement comme dans l'épure précédente.

2° On prend sur ces verticales les points c'' et c''_1 qui sont à la même hauteur que le point C.

Fig. 13.



3° Par ces points on mène, à l'équerre, une horizontale $c''c'$ et $c''_1 c'_1$ et on prend, au compas, les longueurs $c''c'$ et $c''_1 c'_1$ de cette horizontale interceptée entre les verticales NN' ou MM' et le talus sphérique MU, ou conique NQ.

4° Sur le plan, avec les ouvertures de compas ainsi obtenues on trace, par parallélisme avec les cercles de base m et n, les cercles $c'_2 c$ et $c_2 c_1$ dont les recoupements avec la génératrice C, donnent en c et c_1 les points cherchés.

Remarque. - Sur notre épure les cercles auxiliaires ont été tracés en entier, en mettant une pointe de compas en I centre de la sphère ; mais, en exécution, on ne trace que les portions, très restreintes, de ces cercles comprises dans le voisinage de la génératrice C, et si les deux cercles de base no et mo, ont été soigneusement tracés, ces cercles auxiliaires s'obtiennent ensuite par simple parallélisme sans plus avoir recours au centre I,

et en ne se servant que des ouvertures de compas $c''c'$ et $c_1''c_1'$. - Tous les autres points d'intersection tels que g, k, j et $g_1 k_1 j_1$ répondant aux arêtes du voussoir se trouveront de la même manière.

(c). *Détails géométriques*. - L'intersection $a\,b\,c\,d$ ..... avec le cône est une courbe gauche quelconque. - L'épure fait voir en $e\theta$, une tangente obtenue par l'intersection du plan tangent $E\theta$ au cylindre de la porte et du plan tangent $e'''\theta$ au cône. - Aux points a et f de naissance, la courbe est, en projection horizontale, tangente aux génératrices de contour apparent $a\,a_1$ et $f f_1$ du cylindre. L'intersection $a_1 b_1 c_1 d_1 f_1$ avec la sphère est aussi une courbe gauche; mais en projection horizontale la sphère et le cylindre ayant un même plan de symétrie commun et horizontal (le plan des naissances) cette courbe doit se projeter suivant une courbe ou une portion de courbe du second degré (1).

Par exception, les tangentes en a_1 et en f_1 étant verticales, la courbe présente en ces points un rebroussement, et même ici un point d'arrêt.

(d) *Troncature de l'angle aigu*. - L'angle supérieur $H k_1$, du côté de la sphère, serait trop aigu et par conséquent fragile. On le supprime en tronquant le voussoir par un plan méridien de la sphère $g_1 I$, passant par le point inférieur d'extrados $G g_1$.

(e) *Plans de lit et lignes de lit*. - Les plans de lit tels que CJ et BG, recoupent la sphère et le cône suivant des courbes dont on a déjà obtenu les extrémités en j et g sur le cône et en j_1 et g_1 sur la sphère. On en aurait exactement de la même manière des points intermédiaires tels que 2, 2, 2. - Sur la sphère ces courbes sont des cercles projetés horizontalement suivant des ellipses dont les prolongements iront tous passer par le point 0_1 où l'axe de la porte perce l'équateur de la sphère et elles sont tangentes à cet équateur. Sur le cône ces courbes peuvent être des ellipses, ou des hyperboles. Exceptionnellement on aurait une parabole si le plan de lit avait la même pente que le cône. En plan toutes ces courbes prolongées sur le cône iraient passer par le point 0 où l'axe de la porte perce le cône.

§ 14. - Préparation du trait.

Cette préparation comprendra, comme pour l'épure précédente, le développement de la douelle cylindrique et la recherche des panneaux de lit en vraie grandeur.

(a) *Douelle et panneaux de lit*. - La figure 14 donne tous les résultats. Une section droite ayant été choisie en $\alpha\,\beta\,\gamma$ ....., sur la figure 13-A, a été développée en $\alpha\,\beta\,\gamma$ .... sur la figure 14. - Les longueurs des génératrices sont fournies par le plan (fig. 13-A) ce qui permet d'obtenir en $A_2 B_2 C_2$ ..... et $A_3 B_3 C_3$ ..... (fig. 14) les transformées des deux intersections. - Le point intercalaire 2, a été développé (fig. 14) en 2 - 2' - 2''.

Le panneau de dessus est obtenu de la même manière en $J_2 C_2$ - $J_3 C_3$, en utilisant sa section droite $j\gamma$. - De même le panneau de pose est obtenu en $G_2 B_2$ - $G_3 B_3$ (fig. 14).

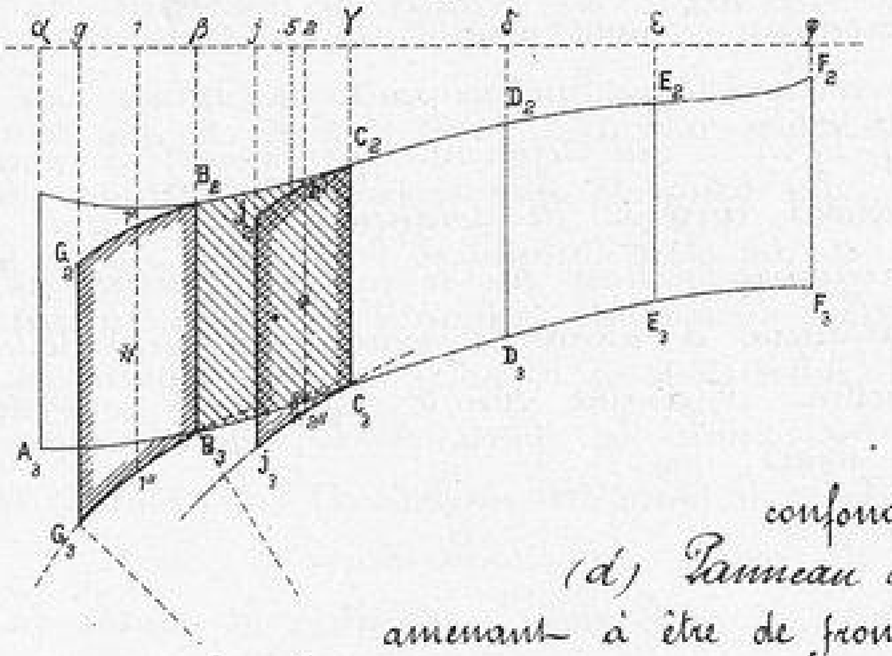
On remarquera que les lignes $G_2 B_2$ et $J_2 C_2$ qui appartiennent au cône sont des arcs d'ellipses tandis que les lignes $G_3 B_3$ et $J_3 C_3$, qui appartiennent à la sphère, sont

---

(1) Et même, l'une des deux surfaces étant une sphère, c'est un arc de parabole.

des arcs de cercle. La figure (13-B), donne en tT le rayon de l'arc de cercle B_3G_3.

Fig. 14.



(b) Panneau supérieur. La figure 13-A donne en $h\,j\,h_1\,k_1\,j_1$ qui est caché en projection horizontale, le panneau supérieur.

Les deux courbes $h\,j$ et $k_1\,j_1$ sont des arcs de cercle.

(c) Panneau de côté. – On le voit en C (fig. 13) obtenu par des reports de hauteurs. La ligne H'G', section du cône par un plan de profil, est un arc d'hyperbole presque confondu avec une ligne droite.

(d) Panneau de troncature. – On l'obtient (fig. 13-A) en amenant à être de front, en $H_3K_3G_3$, le triangle mixtiligne HKG.

Dès lors, nous avons, et au-delà, tous les éléments voulus pour tailler la pierre.

§ 15. – Application du trait sur la pierre.

(a) Solide capable. – On prend un bloc de pierre grossièrement équarri et on le suppose placé comme l'indique le rectangle 1.2.3.4 (fig. 13-A), c'est-à-dire de telle sorte que le lit de pose BG, soit parallèle au lit de carrière. La figure 15, montre en 1.2.3.4 le bloc en perspective. On relève (fig. 13-A) en BCGKJ, le panneau de section droite et le plan donne (fig. 13-B), en h, la longueur maxima du voussoir.

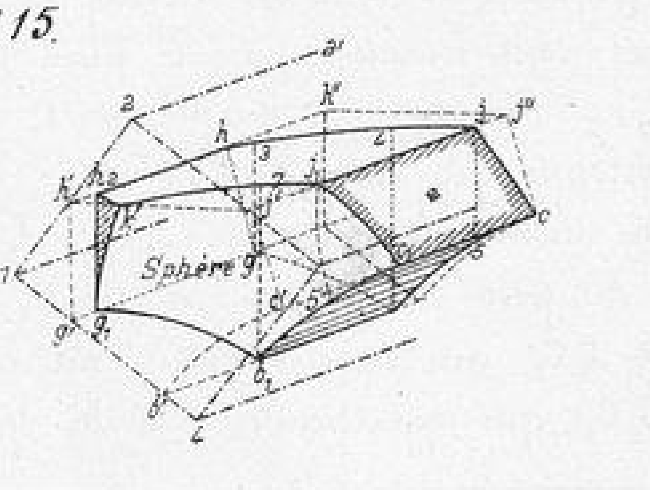
Dès lors on peut tailler (fig. 15) en h'g'b'c'...... h''g''b''...... un prisme droit de la longueur h dont il ne reste plus qu'à roguer les arêtes de la longueur voulue. Alors le solide capable, qui est ici un prisme, est obtenu.

(b) Application des panneaux et des douelles. – Les longueurs définitives des arêtes sont obtenues en appliquant sur toutes les faces du solide prismatique capable, les panneaux qui ont été trouvés. – On fait cette application des panneaux et on en suit le contour avec le traceret. – Dès lors, les limites de toutes les surfaces sont arrêtées et on taillera ces surfaces de la manière suivante (Suivre sur la figure 15).

(a). Troncature. – C'est un plan $h_2k'g_1$ qui est parfaitement défini par les deux droites h_2g_1 et h_2k' qu'ont fournies les panneaux.

(b). Le cône extérieur. – On en a deux directrices, savoir: 1° Une directrice circulaire $h\,j$ fournie par le panneau supérieur et 2° une directrice gauche $b\,c$ fournie par la douelle d'intrados enroulée sur la partie cylindrique du solide capable, laquelle se continue par une directrice elliptique et plane $b\,g$, fournie par le panneau de lit de pose.

Fig. 15.



On aura eu le soin sur l'épure (fig. 13-B) de faire passer des génératrices du cône telles que 97-b4-5j, par les points les plus importants du solide; on aura reporté les points numérotés 7-4-5 sur les panneaux

voulus et l'on aura ainsi des points de départ et des points d'arrivée de certaines génératrices du cône suffisamment rapprochées pour permettre d'obtenir les autres au jugé.

(c) *La sphère intérieure.* — On procèdera comme pour le cône, seulement au lieu de génératrices rectilignes, ce seront des cercles obtenus en coupant la sphère par des plans méridiens verticaux tels que Ig_1 - Ib_1 - Ij_1...... qui serviront. Les points d'arrivée et les points de départ de ces cercles méridiens auront été soigneusement repérés sur les panneaux et à l'aide d'une cerce circulaire relevée sur le méridien de la sphère et que l'on guidera sur ces points, on pratiquera d'abord des jouées circulaires telles que $j_1 5$ (fig. 15) dans la pierre, ce qui permettra d'abattre ensuite, comme il conviendra, les masses laissées non taillées entre ces jouées.

Voûtes plates.

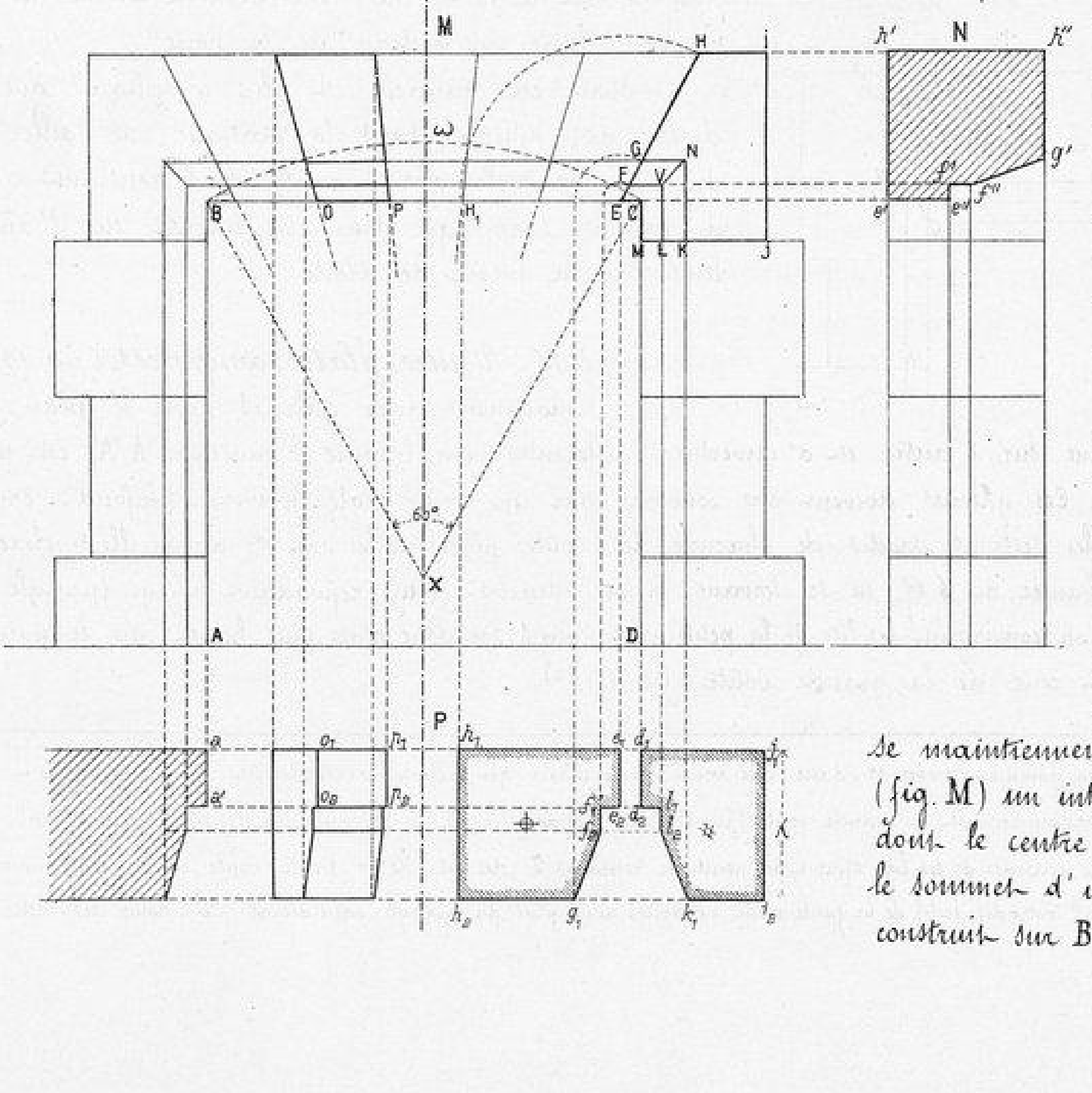
§ 16. – Description.

Les voûtes plates sont celles dont l'intrados est constitué par un plan, ordinairement horizontal. – Le plan étant un cas particulier du cylindre, les voûtes plates rentrent dans la catégorie des voûtes cylindriques. Mais si on les appareillait par des plans de lit perpendiculaires à l'intrados, alors les voussoirs seraient limités latéralement par des plans verticaux parallèles ; ils auraient la forme de prismes qui ne feraient pas *coin* les uns sur les autres et qui, par conséquent, ne tiendraient pas ; ils glisseraient.

§ 17. – Porte (ou fenêtre) en plate-bande. (fig 16).

(a) *Définitions.* – Le plan P montre en $d_1 d_2$ ce que l'on nomme le *tableau* de la porte ; vient ensuite une partie rentrante $d_2 l_1 l_2$ de 6 à 8 centimètres environ dans tous les sens et qui se nomme la *feuillure*. – C'est dans ce rentrant que l'on scelle le cadre en bois nommé *bâtis* sur lequel les *battants* de la porte seront fixés par des charnières. A la suite le mur qui forme le *piédroit* de la porte est légèrement évasé du côté de l'intérieur comme le montre la ligne $l_2 k_1$. Cette partie oblique se nomme le plan d'ébrasement ; on lui donne de l'évasement du côté de l'intérieur de l'édifice afin de permettre aux battants de la porte ou de la fenêtre de s'ouvrir plus largement et afin que la lumière pénètre plus abondamment dans les pièces.

Fig. 16.



Sur la coupe (fig N) on retrouve le *tableau* en e'e'', la feuillure en e''f'f'' et l'ébrasement en f''g'.

(b) *Appareil.* – Pour appareiller de manière à ce que les voussoirs se maintiennent, on trace en BWC (fig. M) un intrados circulaire fictif dont le centre X est ordinairement le sommet d'un triangle équilatéral construit sur BC comme côté.

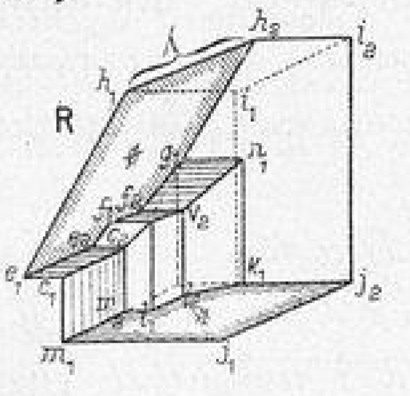
On trace ensuite les lits comme on le ferait pour un cylindre qui aurait pour base l'arc surbaissé BωC.

L'épure (fig. 16) montre en détail le sommier[1] ECMJ.....

Le panneau de lit de dessus EGH..... a été rabattu en $e_1 h_1 h_2 g_1$..... (fig. P). – Le panneau de lit de pose est en vraie grandeur en $d_1 j_1 j_2 k_1$..... sur le plan (fig. P).

(c) Taille du voussoir (fig. 17). – Le solide capable sera un prisme droit dont la base est le polygone HIJMCE relevé en élévation (fig. M) et dont la profondeur λ est donnée par le plan.

Fig. 17



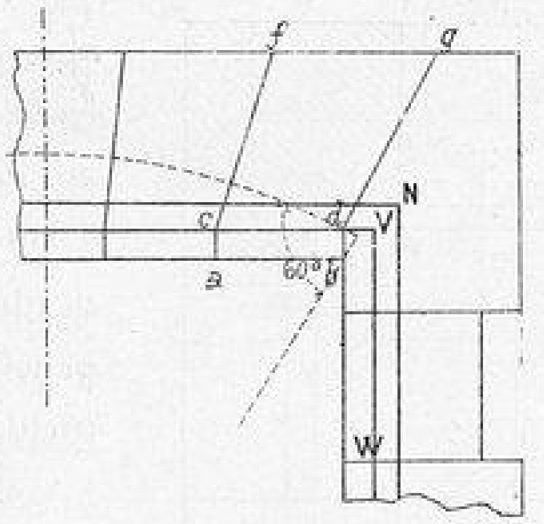
La figure 17 le montre en perspective cavalière en $i_1 h_1 e_1 c_1 m_1$. Une fois ce prisme obtenu, on applique sur sa face de dessus $h_2 h_1 e_1$..... et sur celle de dessous $m_1 j_1 j_2$..... les panneaux correspondants.

À l'équerre, en se guidant sur le contour $m_2 l_1 l_2 k_1$..... on creuse la partie verticale de la pierre, ce qui fait apparaître les parties verticales de la feuillure et de l'ébrasement. Des jauges ou mieux encore des panneaux (que notre épure n'indique pas) permettent de connaître exactement les dimensions à donner à ces évidements pour ne pas entamer la partie horizontale. – On obtient ainsi les arêtes en creux telles que $V_2 n_1$,... etc.

Les parties horizontales de la feuillure et de l'ébrasement sont dès lors définies par deux directrices, savoir : pour l'ébrasement, $f_2 g_1$ qui a fourni le panneau de dessus et $V_2 n_1$ que vient de fournir la taille précédente.

(d) Autre appareil, (fig. 18). – Quelquefois, pour éviter des angles trop aigus, on retourne le plan de lit de fc en ca, cette dernière partie du lit étant perpendiculaire au linteau de la porte.

Fig. 18.



Mais cet appareil est plus compliqué que l'autre et il est assez difficile, dans la pratique, de tailler les pierres de taille de sorte que l'angle obtus rentrant caf, du voussoir de gauche s'applique bien exactement sur l'angle obtus saillant de la pierre de droite.

§ 18. – Voûtes plates composées. (fig. 19).

Imaginons deux galeries (voir le plan. fig B) à angle droit l'une sur l'autre et d'ouvertures différentes. – Sur l'épure l'ouverture $A_1 A_1'$ est plus grande que $A_1 A$. – Ces galeries doivent être couvertes par une voûte plate formant plafond. – On a donné (fig. A et fig. C) les sections droites de chacune des voûtes plates ; elles ont été appareillées chacune, comme la plate bande du § 17, en se servant d'un intrados fictif répondant à un triangle équilatéral. – Le point Z où convergent les lits de la petite voûte (fig. A) est donc placé plus haut que le point Y où convergent ceux de la grande voûte (fig. C).[2]

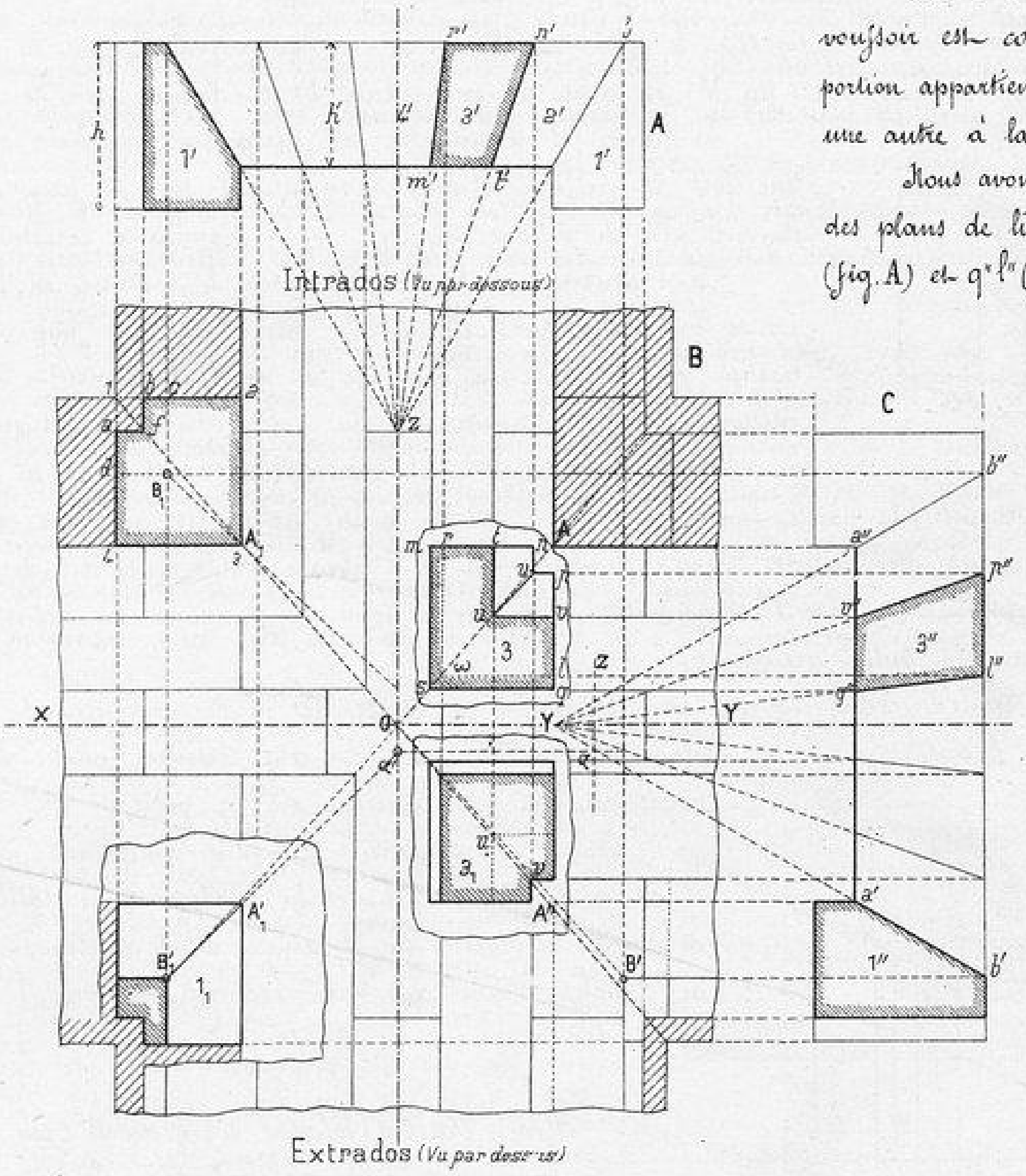
---

[1] On nomme Sommier, dans une voûte, le voussoir qui repose directement sur le piédroit.

[2] Ordinairement la grande voûte (fig. C) est appareillée en se servant du triangle équilatéral ; ce qui donne en Y le point de concours de ses lits. Quant au point de concours Z, des lits de la petite voûte, il est pris au même niveau que le point Y ; l'intrados fictif de la petite voûte ne dérive donc plus du triangle équilatéral. Cela donne des constructions plus simples.

Sur la fig. C on voit en Zα le plan horizontal dont le niveau est exactement le même que celui du point Z de la figure A. Sur le plan Zα on cherchera les traces horizontales des plans de lit de la grande voûte.

Fig. 19.



Étude d'un voussoir (3, 3', 3''). – Ce voussoir est *composé*, ce qui veut dire qu'une portion appartient à la première voûte et une autre à la seconde voûte.

Nous avons à chercher les intersections des plans de lit. Les lits de dessus m' t' (fig. A) et q'' l'' (fig. C) se recoupent suivant sw (fig. B).

De même les plans de pose ou lits de dessous, se recoupent suivant uv (fig B). Géométriquement nous avons eu à résoudre ce problème de géométrie descriptive : « Trouver l'intersection de deux plans définis chacun par leur ligne de plus grande pente. » – On sait qu'il faut les couper par deux plans horizontaux auxiliaires ; ici ces deux plans sont : 1° le plan d'intrados qui a donné comme lignes auxiliaires les lignes de lit d'intrados ; 2° le plan d'extrados situé à la hauteur h au-dessus du précédent et qui a donné comme droites auxiliaires les lignes de lit d'extrados.

L'épure (fig. B) montre en 3 le voussoir vu par dessous, et en 3_1 le voussoir symétrique, mais vu par dessus. Elle montre également un sommier. En B_1 il est vu par dessous et en B'_1, son symétrique est vu par dessus.

Fig. 20.

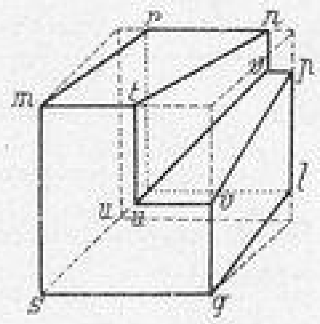
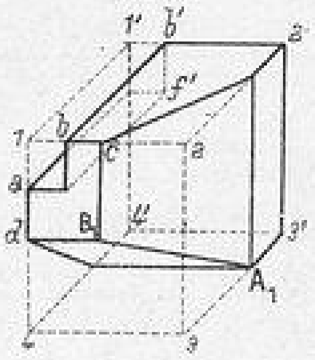


Fig. 21.



La figure 20 montre, en perspective, comment se fait la taille du voussoir N° 3. – Un parallélipipède rectangle ayant pour base le rectangle msq.... pris sur le plan sert de solide capable. Sur sa face supérieure mpn... on applique le panneau mpnt relevé sur l'épure en 3' (fig. A). – On applique de même sur sa face latérale vpl... le panneau de section droite relevé en 3'' (fig. C) et la taille se fait en se servant de l'équerre. – La fig. 21 montre en perspective le sommier B_1. – La taille se fait en suivant la même marche. – Il est inutile de la décrire.

Descentes.

13e Leçon.

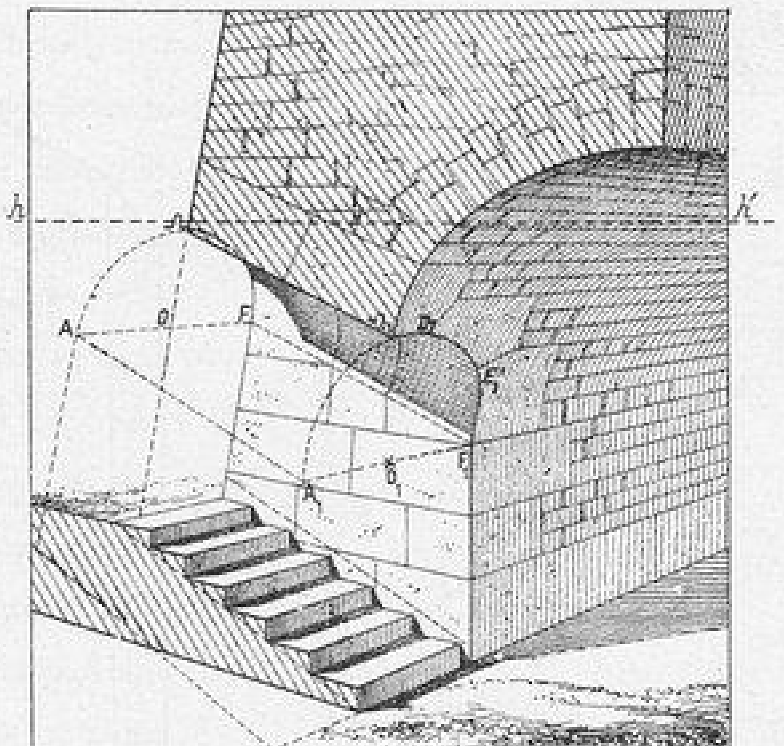
§ 19. – Définitions.

Les descentes sont des voûtes cylindriques qui servent à couvrir et, souvent aussi, à soutenir des escaliers. Par conséquent ce qui les caractérise c'est d'avoir leurs génératrices inclinées sur l'horizon. – La figure 22 montre, en perspective, une descente, assez compliquée, dont nous allons donner la définition.

1° C'est une *descente biaise*, parce que les génératrices telles que AA_1 de la descente ne sont pas perpendiculaires aux horizontales du mur de tête OA. Si elles étaient perpendiculaires la descente serait *droite*.

2° Elle est dite: dans un *mur en talus*, parce que le mur de tête OA n'est pas vertical.

Fig. 22.



3° Elle *rachète un berceau parallèle* parcequ'elle vient recouper suivant la courbe gauche, dont $A_1D_1E_1F_1$ (fig. 22) ne représente que la moitié, un berceau cylindrique.

Le berceau cylindrique est dit *parallèle*, parceque ses génératrices telles que A_1F_1 sont parallèles aux horizontales du mur de tête; autrement on dirait que le berceau est *oblique*.

On fait presque toujours en sorte que les génératrices de naissance AA_1 et FF_1 de la descente, viennent rencontrer la génératrice de naissance A_1F_1 du berceau.

Nous étudierons ce cas général, assez compliqué, dans les figures 25 et 26. Pour ne pas aborder à la fois toutes les difficultés, nous commencerons par faire l'épure dans le cas plus simple, où le mur de tête est vertical où le berceau de la figure 24 est remplacé par un mur vertical parallèle au premier; seulement nous supposerons que la descente est biaise.

A. – Descente biaise dans deux murs verticaux parallèles.

§ 20. – Données. fig. 23.

La ligne OO_1 donne en plan (fig. B) la projection horizontale de l'axe du berceau. – On prend une ligne de terre xy parallèle à cette droite, et sur le plan vertical défini par cette ligne de terre on donne (fig. C) une élévation de l'axe en $O'O'_1$. – Cette élévation est déterminée par ce fait que l'on connait l'angle α, que les génératrices du berceau doivent faire avec le plan horizontal. – Sur cette projection C, non-seulement l'axe de la descente, mais toutes ses génératrices apparaîtront en vraie grandeur.

Plus tard, lorsque nous chercherons en SS' (fig. C) une section droite du berceau,

cette section droite sera projetée sur l'élévation C toute entière suivant une droite SS' perpendiculaire aux génératrices, et elle sera très facile à rabattre.

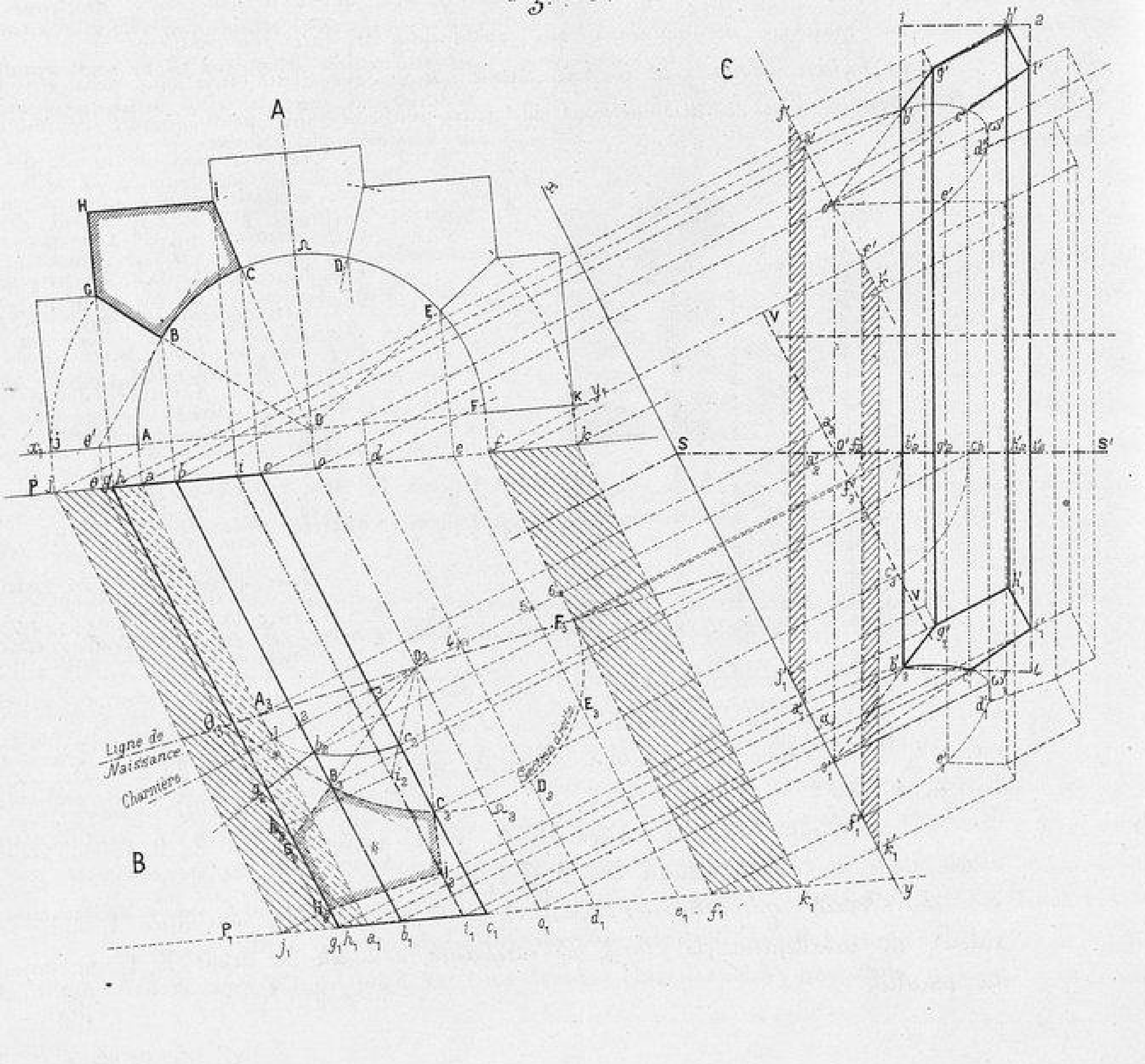
On voit donc, dès maintenant, l'intérêt qu'il y a à prendre une élévation sur le plan vertical xy.

Les deux murs verticaux que la descente réunit sont définis en P et P_1 (fig. B) par leurs traces verticales, et un second plan vertical de projection est pris en $x_1 y_1$ parallèle au mur de tête P. Sur cette élévation la tête apparaît en vraie grandeur. Nous avons pris un demi-cercle pour courbe de tête, mais il convient de remarquer dès maintenant, que si la courbe de tête est un demi-cercle, le cylindre qui constitue la descente n'est pas de révolution et sa section droite ($A_3 B_3 C_3$ ..... fig. B) sera une ellipse.

§ 21. – Epure d'ensemble et appareil (fig. 23).

(a) *Génératrices.* – Le demi-cercle de tête (fig. A) a été divisé en cinq parties égales aux points B, C, D ..... On a projeté ces points en a, b, c, d .... sur le plan (fig. B), et par report de hauteurs on a déduit (fig. C) sur l'élévation xy les projections a'b'c'.... Par ces points

Fig. 23.



on a mené parallèlement à l'axe déjà défini les génératrices et on a trouvé immédiatement en $a_1 b_1 c_1$ sur la seconde tête P_1 les extrémités de ces génératrices.

(b) *Plans de lit.* – Nous prenons ici les plans de lit passant par l'axe de la descente. Ils s'accusent, par conséquent, sur la tête (fig. A) par des droites OBG – OCI ..... qui concourent en O au point où l'axe perce le plan de tête.

On a extradossé en tas de charge suivant GHI, et la projection horizontale (fig. B et verticale (fig. C) du voussoir étudié a été facile à obtenir.

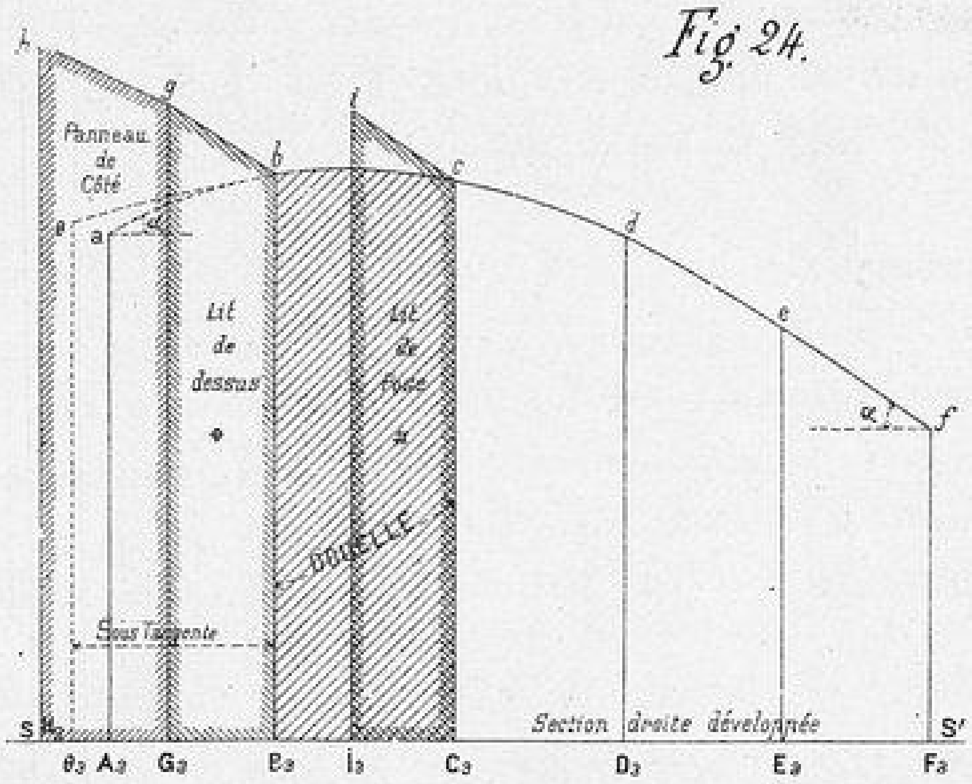
(c) *Remarque.* – Cet appareil n'est pas très bon ; en effet, dans ces conditions les plans de lit ne sont pas normaux à l'intrados et, comme le montrera tout à l'heure la section droite $A_3 B_3 C_3$.... les lignes de lit $B_3 G_3$, ou $C_3 I_3$, en section droite, ne seront pas perpendiculaires à l'ellipse ; par conséquent, les voussoirs présenteront sur les génératrices de lit des angles dièdres aigus ou obtus, qui seront fragiles. Si le biais n'est pas trop prononcé, cela n'aura pas de grands inconvénients.

§ 22. – *Préparation de la taille.*

Il nous faut établir : 1° une section droite de la descente, 2° le développement de sa douelle, 3° la vraie grandeur des panneaux qui constituent les faces du voussoir.

(a) *Section droite.* – Le voussoir étudié sera sans doute trop long pour être pris dans une seule pierre et nous le décomposerons en deux voussoirs plus petits séparés par un plan de section droite. Ce plan sera défini en SS' par sa trace verticale perpendiculaire sur l'élévation latérale (fig. C) aux génératrices et par sa trace horizontale S, perpendiculaire aussi aux génératrices, en plan ; mais cette dernière trace ne nous servira pas.

Fig. 24.



La figure C donne immédiatement en $a'_2 b'_2 c'_2$ ..... rappelés horizontalement en $b_2 c_2$ ..... les points de section droite. Mais ce qu'il importe de connaître c'est la vraie grandeur de cette section. – Pour y arriver, on la rabat sur un plan horizontal VV (fig. C) que, pour simplifier nous avons fait passer par le centre $O'O_3$. L'épure (fig. C) porte l'indication des arcs de cercle qui pourraient servir au rabattement. Mais dans la pratique, sur le chantier, on ne trace pas ces arcs ; on mesure au compas en $O'b'_2$ – $O'a'_2$ – $O'c'_2$ ...... les rayons de rotation et on les reporte en plan (fig. B) à partir de la charnière, de 1 en A_3, de 2 en B_3, de 3 en C_3, etc ...... sur les génératrices elles-mêmes.

On obtient ainsi la section droite, vraie grandeur, en $A_3 B_3 C_3$ ...... et le panneau de section droite du voussoir étudié est $B_3 C_3 I_3 H_3 G_3$.

(b) *Détails géométriques.* – Si l'on joint les points de naissance A_3 et F_3, rabattus, nous aurons, en rabattement la ligne de naissance. – Le côté de dessus $H_3 I_3$ du panneau doit lui être parallèle.

(c) *Tangente.* – La tangente en un point quelconque, B_3 par exemple, est on le sait, l'intersection du plan sécant (ici plan de section droite) et du plan tangent au cylindre.

Voici comment les appareilleurs déterminent cette intersection. Le plan tangent a pour trace sur le plan vertical de tête (fig. A) la tangente $B\theta'$ au cercle. θ' est rappelé en θ sur la figure B, et si l'on mène la ligne $\theta\theta_3$ parallèle aux génératrices, cette ligne est la trace du plan tangent, non pas sur le plan horizontal de projection, mais sur le plan des naissances[1].

Cette trace recouperait dans l'espace la ligne des naissances en un point qui appartiendrait à la tangente cherchée. Mais dans le rabattement de la section droite ce point, se déplaçant sur une perpendiculaire à la charnière, ne quittera pas la parallèle aux génératrices $\theta\theta_3$ sur laquelle il se trouve. Donc après le rabattement il sera venu en θ_3 sur la ligne de naissance rabattue et, par conséquent, la tangente au point B_3 est la droite $\theta_3 B_3$.

(d) *Remarque.* – Les plans de lit donnent comme trace, en section droite, des droites $B_3 O_3$ - $C_3 O_3$ qui convergent au centre O_3 de l'ellipse et qui, par conséquent, ne lui sont pas normales. Nous avons dit plus haut que cet appareil était défectueux; dans l'exemple qui suivra nous n'opèrerons pas de même et nous prendrons des plans de lit normaux à l'intrados.

(e) *Développement de la douelle d'intrados.* – (*fig. 24*). – Sur une droite SS' on a porté en $A_3 B_3 C_3$ ...... les longueurs rectifiées, des arcs de l'ellipse de section droite. On a mené les perpendiculaires $A_3 a$ - $B_3 b$ ...... et on leur a donné les longueurs mesurées sur l'élévation latérale (fig. 23-C). On a donc obtenu la courbe a, b, c, d, e, f, transformée du cercle de tête. On a obtenu de même les panneaux de lit, savoir en $G_3 B_3 g b$ le lit de dessus et en $I_3 C_3 i c$ le lit de pose. On a même cherché en $H_3 G_3 h g$ le panneau latéral.

§ 23. – *Taille d'un voussoir.*

On prépare, comme solide capable, un prisme dont la section droite est le panneau BCIHG, relevé (fig. 23, B) sur la section droite rabattue. On lui donne la longueur 1b' prise sur l'élévation latérale (fig. 23-C). – Après quoi, appliquant sur ses faces, les panneaux fournis par le développement (fig. 24), on limite le prisme aux lignes voulues et le plan de tête est défini par les lignes de son périmètre; il est, par conséquent, facile à tailler.

B. – *Descente biaise dans un mur en talus et rachetant un berceau horizontal parallèle.* (Le croquis perspectif a été donné fig. 22).

<u>13e Leçon (bis)</u>
(Variante)

§ 24. – *Données (fig. 25).*

(a) *Direction et inclinaison de la descente.* – Le plan est dessiné sur la fig. 25-A. OO, est la projection horizontale de l'axe de la descente.

---

(1) On se rappelle que nous avons appelé ainsi le plan incliné qui passe par les génératrices de naissance aa_1 et ff_1 de la descente. – Sur les figures B et C, ce plan de naissance est recouvert par des hachures.

Une élévation latérale (fig. D) faite sur un plan vertical dont la ligne de terre $x_2 y_2$ est parallèle à l'axe de la descente, permet comme dans le cas précédent, d'obtenir l'axe et toutes les génératrices projetées en vraie grandeur; on connaît l'inclinaison α de la descente, et par conséquent, cette élévation latérale (fig. D) donne en $0'0'_1$ la projection en vraie grandeur de cet axe, et la différence de niveau, h, entre ses deux extrémités $0'$ et $0'_1$.

(b) Le mur de tête et le grand berceau. – Pour définir le mur de tête, et le berceau que doit racheter la descente, on donne une seconde projection qui, en réalité, est une coupe faite par un mur xy (fig. C) perpendiculaire aux horizontales du mur de tête et par conséquent aussi aux génératrices du berceau, puisque ces horizontales et ces génératrices sont parallèles.(1)

On a donné cette coupe (fig. C): 1° parce qu'elle définit le mur de tête par sa ligne de plus grande pente $0'P'$ et le berceau par sa section droite $0'_1 P'_1$. – 2° parceque l'intersection de la descente et du mur de plan y sera projetée toute entière suivant la droite $0'\omega'$, de même que l'intersection de la descente et du berceau y sera projetée en entier, suivant l'arc de cercle $0'_1 \omega'_1$.

(c). Directrice de la descente et ses génératrices. – Pour directrice de la descente nous prendrons un demi-cercle idéal dont le centre serait le point $0'0$ (fig. A et C) qui serait tracé dans le plan vertical $0'Z$ (fig. C) et qui aurait pour diamètre horizontal la ligne de naissance AF (fig. A).

Pour pouvoir nous servir de ce cercle idéal, nous le rabattons (fig. B) en $AB''\Omega''E''F$. – Puis nous relevons tous ses points de division, savoir: $\Omega''\omega''$ en ω''_1 sur le plan vertical $0'Z$, (fig. C), B'' en B''_1, C'' en C''_1 et, dès lors, les génératrices de la descente peuvent être tracées en $B''_1 b'_1$ – $C''_1 c'_1$ – $\Omega''_1 \omega'_1$ sur l'élévation xy (fig. C). – On les obtient ensuite facilement en bb_1 – cc_1 etc..... sur le plan. (fig. A).

A ce moment les données sont complètement assurées et l'épure est prête pour la recherche des intersections.

§ 25. – Epure d'ensemble. – Recherche des intersections.

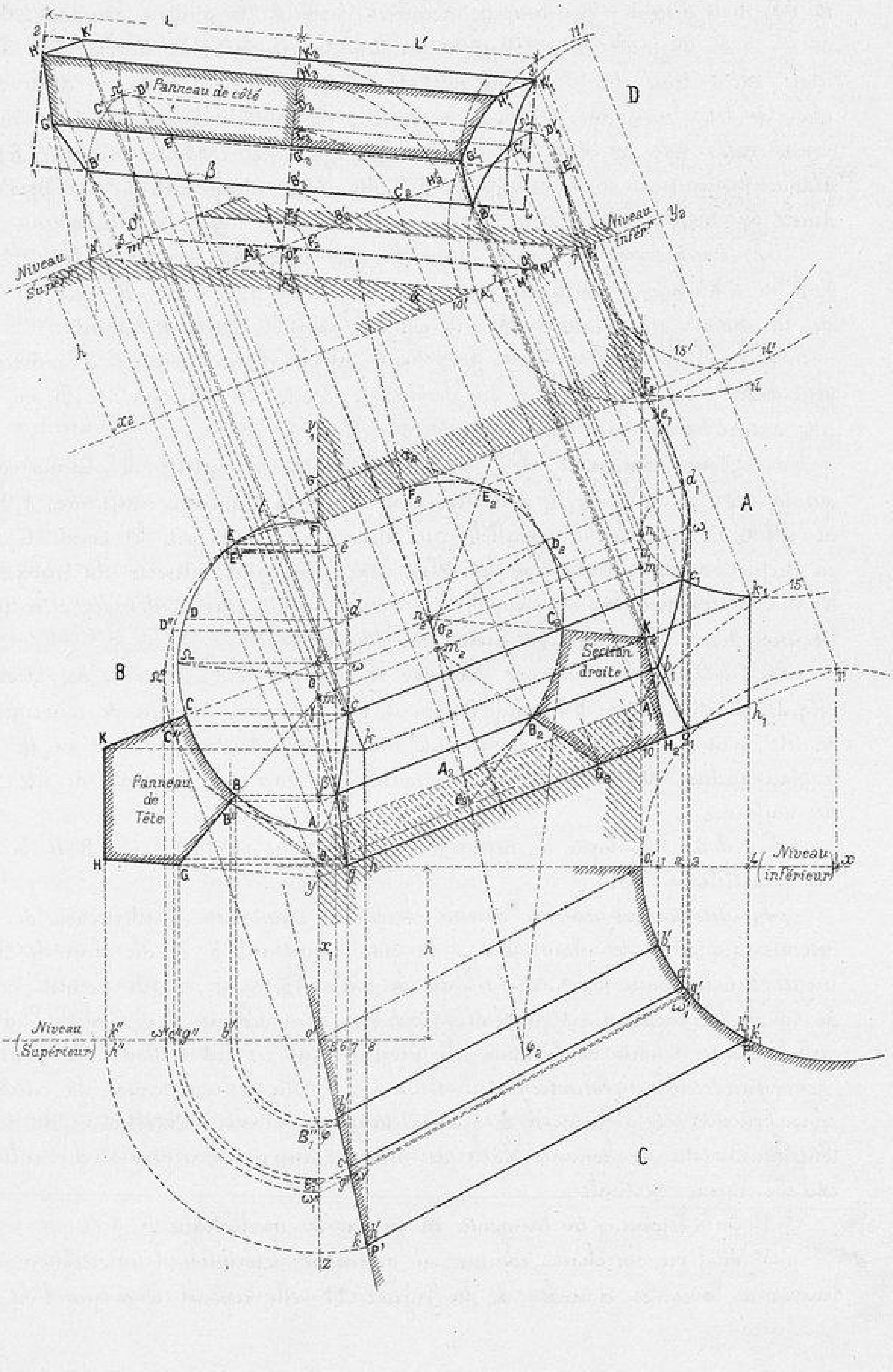
(a) Ellipse de tête. – L'intersection de la descente avec le plan de tête est projetée, à priori sur la figure C suivant les points, en ligne droite, b', c', ω'...... desquels on déduit, en plan, (fig. A) par des lignes de rappel, les points $b\ c\ \omega\ d\ e$ qui permettent: 1° de tracer la projection horizontale de l'ellipse de tête; 2° de la rabattre, vraie grandeur, en $ABC\Omega DEF$. et 3° de la projeter, par reports de hauteurs (fig. D) en $A'B'C'D'E'F'$ sur l'élévation latérale. Cela permet de tracer sur cette élévation latérale, les projections $B'B_3 B_1$ – $C'C_3 C_1$ ... etc... des génératrices, lignes de lit d'intrados.

(b) Détails géométriques. – 1° Pour faire le rabattement du point b, par exemple, en B (fig. B) on a abaissé $b\beta$ perpendiculaire sur la charnière AB et le rayon de rotation

---

(1) Si le berceau n'avait pas eu ses génératrices parallèles aux génératrices horizontales du plan, il eût fallu prendre un 3e plan vertical de projection perpendiculaire à son axe afin d'avoir l'intersection du berceau et de la descente projetée, sur ce plan vertical, en entier suivant la courbe de section droite du berceau.

Fig. 25.


Panneau de côté
D
Niveau infér.r
Niveau Supér
A
B
Section droite
Panneau de Tête
Niveau (inférieur)
Niveau (Supérieur)
C

B B a été pris au compas, de $0'$ en b' sur la figure C. — 2° La tangente Ft au point de naissance est parallèle à $O\Omega$ (fig. B) qui est le diamètre conjugué du diamètre de naissance AF. — 3° Aux points de naissance A et F, en plan (fig. B) l'ellipse A b c d F est tangente aux génératrices AA_1 et FF_1 de la descente, parceque ces dernières forment le contour apparent du cylindre de descente.

Il est facile de voir que si au lieu de prendre pour directrice de la descente le demi-cercle idéal tracé dans le plan vertical O'Z, nous avions pris un demi-cercle tracé dans le plan de tête, et ayant AF pour diamètre, le contour apparent de ce cylindre n'eût pas été constitué par ses deux génératrices de naissance. — 4° La tangente Bθ au point B se déduit facilement de la tangente B″θ au cercle idéal rabattu, en prenant comme intermédiaire le point de charnière θ, qui ne bouge pas dans le rabattement ou dans le relèvement.

(c) Section droite. — Comme dans l'épure précédente, on fait (fig. D) une section droite $O'_2 B'_3 \ldots\ldots K'_1$ que l'on rabat, vraie grandeur, en $A_2 B_2 C_2 \ldots\ldots F_2$ (fig. A). La tangente $\theta_2 B_2$ en un point quelconque s'obtient comme dans l'épure précédente.

(d) Plans de lit. — Cette fois, nous appareillerons comme il convient, et nous prendrons pour traces des plans de lit sur la section droite, les normales $G_2 B_2 m_2$ — $K_2 C_2 n_2$ .... etc... à cette section droite rabattue.

Nous dessinerons alors, en section droite, le contour de chaque voussoir en remarquant que la ligne de dessus $K_2 H_2$ doit être parallèle à la ligne de naissance $A_2 F_2$ et que la ligne de côté $G_2 H_2$, est choisie parallèle aux génératrices. Une fois les points G_2 H_2 et K_2 déterminés en section droite rabattue on les relève par l'opération inverse du rabattement, en $G'_3 H'_3$ et K'_3 sur l'élévation latérale (fig. D) et on en déduit, sur toutes les élévations et sur le plan les projections de toutes les arêtes du voussoir.

(e) Sortie des plans de lit sur le mur de tête. — Ce sont des droites telles que mbg (fig. A) rabattue en m BG (fig. B) mais qui, cette fois, au lieu de converger au centre O de l'ellipse de tête, vont passer, par prolongement, au point m, où la trace $m_2 m$ du plan de lit sur le plan incliné de naissance, va rencontrer la trace AF du plan de tête sur ce même plan de naissance.

Nota. — La ligne de dessus HK (fig. B) est parallèle à AB et la ligne de côté HG est parallèle à $O\Omega$.

(f) Intersection avec le grand berceau. — Aussi bien l'intersection de l'intrados de la descente que celles des plans de lit, du plan de dessus HK et du plan de côté HG, tout est projeté sur la coupe C, suivant l'arc de cercle $0'_1 b'_1 \ldots k'_1$, ce qui permet, par lignes de rappel, de trouver les intersections en plan (fig A) et d'en déduire par d'autres lignes de rappel que vérifieront des reports de hauteur, la projection de ces intersections sur l'élévation latérale (fig. D).

(g) Détails géométriques. — 1° En A_1 et F_1 sur les naissances la courbe présente des rebroussements. Cela tient à ce que sa tangente, étant l'intersection de deux plans tangents, tous deux verticaux, comme plans de contours apparents respectifs des cylindres en présence, est elle-même verticale.

2° On cherchera la tangente en un point quelconque b_1.

3° Si l'on cherchait, comme en géométrie descriptive, l'intersection complète on reconnaîtrait que, avec les données de la figure 25, elle répond à ce que l'on nomme un arrache-

ment. Nous avons indiqué en $A_1 - 15$, et $F_1 - 14$ l'amorce du reste de l'intersection.

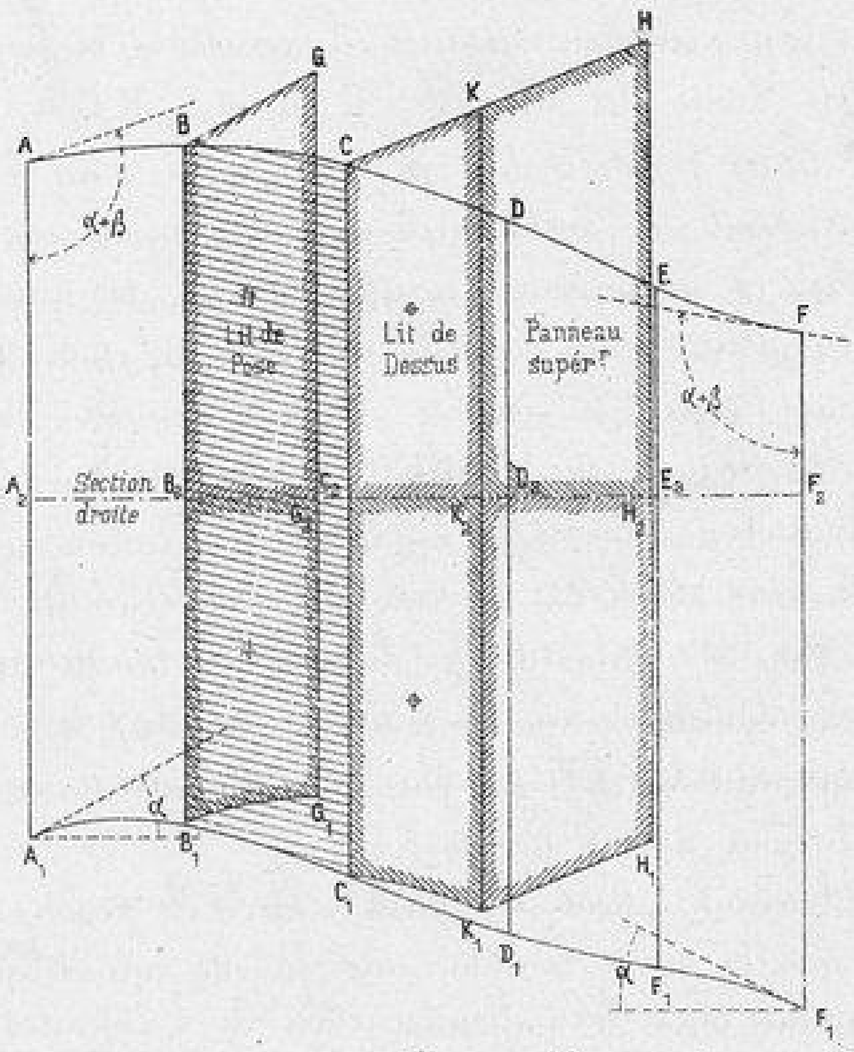
4° Le plan de lit $m_2 B_2 G_2$ donne comme intersection une ellipse qui, par prolongement irait passer par le point m'_1 et y serait tangente à la génératrice de naissance $A_1 F_1$ du grand berceau. De même le plan de lit $K_2 C_2 n_2$ donne une ellipse qui passerait par n_1.

5° Le plan de dessus $H_2 K_2$ donne comme intersection une génératrice $h_1 k_1$ du berceau.

§ 26. – Préparation de la taille. (fig. 26).

Cette préparation entraîne (fig. 26) le développement de la douelle d'intrados et le rabattement de tous les panneaux. – L'opération a été faite (fig. 26) exactement comme dans le cas précédent. On voit en $A_2 B_2 \ldots\ldots F_2$ la section droite développée suivant une droite; en A B C...... F la transformée de la courbe de tête et en $A_1 B_1 \ldots\ldots F_1$ celle de la courbe gauche, etc....

Fig. 26.



On remarquera que sur les panneaux de lit, tels que $B G B_1 G_1$, la ligne B G est droite tandis que $B_1 G_1$ est elliptique.

§ 27. – Taille d'un voussoir.

On procède comme dans le cas précédent en préparant d'abord, comme solide capable, un prisme droit dont la section droite est $B_2 C_2 K_2 \ldots$ G_2 (fig. 25-A) et dont la longueur est fournie par l'élévation latérale (fig. 25-D). Sur les faces et sur la douelle de ce prisme on applique les panneaux fournis par le développement (fig. 26), on en suit le contour avec une pointe et, dès lors, toutes les surfaces qui restent à faire apparaître dans la pierre sont limitées.

Le plan de tête apparaît facilement puisque ayant son contour arrêté, il suffit d'abattre la pierre jusqu'à ce qu'une droite puisse s'y appliquer dans n'importe quelle direction.

Quant au cylindre d'intrados du berceau $B'_1 G'_1 H'_1 \ldots\ldots C'_1$ (fig. D) on a bien son contour, mais il faut qu'une droite puisse s'appuyer sur ce contour en restant toujours parallèle à la ligne de dessus $H'_1 K'_1$ qui est une génératrice. – Sur le chantier cela se fait facilement de la manière suivante:

On place la face de dessus du prisme $H'K' - H'_1 K'_1$ (fig. D) bien horizontale, et s'aidant ensuite d'un fil à plomb, d'un niveau et d'une règle divisée il est facile de marquer sur le contour curviligne $H'_1 G'_1 B'_1$ d'une part et $K'_1 C'_1 B'_1$ de l'autre des points qui soient deux à deux au même niveau, et qu'il suffira ensuite de joindre par des lignes droites pour que le cylindre d'intrados du grand berceau soit apparu.

Voûtes cylindriques composées.

§ 28. Généralités, définitions et descriptions.

Une voûte cylindrique est dite *composée*, lorsqu'elle résulte de l'existence simultanée de deux berceaux cylindriques simples. — Les combinaisons de cylindres, qui donnent lieu à des voûtes composées, peuvent varier à l'infini. Nous n'étudierons que les cas les plus usuels, ceux dans lesquels les berceaux sont horizontaux et ont le même plan de naissance.

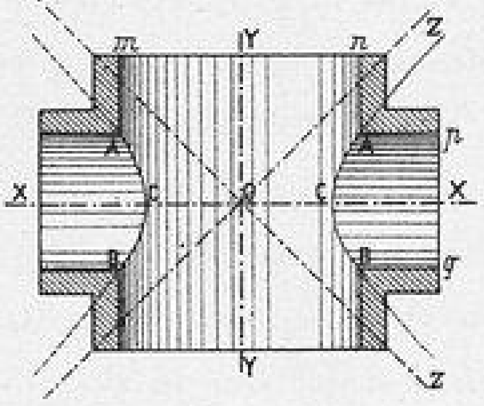
Nous allons d'abord nous rendre compte géométriquement des diverses conditions du problème.

(a) *Lunette cylindrique et voûte en bonnet de prêtre*, (fig. 27 - 28 - 29). — Un grand berceau YY plein cintre, est rencontré par un berceau plus petit XX. Le plan de naissance est commun aux deux berceaux. L'intersection se compose de deux courbes gauches ACB et ACB, qui se nomment *arêtier*, ou encore *arêtes de Lunette*.

Au point de vue géométrique c'est le problème suivant : « Intersection de deux cylindres dont les axes se rencontrent ».

Si les cylindres sont du second degré, l'intersection quoique gauche dans l'espace, se projette horizontalement suivant une courbe ou une portion de courbe du second degré d'après ce théorème que : « Lorsque deux surfaces du second degré ont un plan de symétrie commun leur intersection est projetée sur ce plan de symétrie suivant une courbe du second degré. »

Fig. 27.



Dans le cas actuel les deux courbes ACB et ACB sont des fragments d'une hyperbole équilatère qui aurait pour asymptotes les bissectrices OZ et OZ des angles formés par les axes[1].

Dans le croquis de la figure 27 la lunette est droite.

La lunette serait biaise si les axes OX et OY n'étaient pas perpendiculaires l'un sur l'autre. (Nous donnerons plus loin l'épure d'une lunette biaise).

Il n'est pas nécessaire que les berceaux soient en plein cintre. Ils peuvent être elliptiques et même à directrices quelconques. Pour que la voûte constitue une lunette cylindrique il suffit :

1° que les deux berceaux aient le même plan de naissance ;

---

[1] En effet : prenons pour axes coordonnés dans le plan horizontal les lignes OX, OY et pour axe des Z la verticale du point O.

Soient R et r les rayons des cylindres.

L'équation du grand cylindre sera :

(1) $x^2 + z^2 = R^2$, celle du petit cylindre sera :

(2) $y^2 + z^2 = r^2$.

Éliminons z entre ces deux équations nous aurons l'équation de leur intersection en projection horizontale.

L'élimination donne :

(3) $x^2 - y^2 = R^2 - r^2$, qui est bien l'équation d'une hyperbole équilatère. C.Q.F.D.

2° Qu'ils n'aient pas la même montée.

La figure 28 montre en perspective les surfaces géométriques en présence. Pour simplifier le dessin on les suppose sans épaisseur. On voit que l'on y a conservé les parties des cylindres qui sont en dehors de l'intersection. Une pareille construction pourrait couvrir une salle quadrangulaire AABB (fig. 27) en laissant libres les quatre murs du pourtour. Elle ne prendrait de points d'appui que sur les angles A, A, B, B, et la poussée des voûtes serait détruite par des éperons tels que An, ou Am (fig. 27) placés en dehors de la salle et dans le prolongement de ses murs. La poussée qu'ils ont à détruire se fait dans le sens de leur longueur et, même avec une faible épaisseur, ils équilibreront facilement cette poussée. C'est une construction assez économique.

Fig. 28.

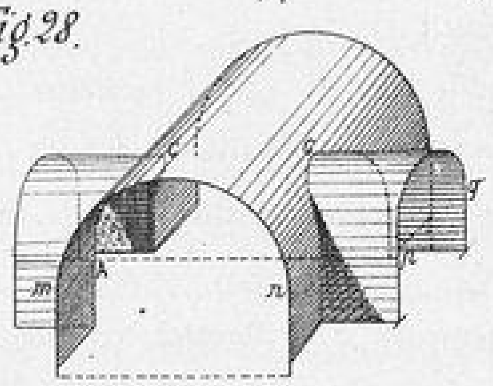
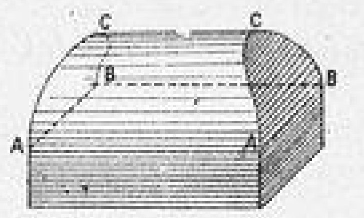


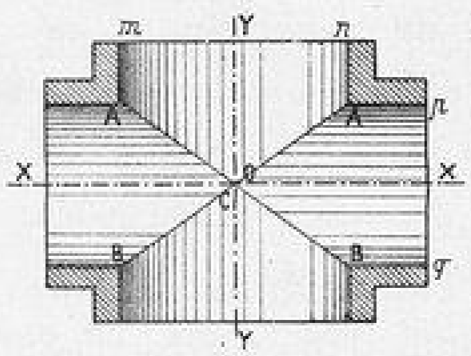
Fig. 29.



On peut (fig. 29) ne conserver que le solide commun ; la voûte est dite alors en *bonnet de prêtre*. Elle peut servir encore à couvrir une salle rectangulaire ; seulement elle prend ses points d'appui sur la totalité des murs du pourtour, lesquels demandent alors à avoir une épaisseur assez grande dans toute leur étendue car, en tous leurs points, ils ont à résister à une poussée perpendiculaire à leur direction. Il leur faudra beaucoup plus d'épaisseur que dans le cas précédent et la construction ne sera pas ainsi économique.

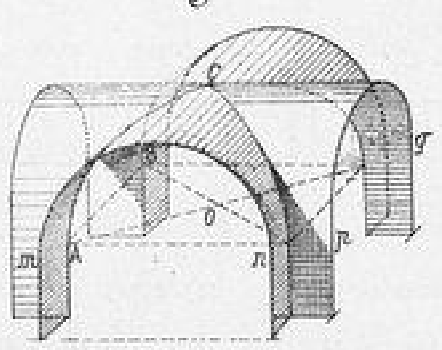
(b) *Voûte d'arête et voûte en arc de cloître* (fig. 30, 31 et 32). — Si, tout en ayant le même plan de naissance, les berceaux ont la même montée, alors les deux points les plus haut CC de l'intersection qui étaient séparés dans le cas de la lunette, (fig. 27) viennent se réunir en C (fig. 30) et les deux courbes d'intersection se rejoignent au sommet.

Fig. 30.



Si, de plus, les deux berceaux ont pour directrices des courbes du second degré, alors l'intersection se compose de deux courbes planes[1] projetées horizontalement suivant les diagonales AB et AB. — Ces courbes se nomment les *arêtes* de la voûte.

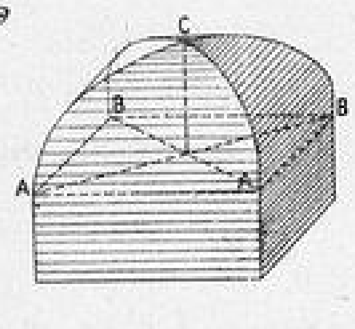
Fig. 31.



La fig. 31 montre la voûte d'arête en perspective. On n'a conservé que les portions des surfaces situées en dehors de l'intersection et, comme pour la lunette cylindrique, on voit qu'une voûte d'arête repose seulement sur les quatre angles de la salle qu'elle recouvre.

Si l'on conserve le solide commun, la voûte devient ce que l'on nomme une *voûte en arc de cloître* (fig. 32). — Comme la voûte en bonnet de prêtre, elle prend ses points d'appui sur tous les murs du pourtour de la salle qu'elle recouvre et elle y exerce en tous les points une poussée normale. Elle exige donc un grand volume de

Fig. 32

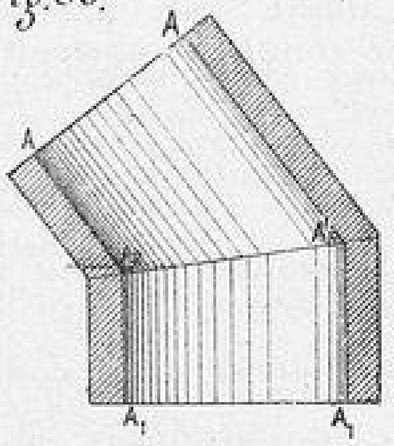


(1) D'après ce théorème : Lorsque deux surfaces du second degré ont deux plans tangents communs, elles se recoupent suivant deux courbes planes.

maçonnerie.

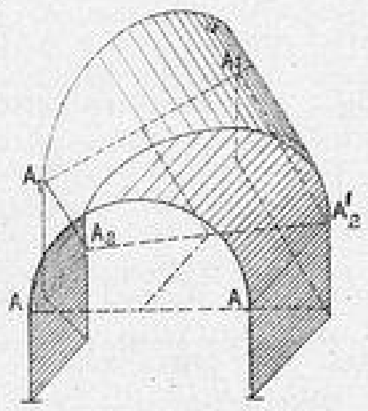
(c. *Berceaux coudés.* – En réalité les appareilleurs et les anciens constructeurs qui ont employé ces voûtes d'arête ne les ont pas imaginées par la considération des surfaces du second degré se coupant dans des conditions telles que les intersections soient planes.

Fig. 33.



Prenons (fig. 33) un berceau AA'..... plein cintre ou elliptique peu importe, et coupons-le par un plan vertical $A_2 A_2$. – Prenons maintenant la courbe plane $A_2 A'_2$ ainsi déterminée pour directrice d'un second berceau $A_1 A'_1$...... nous aurons résolu le même problème que dans la voûte d'arête ou dans la voûte en arc de cloître.

Fig. 34.



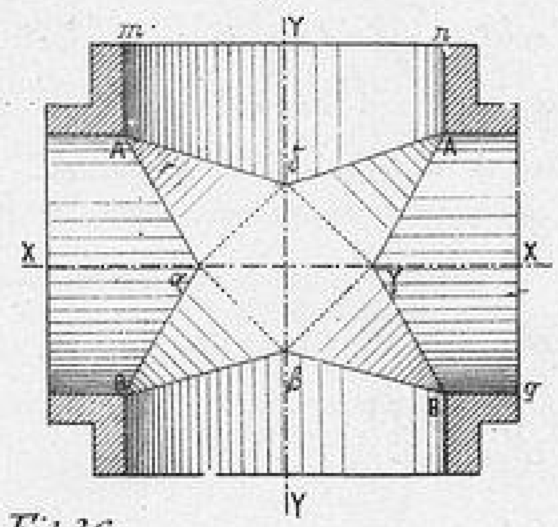
On a ainsi ce que l'on nomme un berceau coudé. On en voit (fig. 34) la perspective.

Il est facile de se rendre compte que, du côté de l'angle saillant A_2 des piedroits, l'arête sera saillante et analogue à celle d'une voûte d'arête, tandis que dans la partie rentrante A'_2, elle est analogue à celle d'une voûte en arc de cloître.

(d). *Voûte d'arête avec double arêtier, pendentifs et plafond.* (fig. 35 et 36).

On a deux berceaux dont les axes sont XX et YY. – On se donne en AB la directrice du premier berceau XX.

Fig. 35.



Sur les génératrices les plus hautes de chacun d'eux, génératrices qui sont supposées au même niveau, on prend quatre points α β γ δ, ordinairement symétriques deux à deux.

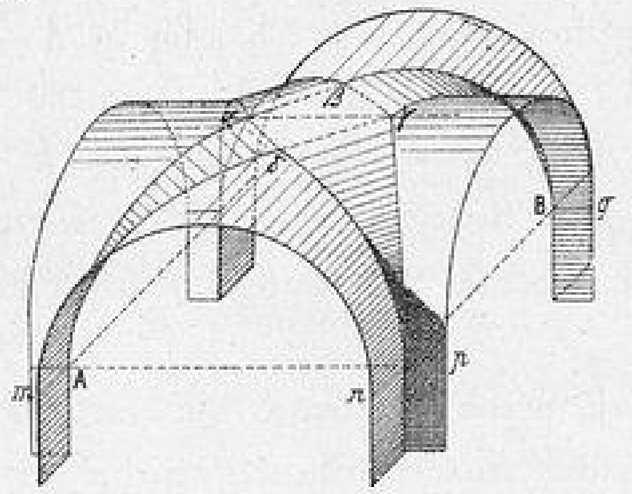
Ici la figure α β γ δ est un carré, mais elle pourrait être un quadrilatère quelconque.

On joint α A, δ A, γ A, etc.....et on prend ces droites pour traces de plans verticaux; cela posé:

Le plan α A coupe le premier berceau suivant une courbe plane, que l'on prend pour directrice d'un berceau dont les génératrices sont parallèles à α δ;

Ce second berceau est coupé, à son tour, par le plan δ A, et la courbe d'intersection est prise pour directrice du berceau YY..... et ainsi de suite.

Fig. 36.



On voit que la génération de cette voûte d'arête se déduit complètement de la considération du berceau coudé.

L'espace quadrangulaire α β γ δ est horizontal; il forme plafond et sera couvert par une voûte plate.

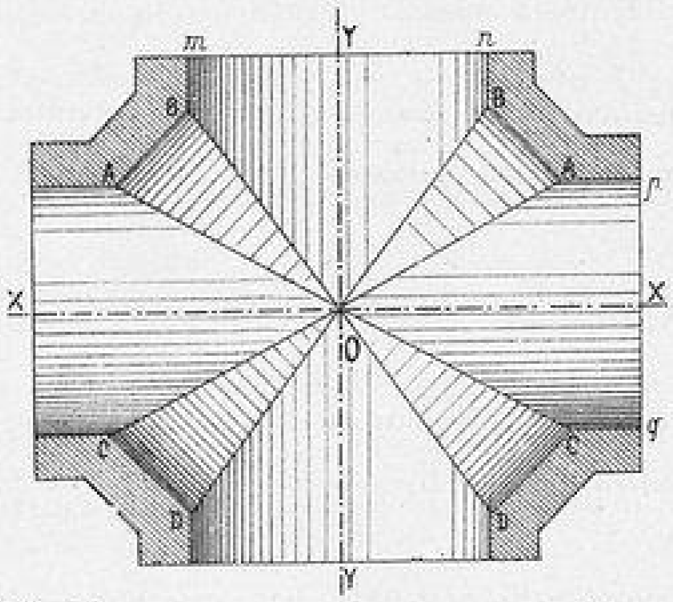
Les espaces cylindriques triangulaires α β B – α δ A etc...... dont la pointe est à la partie inférieure en A, A, B .... se nomment des *pendentifs*.

(e) *Voûte d'arête avec pans coupés.* – (fig. 37). – En plan (fig. 37) les murs qui soutiennent les berceaux sont reliés par des pans coupés AB - AB et CD - CD.

En opérant comme dans le cas précédent on pourra couper le premier berceau XX par un plan

vertical ayant OC pour trace. On prendra la section ainsi déterminée, pour directrice d'un berceau dont les génératrices seront parallèles au pan coupé CD.

Fig. 37.

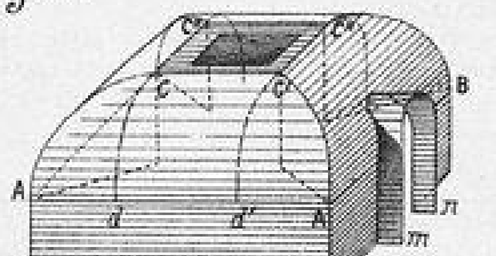


Ce second berceau sera, lui-même coupé par le plan OD et la section ainsi déterminée sera prise pour directrice du troisième berceau YY, lequel sera donc bien déterminé; en réalité il est déduit du premier berceau par des transitions successives. Nous donnerons plus loin l'épure de cette voûte.

(f) Voûte en arc de cloître avec plafond (fig. 38).

Quatre demi-cylindres, de même montée, se rencontrent suivant des courbes planes à arêtes rentrantes AC-AC'-BC"...... et laissent ainsi libre, à la partie supérieure, un espace rectangulaire qui peut à son tour être couvert par une voûte plate et même être percé par une ouverture horizontale.

Fig. 38.



Cette voûte est très employée pour couvrir des grandes salles ou des escaliers noyés dans la masse d'un édifice. Dans ce cas l'ouverture pratiquée au plafond permet de prendre un jour astral.

Les parties latérales de la voûte peuvent aussi être éclairées par des fenêtres telles que mn, qui les pénètrent en lunette cylindrique droite ou biaise.

Ces généralités sur les divers cas de pénétrations de voûtes cylindriques une fois posées nous allons faire l'épure d'un berceau coudé, puisque, ainsi que nous l'avons dit, nous trouverons pour la moitié saillante de l'arête un voussoir analogue à celui d'une voûte d'arête et pour la moitié rentrante le même voussoir que pour la voûte en arc de cloître.

Épure du berceau coudé (fig. 39).

§ 29. - Épure d'ensemble.

(a) Données. - Intrados. - L'axe du premier berceau (plein cintre) est OO_2 (fig. 39. A. Plan). - Sa courbe de tête est un demi-cercle donné sur la 1ère élévation (fig. B) en ABCD....F. - On pratique dans ce berceau une section par un plan vertical A_2F_2. L'ellipse ainsi obtenue et dont le rabattement est $A_2B_2C_2$.....F_2, obtenu par reports de hauteurs, est prise pour directrice d'un second berceau O_2O_1. - La courbe de tête de ce second berceau est une ellipse obtenue sur la 2e élévation (fig. C) en $A_1B_1C_1$.... F_1, toujours par reports de hauteurs.

(b) Extrados et lignes de lit. - On se donne pour le premier berceau un extrados fictif VPM..... qu'il est bon de prendre plus écarté de l'intrados aux naissances qu'à la clef. On mène les normales BP-CM, etc.... (fig. B) à l'intrados et le premier berceau est appareillé. On peut le limiter à l'extérieur soit par un extrados parallèle VPMG.... soit par un extrados en tas de charge tel que PNM et GHK, etc.....

Il faut, maintenant, déduire de l'extrados VPM..... de la première voûte (fig. B), l'extrados $V_1P_1M_1$.... de la seconde voûte (fig. C). - On le fera en remplissant les conditions suivantes:

1° Les points V_1 P_1 M_1 ..... seront sur les normales $B_1 P_1 - C_1 M_1$..... du 2° intrados;

2° Ils seront aux mêmes hauteurs que les points correspondants P, M etc..... du premier extrados[1].

On voit que ces conditions suffisent parfaitement, c'est pourquoi on opère de la manière suivante :

1° On mène la tangente $E\theta$ (fig. B) en un point quelconque E, par exemple, du premier intrados, et on en déduit en $\theta\theta_2$ la trace horizontale du plan tangent à cet intrados tout le long de la génératrice ee_2 ;

2° Cette trace rencontre en θ_2, la trace F_2A_2 du plan de l'arête. Par conséquent, en rabattement, $\theta_2 E_2$ est la tangente à l'ellipse d'arête.

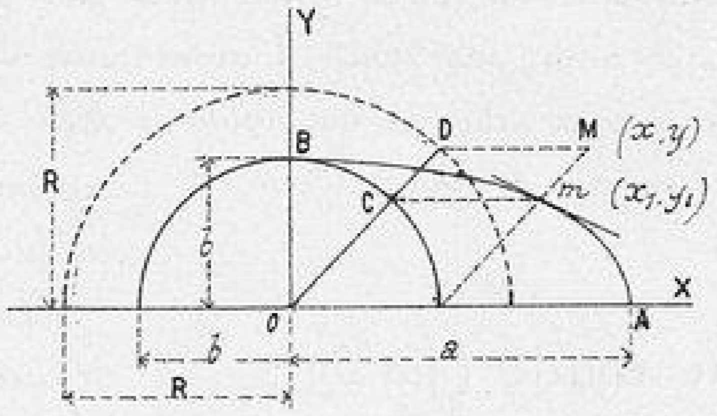
3° Donc la trace du plan tangent au second berceau tout le long de sa génératrice e_2e_1 est la droite $\theta_2\theta_1$ parallèle à l'axe du second berceau : Par conséquent $\theta_1 E_1$ est la tangente au point E_1 de la courbe d'intrados du second berceau.

On en déduit la normale E_1K_1 (fig. C) et on coupe cette normale par une horizontale située à la hauteur du point K (fig. B) de la normale au premier intrados.

Nota. – Pour ces reports de hauteurs nous nous sommes servis des deux échelles verticales Z'Z (fig. B) et $y_1 Z_1$ (fig. C).

---

(1) Il est facile, par la géométrie analytique, de déduire l'équation du 2° extrados de celle du 1er intrados. On démontrera que si le 1er extrados est un cercle, le second extrados est une ellipse.



En effet : Soit OBA une ellipse, a et b ses deux demi-axes, et m un point pris sur la courbe, x_1 et y_1 les coordonnées de ce point. On aura la relation :

$$(1) \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

On mène la normale au point m, son équation est :

$$(2) \quad y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$$

Sur la circonférence décrite sur le petit axe comme diamètre prenons le point C qui a même ordonnée que m. Menons la normale CD à ce cercle, arrêtons-la en D au cercle de rayon R, concentrique au précédent, et sur la normale à l'ellipse, prenons le point M, qui a la même ordonnée que D.

Cherchons le lieu géométrique du point M, on a évidemment la relation :

$$(3) \quad \frac{y}{y_1} = \frac{R}{b}$$

Entre les équations (1) (2) et (3) éliminons x_1 et y_1 nous aurons l'équation du lieu.

De (3) on tire (4) $\quad y_1 = \frac{by}{R}$

Substituant dans (2) cela donne :

$$y\left(\frac{R-b}{R}\right) = \frac{a^2 b y}{b^2 x_1 R}(x - x_1) \quad \text{ou en simplifiant :}$$

$$(R-b)\,b x_1 = a^2(x - x_1) \quad \text{d'où l'on tire, en faisant } a^2 - b^2 = c^2 :$$

$$(5) \quad x_1 = \frac{a^2 x}{bR + a^2 - b^2} = \frac{a^2 x}{bR + c^2}$$

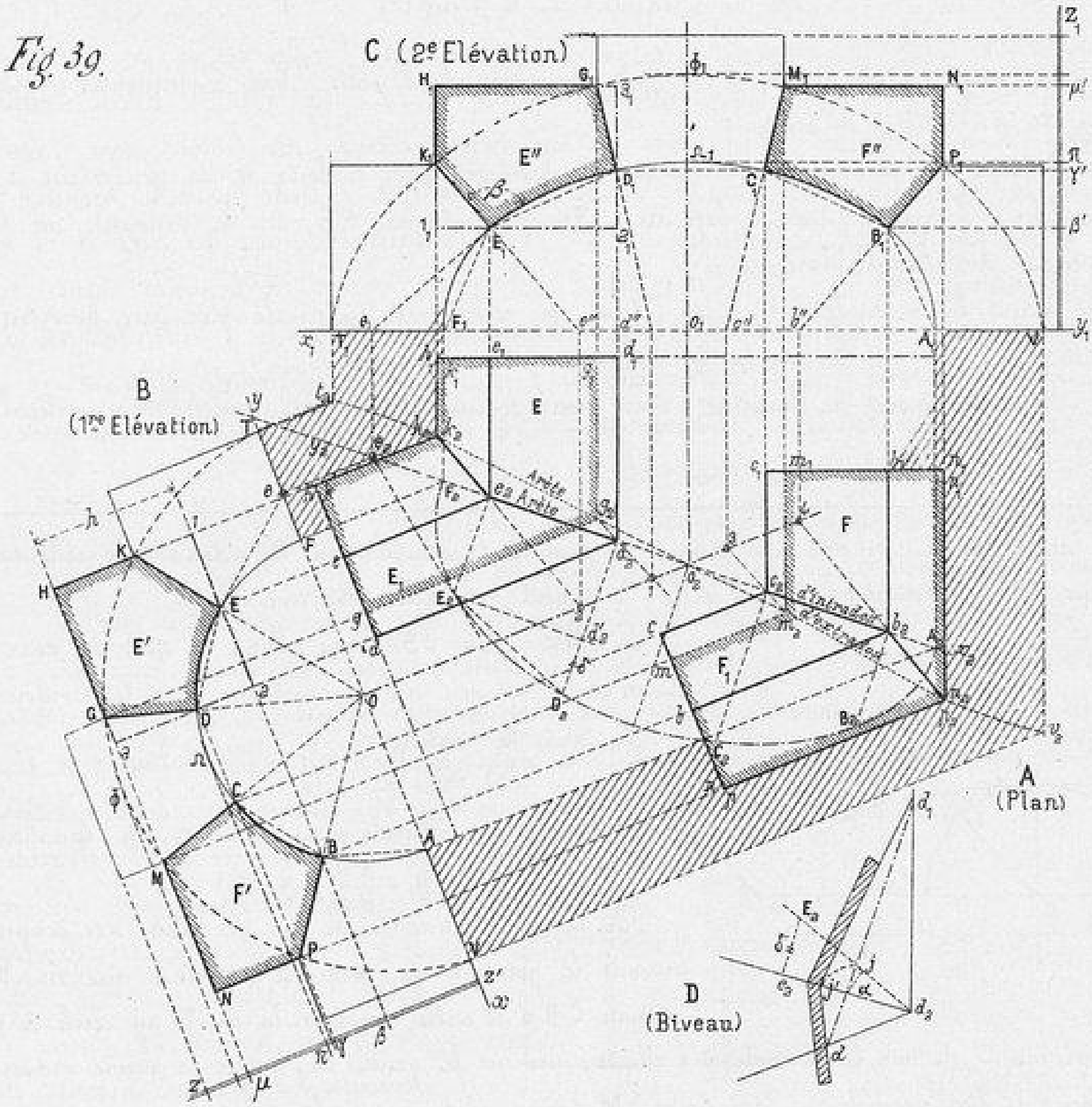
Substituant ces valeurs de x_1 et de y_1 dans (1)

$$\frac{x_2}{\left(\frac{bR+c^2}{a}\right)^2} + \frac{y_2}{R^2} = 1.$$

Ellipse dont le petit axe est égal à R, rayon du cercle d'extrados, et dont le grand axe est égal à $\frac{bR+c^2}{a}$.

(c) *Intersection des génératrices d'extrados; arête d'extrados.* – Une fois les points du second extrados déterminés en K_1 G_1 ...... on en déduit les génératrices d'extrados de la 2e voûte et comme elles sont par construction deux à deux dans les mêmes plans horizontaux que les génératrices correspondantes du premier extrados, elles les recoupent en des points k_2 g_2 m_2 n_2 .... (fig. A).

Fig. 39.



Nota. – Si les extrados étaient concentriques les points d'extrados devraient être rejoints par une courbe $k_2\, g_2 \ldots m_2$ dite : arête d'extrados.

Cette courbe, sauf dans des cas particuliers, est gauche. Sa projection horizontale n'est donc pas une ligne droite et elle ne se confond pas, en projection, avec l'arête d'intrados. Elle la croise, en apparence, au point milieu O_2.

(d) *Limitation d'un voussoir d'arête.* – Considérons le voussoir E'E'', lequel est un voussoir de voûte d'arête ; – (le voussoir symétrique F'F'' serait un voussoir de voûte en arc de cloître), nous le limiterons à des plans d h et $d_1 h_1$ .... de section droite de chacun des berceaux.

(e) *Intersection des plans de lit.* – Ces intersections sont les droites $e_2 k_2$ pour les plans de lit de dessous (ligne vue) et $d_2 g_2$ (cachée) pour le plan de lit de dessus.

Les extrémités d_2-g_2 - e_2-k_2 de ces lignes ont été trouvées par les constructions précédentes, mais on devra vérifier que $e_2 k_2$ prolongée, doit passer par le point 2 où se coupent les traces horizontales des plans de lit. De même $d_2\, g_2$ doit passer par le point 1.

A ce moment le voussoir est complètement représenté.

Nous allons indiquer comment se fait la taille.

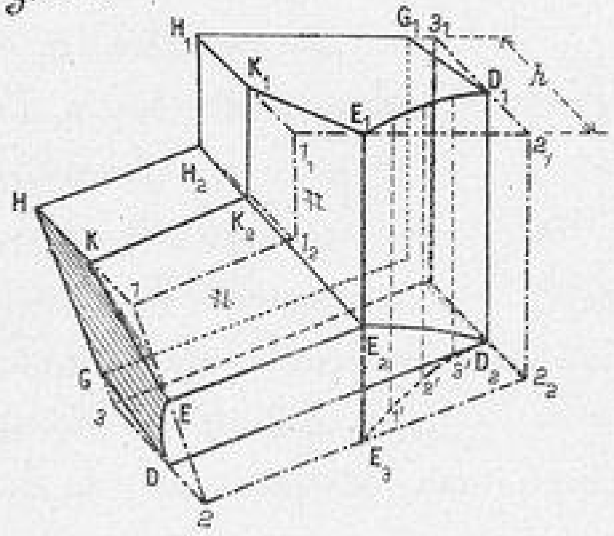
On peut employer soit la taille par équarrissement, soit la taille directe.

§. 30. –

§ 30. – Taille par équarrissement. (fig. 40, – en perspective).

Le solide capable sera un prisme dont la base (fig. 39 - A) est l'hexagone concave $d\, k\, k_2 k_1 d_1 d_2$ relevée sur le plan et dont la hauteur (h) est prise sur une quelconque des élévations (voir fig. B). – On voit (fig. 41) en perspective ce prisme figuré en 1 2 1, 2, etc.... – Sur chacune de ses faces d'extrémités on applique les panneaux de section droite des berceaux savoir E' (fig. B) et E'' (fig. C).

Fig. 40.



En se servant de l'équerre et se guidant sur les contours $H_1 G_1 D_1$ etc... (fig. 40) on abat tout ce qui appartient à l'un des berceaux, au second par exemple.

On fait de même ensuite pour le premier berceau. Seulement, il faut remarquer que, du côté de l'arête $E_2 D_2$ d'intrados on peut opérer à la volée, sans crainte d'entamer la pierre, tandis que du côté de l'intrados en là où les surfaces se rencontrent avec angle rentrant il faut opérer doucement, et présenter souvent les panneaux afin de ne pas dépasser la partie strictement nécessaire.

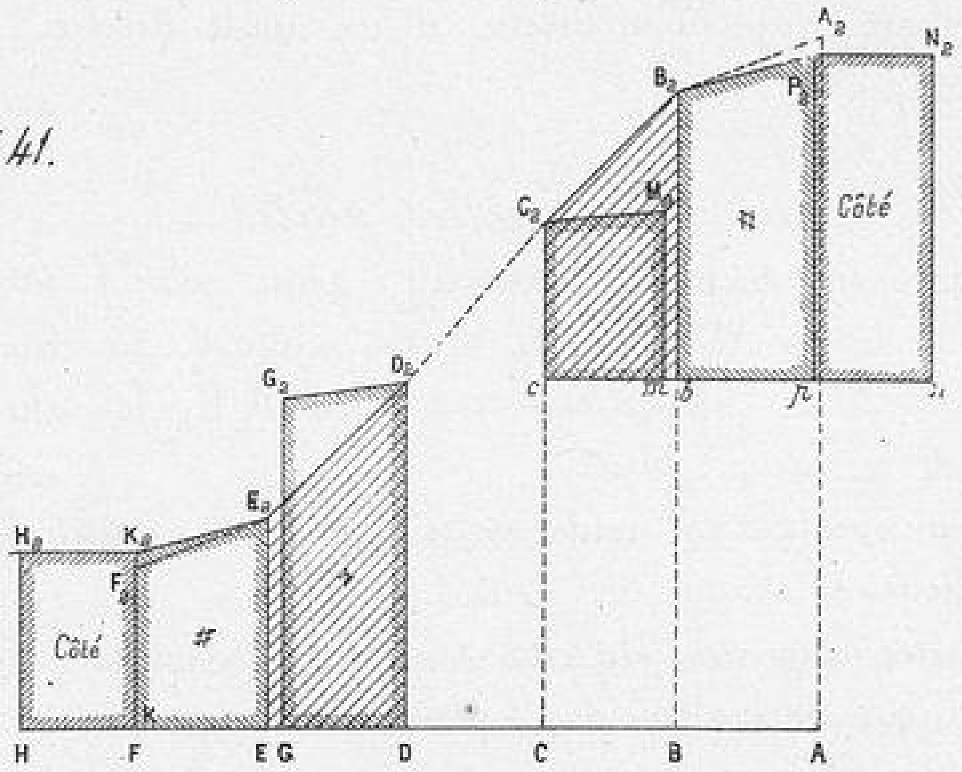
Nous n'insistons pas sur ce procédé de taille.

§ 31. – Taille directe.

(a) *Douelles plates.* – 1° On substitue aux douelles courbes des deux berceaux, des douelles plates accusées sur l'épure par les cordes des arcs, savoir: corde DE (fig. B), corde $E_1 D_1$ (fig. C). Les deux douelles plates se recoupent suivant la corde $E_2 D_2$ (fig. A) rabattue avec l'ellipse d'arête.

Ainsi donc cela revient à substituer aux deux berceaux cylindriques, deux berceaux prismatiques inscrits.

Fig. 41.



2° On cherche les développements des douelles plates.

La figure 41 donne le développement du prisme inscrit dans le berceau plein cintre et la figure 42 donne celui du second prisme.

On remarquera que nous avons en $A_2 B_2 C_2$ .... etc. sur chaque développement un polygone au lieu d'une courbe et que sur les deux figures 40 et 41 les lignes $A_2 B_2$ - $B_2 C_2$ .... etc. doivent être égales deux à deux comme étant les vraies grandeurs de mêmes lignes droites de l'espace.

(b) *Panneaux.* – On cherche, comme à l'ordinaire, les panneaux de lit et même les panneaux de côté.

(c) *Exécution de la taille directe.* – 1° On prendra une pierre, telle qu'elle est fournie par la carrière, et d'un volume suffisant pour contenir le voussoir.

2° On dressera en $E_1 D_1 E_2 D_2$ (fig. 43, en perspective) un plan et on y appliquera le panneau de douelle plate du premier prisme pris sur la figure 40. Avec une pointe traçante on en suivra le contour $E_1 D_1 E_2 D_2$.

3° La ligne $E_2 D_2$ est l'arête du dièdre formé par les 2 douelles plates.

On mesurera ce dièdre (nous indiquerons tout à l'heure comment); on fera un biveau W, à la grandeur du rectiligne de ce dièdre et appuyant son sommet W sur l'arête $E_2 D_2$, on fera apparaître le plan, indéfini, $E_2 D_2 E D$ de la seconde douelle plate.

Fig. 42.

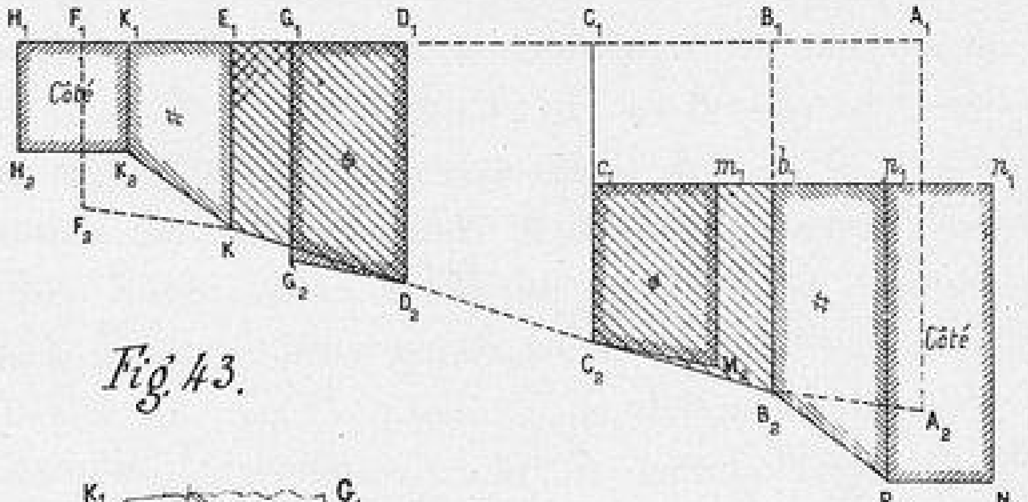
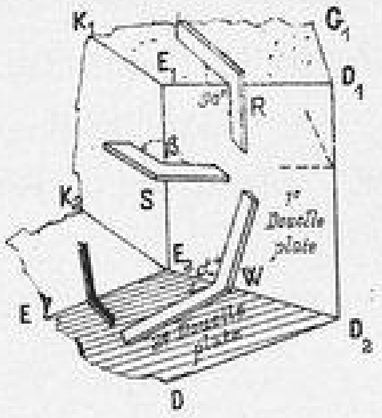


Fig. 43.



4° Sur ce plan on appliquera le panneau de la 2e douelle plate, pris sur la figure 42, et avec une pointe, on en suivra le contour.

5° En continuant de même, à l'aide de biveaux soit droits, aigus, soit obtus, fournis par l'épure, on fera apparaître successivement toutes les faces du voussoir.

L'extrados, dans cette méthode, est ordinairement grossièrement équarri.

Les douelles cylindriques s'obtiennent en dernier lieu en se servant d'une cerce. Souvent même on les taille sur le tas, une fois la voûte montée.

On voit que cette méthode exige la recherche d'un angle dièdre. C'est par elle que nous terminerons cette étude.

§ 32. – Recherche du biveau des douelles plates.

C'est un problème de géométrie descriptive ordinaire, dont voici l'énoncé : (voir fig. 39. A). Connaissant : 1° en $d d_2$ et $d_2 d_1$ des horizontales, de même niveau, de deux plans ; 2° en $d_2 e_2$ la projection horizontale de leur intersection, et 3° en $D_2 E_2$ le rabattement de cette intersection. Trouver l'angle de ces deux plans.

Pour rendre la figure plus claire nous avons transporté toutes les lignes parallèlement à elles-mêmes en D.

Les horizontales de même niveau (fig. D) sont $d d_2$ et $d_2 d_1$. – L'intersection est projetée en $d_2 e_2$ et la fig. A fait connaître la hauteur δ du point e_2 au-dessus de d_2.

On a donc rabattu e_2 en E_2, ce qui donne en $d_2 E_2$ le rabattement de l'intersection des deux plans.

On a pris en $d d_1$ (ponctuée) la trace d'un plan perpendiculaire à l'arête du dièdre.

On a abaissé αJ perpendiculaire sur le rabattement $d_2 E_2$ et le point J rabattu en J' autour de α comme centre a donné en $d J' d_1$ le rectiligne cherché.

Nota. – Les mêmes figures 39, 41 et 42 donnent l'épure et les développements relatifs au voussoir de droite FF_1, lequel est un claveau de voûte en arc de cloître.

833 – Voûte d'arêtes sur plan barlong (fig. 44).

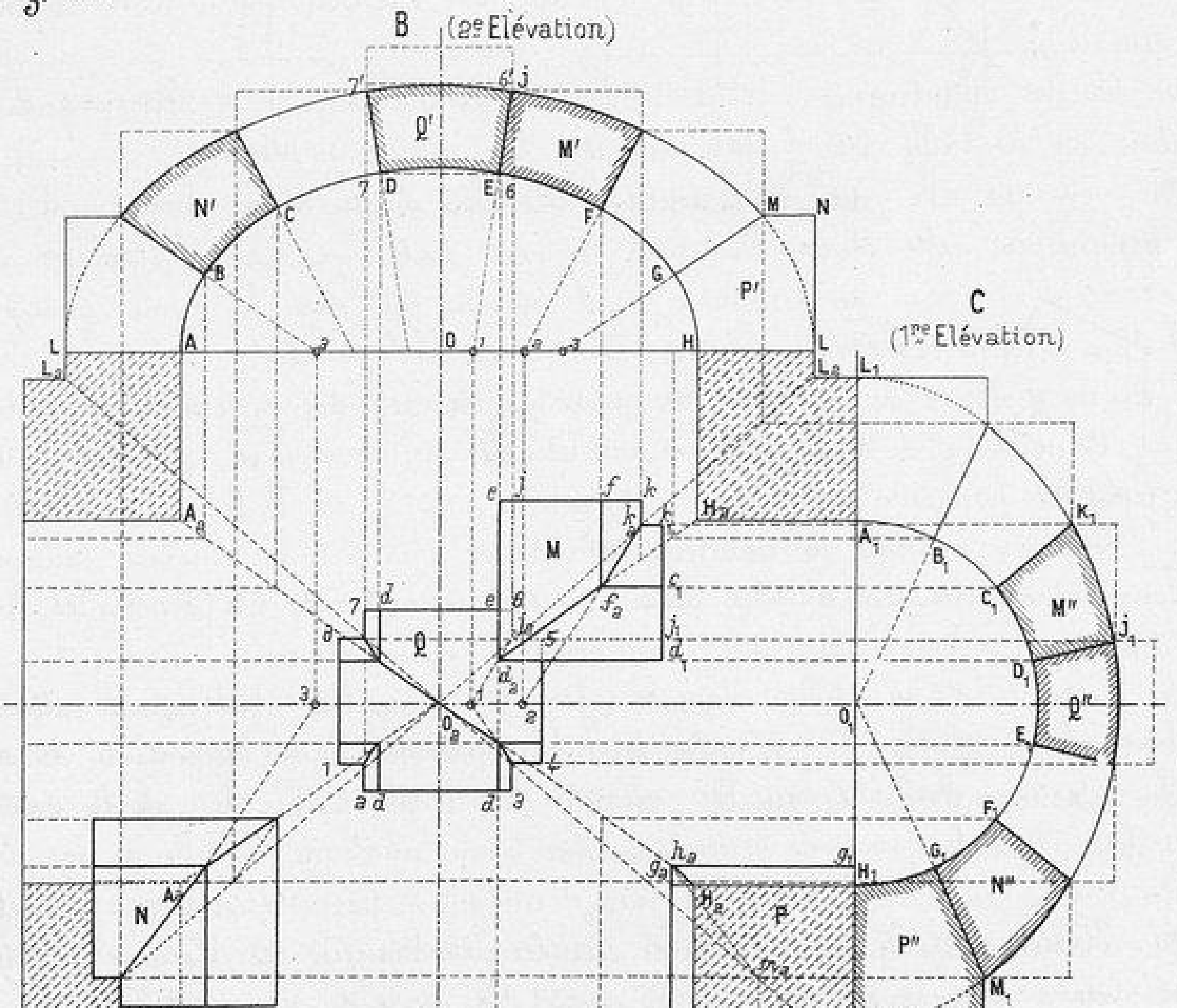
(a) Constitution des voûtes. – Les axes des deux berceaux sont OO_2 et O_2O_1 ; ils sont à angle droit l'un sur l'autre. – Le premier berceau (fig. C) est plein cintre. Il est extradossé parallèlement suivant la courbe $L_1K_1M_1$.

Pour avoir la courbe de tête du second cylindre, on coupe le premier par le plan diagonal A_2H_2 A_2H_2 et en retournant les génératrices sur le plan de l'arête, on obtient la directrice ABCDE ...... du second berceau. C'est une ellipse de même montée que le cercle.

La courbe d'extrados LKJL du 2e berceau, s'obtient, comme dans l'épure du berceau coudé, en menant les normales aux divers points BCD...... G, du 2e intrados et les arrêtant en J, K ..... aux mêmes hauteurs que celles où ont été limitées, en $J_1K_1M_1$, les normales correspondantes du berceau plein cintre.

(b) Intersection des grandes surfaces en présence. – Les intrados se coupent suivant les arêtes A_2H_2 et A_2H_2, qui sont projetées en ligne droite sur la projection horizontale, mais qui, en réalité, sont des ellipses dans l'espace. Quant aux extrados, ils se recoupent suivant deux courbes u_2m_2 et u_2m_2 que nous nommerons les arêtes d'extrados, et dont les points tels que j_2k_2 m_2u_2 sont aux croisements des génératrices qui forment les lignes de lit d'extrados, lesquelles génératrices sont, par construction, deux à deux dans les mêmes plans horizontaux.

Fig. 44.



Les arêtes d'extrados sont gauches et, en plan (fig. A) elles ne se projettent pas suivant des lignes droites.

Par exception, si les données étaient telles que les deux extrados (dont l'un, on l'a vu, est une conséquence de l'autre) fussent deux ellipses, ou une ellipse et un cercle, alors les arêtes d'extrados seraient aussi des courbes planes.

(c) Epure. – L'épure s'achève exactement comme celle du berceau coudé. – On cherche les intersections des plans de lit, telles

que les lignes $f_2\,k_2$ et $d_2\,j_2$ du voussoir M.

La clef Q est figurée en perspective sur la figure 45. On voit comment elle se déduit d'un solide capable en forme de croix, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Fig. 46.

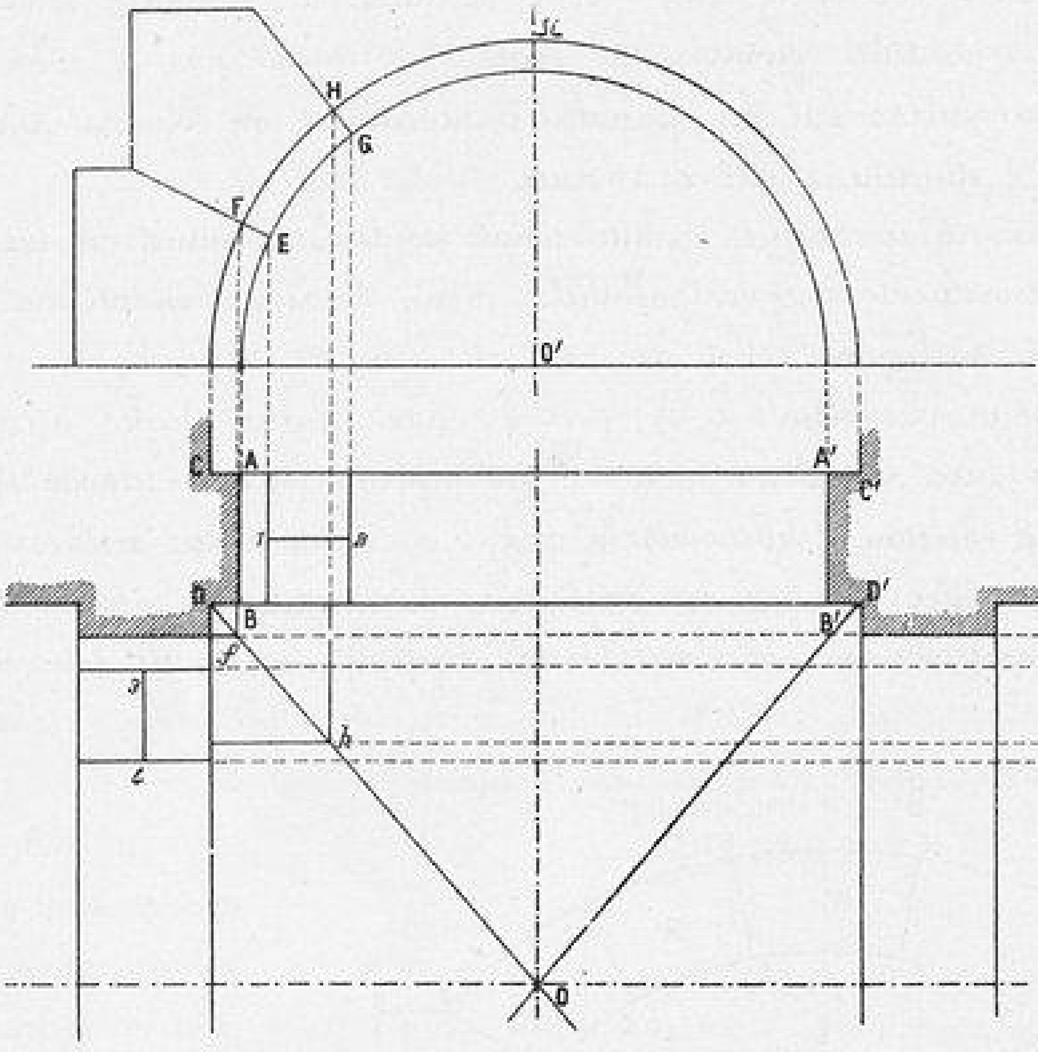
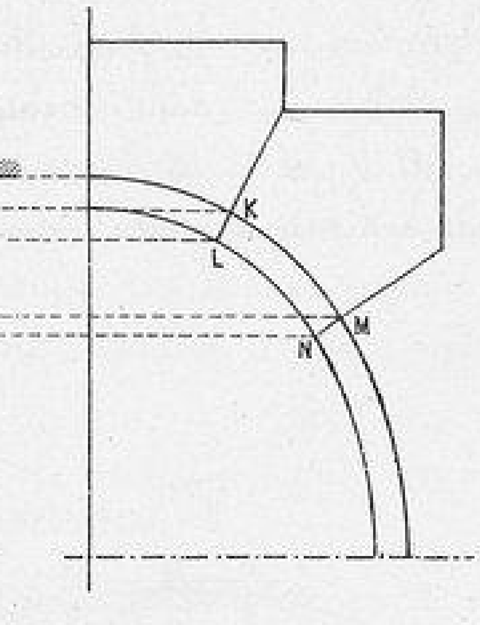
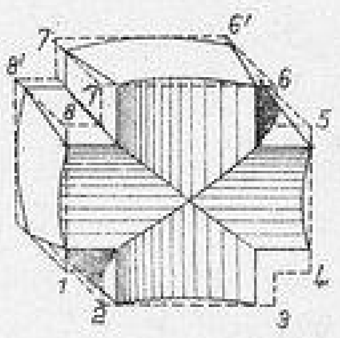



Fig. 45.



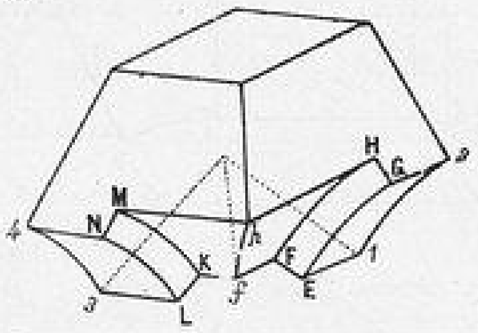
§ 34 - Voûte d'arêtes avec arcs doubleaux (fig. 46).

Les doubleaux sont des petits cylindres tels que AB - A'B', qui font saillie sur le corps de la voûte. Dans les premières constructions où ils ont été employés ils constituaient de véritables cintres permanents. La voûte proprement dite était soutenue par eux et en était indépendante.

Plus tard les arcs doubleaux ont été employés dans un but de décoration et ils ont été pris dans les mêmes pierres que celles de la voûte.

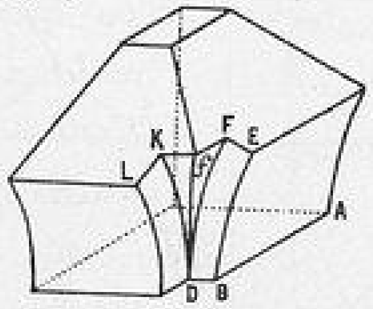
Près des naissances les voussoirs de l'arête s'étendent, en même temps, sur les arcs doubleaux, comme le montrent, en perspective, les figures 47 et 48.

Fig. 48.



Chaque voussoir présente (fig. 47) une surface saillante t K f F qui vient s'emboiter dans une surface rentrante t K f F (fig. 48). Les joints sont croisés sur l'arc doubleau même, comme l'indiquent les lignes 1,2 et 3,4. Quelquefois (fig. 49) les piédroits présentent une arête saillante C et C' entre les deux bandeaux qui supportent les arcs doubleaux. Sur cette arête des piédroits vient aboutir l'arête de la voûte et tous les voussoirs présentent une forme analogue à celle de la figure 48.

Fig. 47.

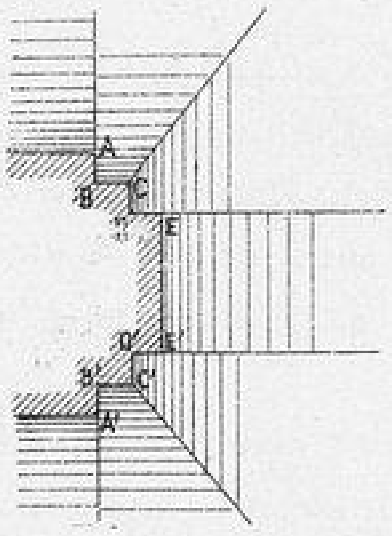


§ 35 - Voûtes d'arête, avec double arêtier, pendentifs et plafond (fig. 50).

Nous avons donné plus haut (fig. 35 et 36), le mode de génération de cette voûte. En voici l'épure :

(a) Berceaux principaux. – Les deux intrados des berceaux principaux sont donnés en C et en B. L'un est un demi-cercle, et l'autre une demi-ellipse de même montée que le demi-cercle. Chaque voûte est appareillée par les normales D_1E_1 – C_1F_1 sur la 1ère élévation (C) et DE – CF, sur la 2e voûte. A l'extrados les normales sont limitées aux mêmes hauteurs sur chaque voûte.

Fig. 49.



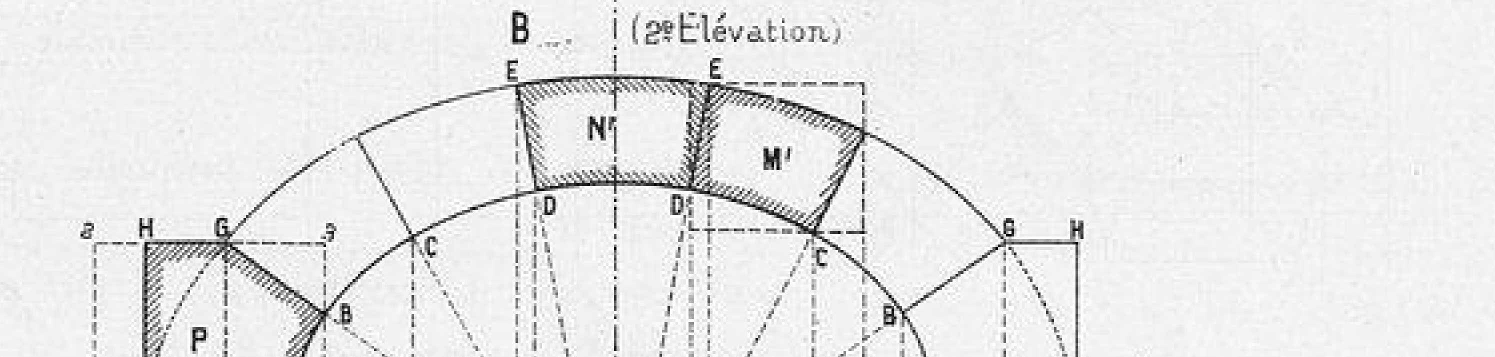
(b) Pendentifs. – Sur les génératrices supérieures on a pris quatre points α β, γ et δ, symétriques deux à deux.

Sur la figure 50, ces quatre points sont les sommets d'un carré, mais ils pourraient être les sommets d'un losange ou même d'un quadrilatère quelconque.

On joint les points α, β, γ et δ aux quatre angles a, a_1 ...... des piédroits par des plans verticaux qui déterminent des sections elliptiques dans chaque berceau. Les points b_2 c_2 d_2 ...... d'un de ces arêtiers βa, sont joints aux points b_3 c_3 d_3 ..... de l'autre arêtier γa_1 par des génératrices horizontales.

Nous avons donc quatre cylindres, savoir : les deux berceaux principaux et les deux cylindres

Fig. 50.



qui recouvrent des pendentifs $Ba_1\gamma$ - $Ba_2\alpha$, etc...... Au centre se trouve un espace carré $\alpha\beta\gamma\delta$ qui restera horizontal et formera plafond mais qui pourrait, à la rigueur, être percé par une ouverture.

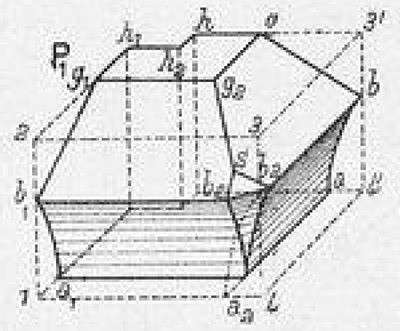
On donne, en plus des sections droites B et C des deux berceaux principaux, une section droite (fig. D) du pendentif, c'est-à-dire une projection du pendentif sur un mur $x_2 y_2$ perpendiculaire à ses génératrices.

Cette section droite se compose donc (fig. D) de deux quarts d'ellipse $A_4 D_4 \alpha'$ et $A_4 D_4 \gamma'$ réunis par une partie droite $\alpha'\gamma'$. On ne peut pas l'appareiller normalement car la partie plate $\alpha'\beta'$, serait formée de voussoirs qui tomberaient. Mais alors nous faisons passer un cercle fictif $A_4\alpha'\gamma'A_4$ par les points de naissance $A_4 A_4$ et par les sommets α' et γ' du plafond et les lits sont formés par des plans tels que $D_4 E_4$ - $M_4 N_4$ etc.... qui convergent au centre, θ, de cet arc de cercle.

Les points d'extrados E_4 N_4 F_4 ..... des pendentifs sont pris, sur les normales à ce cercle fictif, aux mêmes hauteurs que les points d'extrados correspondants des berceaux principaux.

Dès lors toutes les intersections des plans de lit s'obtiennent comme dans les épures précédentes.

Fig. 51.



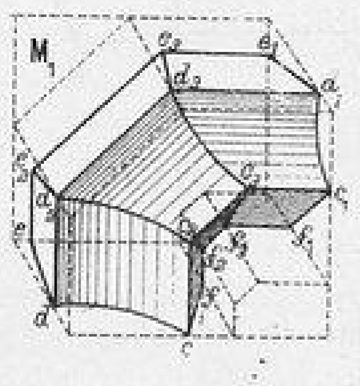
Il est inutile d'insister; la clef Q aura comme dans toute voûte plate composée la forme d'un tronc de pyramide.

La figure 51 montre en perspective cavalière le sommier P de la figure 50.

La figure 52 donne la perspective cavalière du 3e voussoir MM' de la figure 50.

Sur chacune de ces perspectives on voit, figuré en pointillé le solide capable; les panneaux de joint tels que h g b a ..... (fig. 51), ou bien $e_1 d_1 e_1 f_1$..... (fig. 52) sont appliqués sur les faces voulues du solide capable et, en se servant de l'équerre comme biveau, on fait apparaître les plans de lit et même les cylindres.

Fig. 52.



On limite les plans de lit, surtout dans les angles rentrants où il serait dangereux d'aller trop loin, en se servant de panneaux de lit qui auront dû être cherchés, mais que notre épure n'indique pas; on limite les douelles cylindriques à l'aide de cartons flexibles taillés sur ces douelles développées. C'est ainsi (fig. 52) que les arcs d'ellipse $c_2 d_2$ et $c_3 d_3$ ont été obtenus; ce qui permet, en les prenant à leur tour pour directrices, d'obtenir en $c_2 d_2 c_3 d_3$ la douelle cylindrique du pendentif.

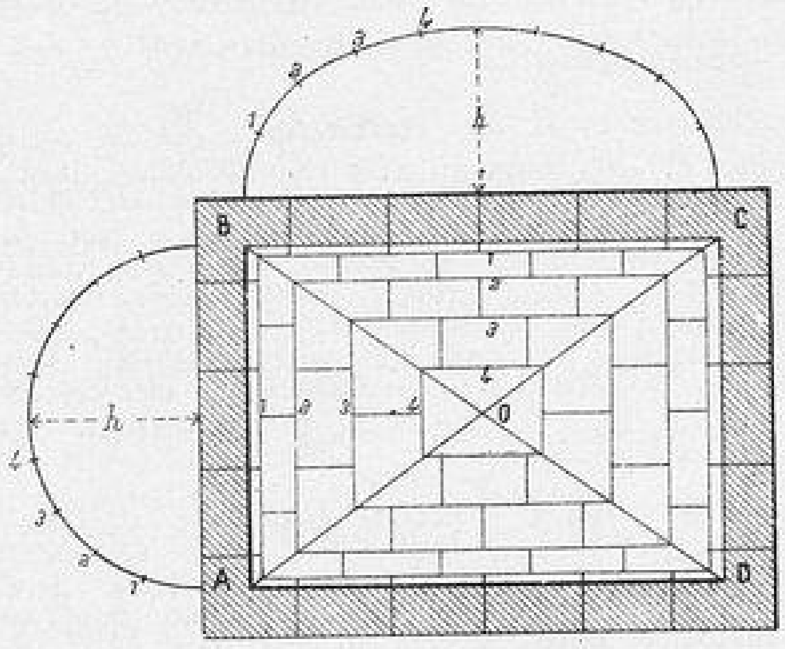
De même le plan de lit $e_2 d_2$ - $e_3 d_3$ du pendentif a été obtenu en appliquant sur les deux plans de lit des berceaux principaux, obtenus à l'équerre, les panneaux de lit $e_1 d_1 e_3 d_3$ et $e d e_2 d_2$.

Mota. - La voûte indiquée à la figure 37, sous le nom de *voûte d'arête avec pans coupés* se traiterait exactement de la même manière. Son analogie avec le berceau coudé est plus frappante encore que pour la voûte que nous venons d'étudier.

§ 36. -

§ 36. – Voûtes en arc de cloître.

Fig. 53.

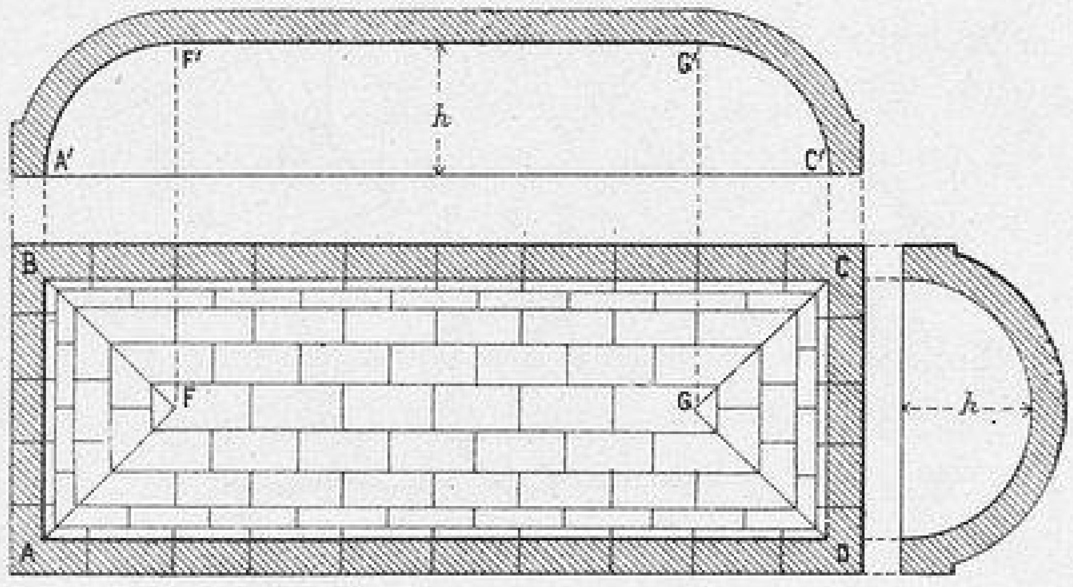


La voûte en arc de cloître (fig. 53) est formée de deux berceaux, de même montée, dans lesquels on a conservé les portions de génératrices que l'on supprime dans la voûte d'arêtes.

Il résulte de cette combinaison que l'intrados offre deux arêtes rentrantes AC et BD. – Nous avons fait remarquer plus haut que la voûte en arc de cloître demandait à être soutenue et contrebutée sur tout le périmètre de la salle qu'elle recouvre.

La division des intrados se fait comme pour la voûte d'arêtes et les lits normaux de l'un des berceaux se déduisent également des lits normaux de l'autre par des reports de hauteurs.

Fig. 54.



Quelquefois (fig. 54) les arêtes ne se rejoignent pas au centre; cette disposition est souvent adoptée pour les salles longues. A chaque extrémité il y a deux arêtes CG, DG et BF, AF qui ne se prolongent pas au-delà de leur intersection et l'intervalle est couvert par un seul berceau.

Enfin, nous avons indiqué plus haut (fig. 38) la disposition de la voûte en arc de cloître avec plafond soit fermé, soit ouvert.

Lunette cylindrique biaise.

§ 37. – Epure d'ensemble.

On a vu (fig. 27) que la lunette cylindrique résultait de la pénétration de deux berceaux ayant même plan de naissance mais des montées différentes. – Celle que nous étudierons est biaise parceque les génératrices ne sont pas perpendiculaires les unes sur les autres.

(a) Données. – (fig. 55). Le plan (fig. A) indique en Yoy_1 l'axe du grand berceau, plein cintre, et en OO_1X celui du petit berceau, également plein cintre. Les sections droites sont données pour le grand berceau sur la figure C, et pour le petit berceau, sur la figure B.

(b) Appareil. – L'intrados du petit berceau (fig. B) a été divisé en sept parties égales et celui du grand berceau (fig. C) en neuf parties égales.

Nota. – Il faut avoir soin que le premier point de division N'' (fig. C) du grand berceau se trouve à un niveau légèrement supérieur à celui du premier point B' (fig. B)

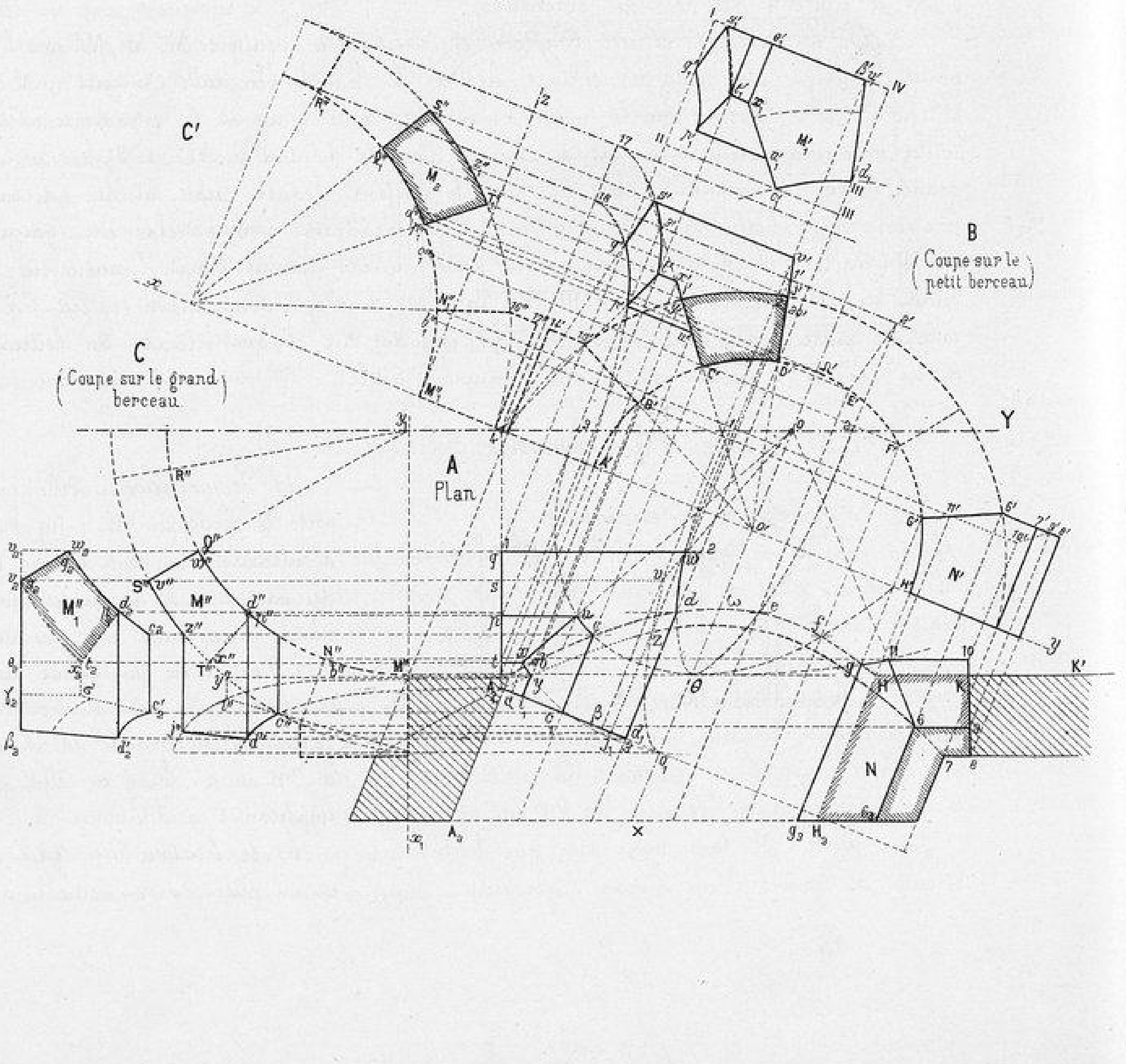
du petit berceau. S'il en est ainsi les autres points de division du grand berceau seront, a fortiori, et de plus en plus, au-dessus de ceux du petit berceau.

Pour chaque voûte les plans de lit sont normaux aux intrados et contiennent par conséquent l'axe. - Nous avons extradossé parallèlement.

(c) Intersection des surfaces en présence. - 1° *Les intrados.* - Ils se coupent suivant la courbe gauche A b d ω f g H qui, en plan, est un arc d'hyperbole. Pour en obtenir un point, tel que c C', on coupe par un plan horizontal auxiliaire passant par une génératrice du petit berceau. Ce plan donne, dans le grand cylindre, une génératrice auxiliaire, projetée en C'' sur la coupe (fig. C) et obtenue par un report de hauteur. - L'intersection des deux génératrices donne le point c (fig. A).

Nota. - Sur les chantiers on reproduit (fig. C') sur le plan de section droite du petit berceau, la coupe de l'autre cylindre. Sur cette coupe (fig. C') la génératrice auxiliaire est projetée en c_1''. - Dès lors on mesure, au compas, la distance entre c_1'' et la verticale $M_1''Z$ et reportant cette profondeur sur la figure A, en arrière de la ligne de naissance AH, on obtient facilement le point c sur la génératrice du petit berceau.

Fig. 55.



2° *Les extrados.* - Ils se coupent suivant la courbe 6, Z, 15, obtenue de la même manière. Ordinairement on ne la cherche pas.

3° *Les plans de lit du petit berceau. - Leurs intersections avec le grand intrados.* - Chaque plan de lit du petit berceau tel que o'D'v' est prolongé et recoupe l'intrados du grand berceau suivant une ellipse qui n'est à conserver que depuis le point d D' de l'arête, obtenu ci-dessus, jusqu'au point w (fig. A) w' (fig. B) w'' (fig. C) et w_1'' (fig. C'), où ce plan de lit rencontre la génératrice du grand berceau qui est immédiatement supérieure à celle du petit. Ce point w, w', w'' est obtenu exactement comme les points de l'arête.

Nota. - Sur le plan (fig. A) nous avons prolongé ces arcs d'ellipses dans leur partie inutile jusqu'au point θ, où ils doivent, tous, rencontrer tangentiellement le contour apparent horizontal du grand berceau.

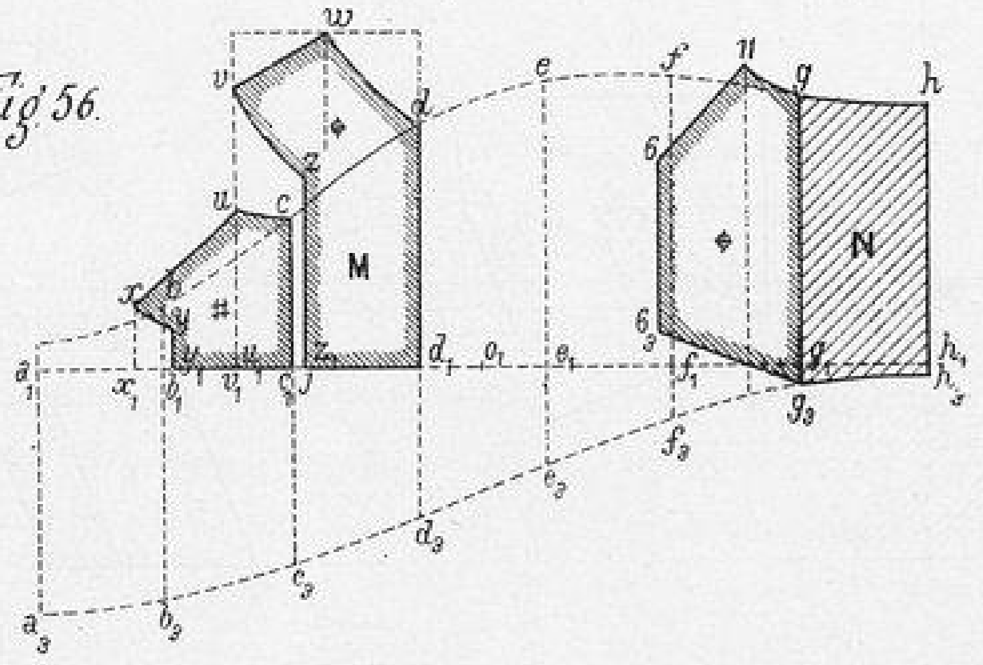
Les arcs d'ellipse utiles sont dw, pour le lit de dessus et uc pour le lit de pose. Les mêmes plans de lit recoupent le grand extrados suivant les arcs d'ellipse vz (caché) et xy (vu).

4° *Intersections des plans de lit.* - Ce sont les droites vw (saillante) et xu (rentrante) qui joignent les points obtenus ci-dessus. Ces droites prolongées doivent passer par le point O où se croisent les axes des berceaux.

(d) *Projections d'un voussoir courant.* - Le voussoir M, M', M'' est limité par deux plans de joint qui sont des sections droites de chaque berceau. On voit en M' (fig. B) et en M'' (fig. C) ses projections sur les murs xy et $x_1 y_1$ dans le cas où les extrados sont courbes. Si les voûtes étaient appareillées en tas de charge, alors la hauteur du point S', le plus élevé dans le grand berceau, déterminerait celle de tout le voussoir, lequel serait limité, à sa partie supérieure, par un plan horizontal. Dans ce cas il apparaîtrait comme cela est indiqué en M_1' (fig. B) et M_1'' (fig. C). Il est à remarquer que dans un cas comme dans l'autre, le solide capable serait toujours déterminé en I, II, III, IV, (fig. M_1'); il n'y a donc aucun intérêt à retailler, après coup, la pierre pour faire apparaître des extrados sur chaque berceau. On perdrait de la pierre et on aurait à payer une main d'œuvre inutile.

§ 37. - Taille d'un voussoir.

Fig. 56.



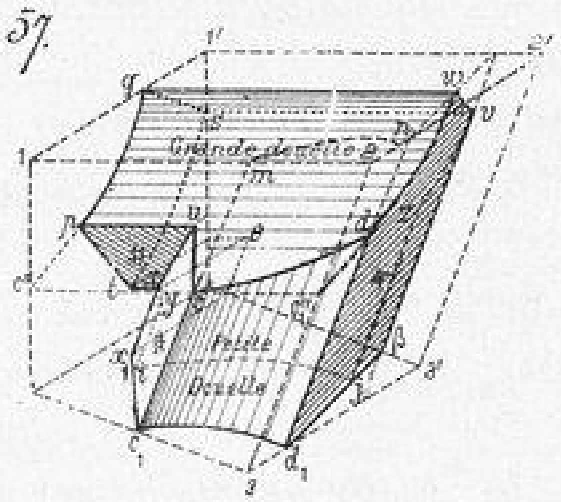
(a) *Préparation.* - Cette préparation comporte le développement (fig. 56) de la douelle d'intrados du petit berceau et la recherche des panneaux de lit correspondants. Il est inutile d'expliquer cette opération avec laquelle le lecteur a été familiarisé dans les épures précédentes. On voit en dw, et cu les ellipses de section du grand intrados par les plans de lit, et en zv et yx celles d'extrados, moins importantes à déterminer avec précision.

(b) *Application du trait.* - Le solide capable est un prisme droit vertical, dont la base

quadrilatère est prise (fig. 55 - A) sur le plan, en 1. 2. 3. 4 et dont la hauteur est fournie en III, IV sur l'élévation (fig. B). On voit ce solide en perspective cavalière sur la figure 57. Le voussoir y est supposé en tas de charge sans extrados courbes.

On commence (fig. 57) par abattre, à la volée, les plans de lit de dessus d d₁ B v et q s v w, ce qui se fait à l'équerre après avoir marqué sur les faces voulues du solide capable les lignes de plus grande pente d₁ B et q s de ces plans.

Fig. 57.



Sur le plan de lit $d d_1 B v$ du petit berceau on applique le panneau $d d_1 B v w$, ce qui va donner en $w d$ un arc d'ellipse, qui servira de directrice au grand intrados.

On commence la taille par le petit intrados. On a en $c_1 d_1$ un arc de section droite, et on abat la pierre en se servant de l'équerre.

On pourrait, sur la face 1 1' - 2 2' du solide capable chercher en $m n$ l'ellipse de sortie de cet intrados ce qui serait plus précis. Une fois ce petit intrados taillé, plus grand qu'il ne faut, on y applique le panneau $c d c_1 d_1$ fourni (fig. 56) par le développement et on peut alors tailler le grand intrados, car c'est un cylindre dont le contour est limité.

Enfin on termine par les plans de lit de pose qui forment en $x u$ un angle rentrant[1].

Le plan de lit $x_1 c_1 c u x$, du petit berceau se fait en premier, à l'équerre, en se guidant sur $x_1 c_1$, mais il faut tailler avec précaution et présenter souvent le panneau donné en $x_1 c_1 c u x$ (fig. 56) par le développement, afin d'être sûr de ne pas dépasser l'arête rentrante $x u$.

On termine par le panneau de lit $p u t y$ du grand berceau lequel est un plan déterminé par tout son contour.

---

[1] On aurait pu, et cela eût peut-être été préférable, commencer par les lits de pose.

Arches biaises.

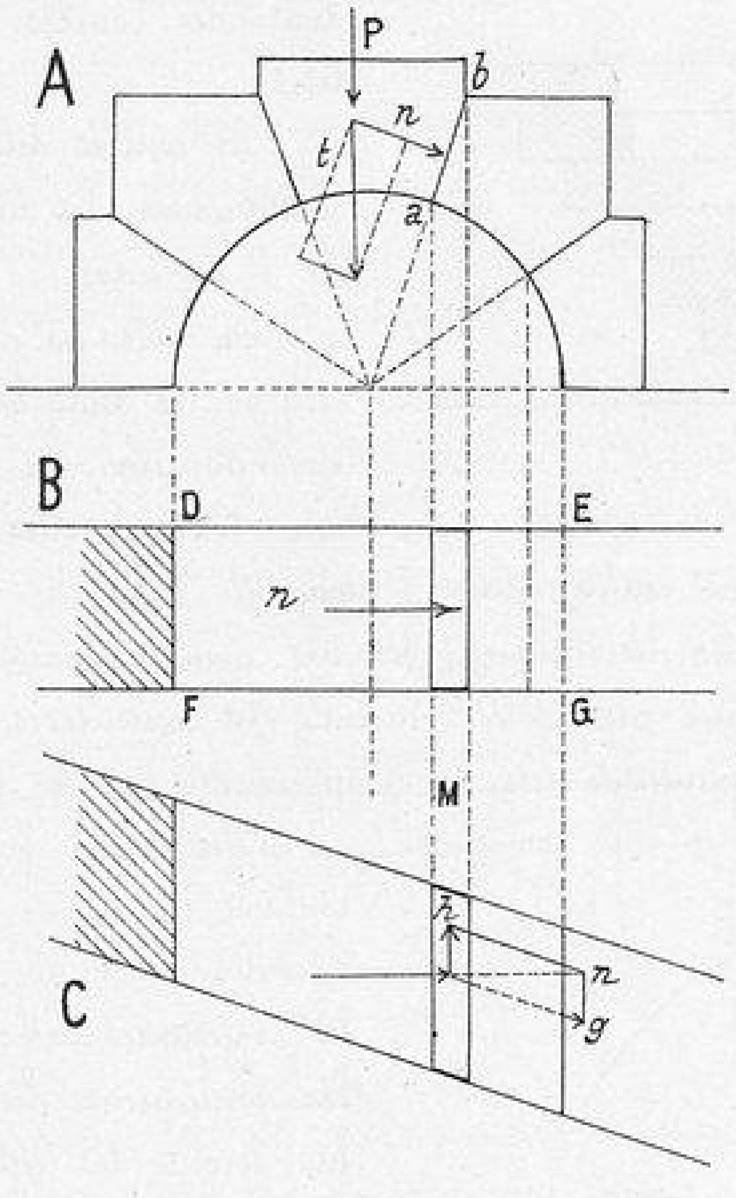
A. – Appareil orthogonal.

14e Leçon.

§ 38. – Poussée au vide dans les voûtes biaises mal appareillées. (fig. 58.)

Considérons deux berceaux répondant à une même section droite. L'un (fig. B) est droit, l'autre (fig. C) est biais, et supposons qu'ils soient appareillés de la même manière, c'est-à-dire en prenant pour *lignes de lits*, les génératrices du cylindre d'intrados et pour *surfaces de lits* les plans qu'engendreraient les normales à l'intrados menées par tous les points des lignes de lit.

Fig. 58.



Le poids P (fig. A) que supporte un voussoir se transmet au voussoir inférieur par l'intermédiaire du plan de lit ab. Une composante t serait parallèle à ce plan, l'autre n serait normale.

Cette dernière (voir le plan fig. B) étant parallèle aux plans de tête DE et FG, viendra, pour la voûte droite, se perdre dans la maçonnerie des culées, et il suffira que ces dernières soient assez massives pour que la voûte se tienne.

Mais dans la voûte biaise (fig. C) cette pression n, n'étant plus parallèle aux plans de tête, produira le même effet que deux composantes, l'une g, parallèle aux têtes, que les réactions des piédroits ou des culées détruiront, comme dans le cas de la voûte droite, l'autre h, parallèle aux génératrices du berceau et par suite aux plans de lit, qui tendra à faire glisser le voussoir sur son lit et à le faire tomber du côté de M, dans le vide; ce dernier effet constitue ce que l'on nomme la *poussée au vide*.

§ 39. – Voûte biaise par arceaux distincts (fig. 59).

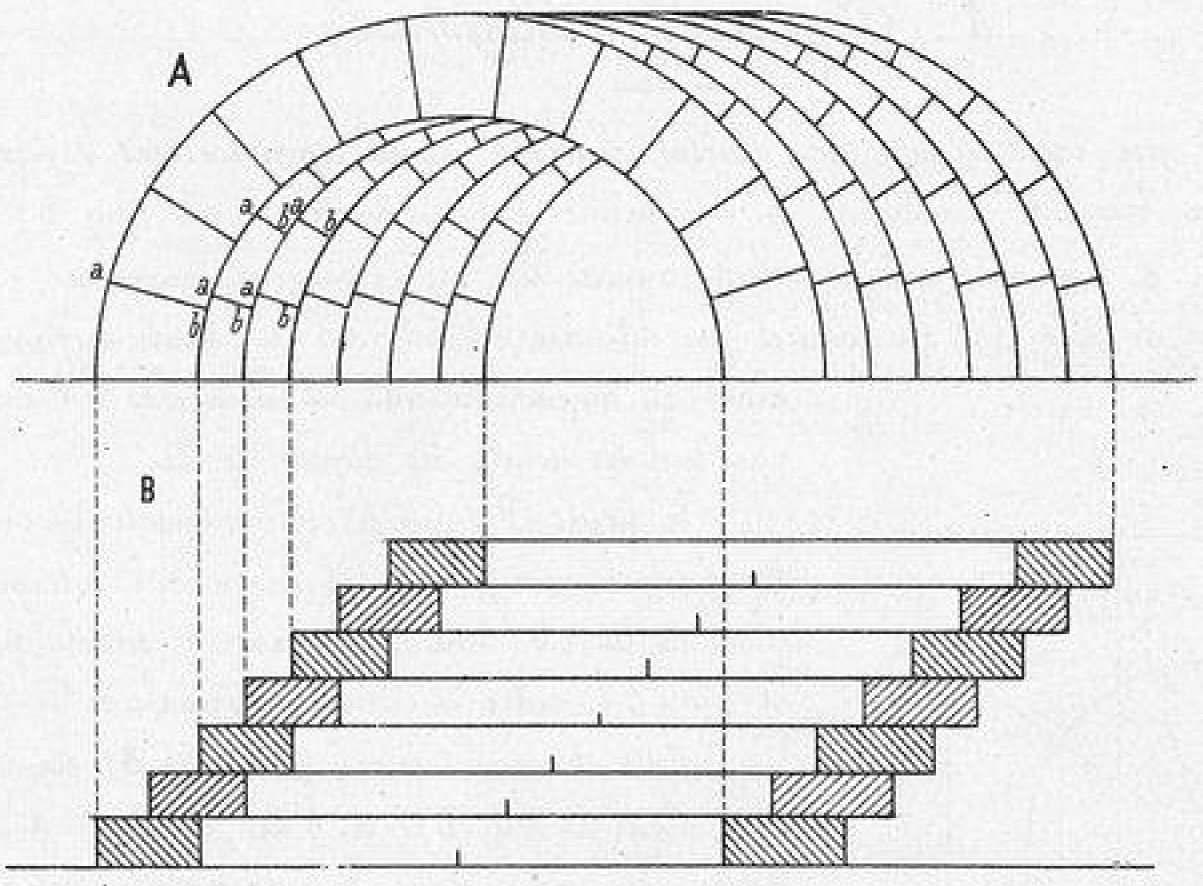
On a construit (fig. A et B) des arches biaises par arceaux droits séparés, en retraite les uns par rapport aux autres. Les intervalles compris entre ces arceaux étaient remplis par une maçonnerie plus légère. Il est évident que dans ces conditions chacun de ces arceaux forme une voûte droite donnant sa poussée dans les piédroits. Toute poussée au vide est ainsi évitée. On voit (fig. A) l'aspect en élévation d'une pareille voûte. Les lits s'accusent sur les différents plans de tête par une série de lignes droites ab, ab, ab.... normales aux courbes de tête.

§ 40. – Extension à une voûte biaise continue.

(a) Lignes de lit. – Imaginons que nous augmentions indéfiniment le nombre des arceaux

droits en réduisant leur épaisseur jusqu'à la rendre infiniment petite, et supposons, en outre, que

Fig. 59.



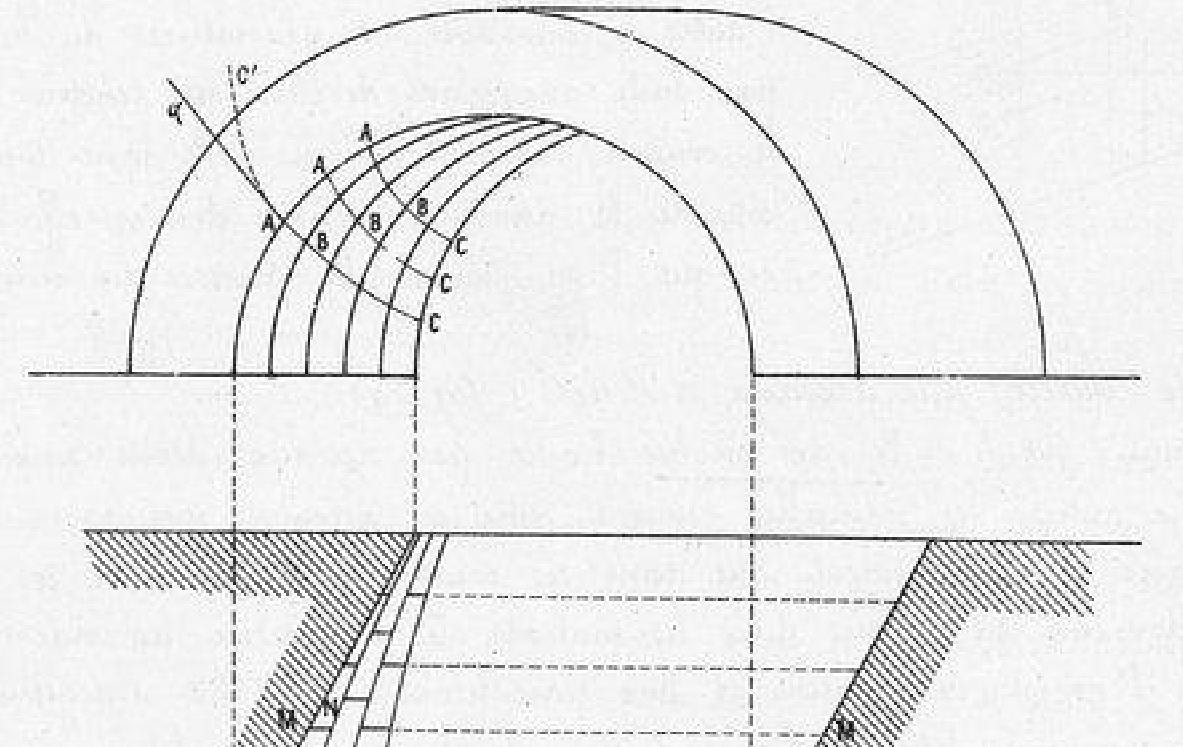
chaque plan de lit d'un arceau succède, d'une manière continue, au plan de lit de l'arceau précédent; on conçoit, qu'à la limite, les lignes discontinues ab, ab,.... de la voûte (fig. A) qui toutes étaient normales aux courbes de tête se transformeront (fig. 60) en une ligne continue A B C ......; rencontrant à angle droit les courbes parallèles aux têtes.

Les courbes telles que AB, constitueront les lignes de lit de l'intrados.

On voit qu'en élévation (fig. 60) ce sont les *trajectoires orthogonales*, des courbes parallèles aux têtes. Si elles le sont en élévation sur le plan de tête, elles le sont aussi en réalité, dans l'espace [1]

(b) Surfaces de lit. – Revenons à la voûte discontinue (fig. 59). Nous connaissons les joints de tête ab, ab..... les plans de lit étant normaux aux têtes peuvent être considérés comme engendrés cylindriquement par une droite normale aux plans de tête et s'appuyant sur les lignes ab, ab...

Fig. 60.



Généralisons pour la voûte continue (fig. 60). Les petites droites discontinues ab, ab.....sont devenues les trajectoires orthogonales ABC.... Par conséquent les surfaces de lit seront des cylindres normaux aux plans de tête et ayant pour directrices ces trajectoires (prolongées s'il y a lieu en AC').

(c) Surfaces de joints. – Dans une même assise, c'est-à-dire entre deux lits consécutifs, les voussoirs seront découpés par des plans de joint parallèles aux têtes

---

(1) D'après la réciproque du théorème relatif à la projection d'un angle droit en vraie grandeur.

MM, NN (fig. 60).

(d) Autre surface de lit (normale à l'intrados. Système Buck). — Les lits cylindriques qui viennent d'être indiqués seraient difficiles à tailler. On leur substitue des normalies, c'est-à-dire des surfaces gauches engendrées par des normales à l'intrados qui s'appuieraient sur les trajectoires orthogonales précédentes.

Ce lit gauche diffère du lit cylindrique ; mais il lui est tangent en tous les points de la trajectoire A, B, C.

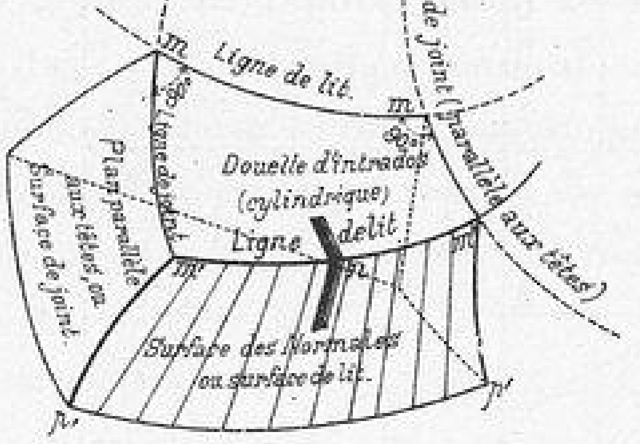
En effet : Soit A, un de ces points ; d'une part le plan tangent au cylindre est perpendiculaire au plan de tête, puisque les génératrices le sont aussi, et il contient la tangente $A\alpha$ à la trajectoire qui est sa directrice. Autrement dit, c'est un plan projeté en entier sur le plan de tête suivant la droite $A\alpha$.

D'autre part, le plan tangent à la surface des normales contient : 1° La tangente $A\alpha$ à la trajectoire et 2° la normale à l'intrados.

Mais cette dernière se projette aussi suivant $A\alpha$, puisque étant perpendiculaire au plan tangent de l'intrados, elle doit être, en projection, perpendiculaire à la trace de ce plan tangent, c'est-à-dire à la tangente à la courbe de tête. Donc le plan tangent à la surface des normales est, lui aussi projeté tout entier suivant $A\alpha$ et par suite, se confond avec le précédent.

En substituant par conséquent aux lits cylindriques, des lits gauches normaux, on rentrera dans un procédé de taille plus familier aux appareilleurs et les voussoirs jouiront toujours de ces propriétés : (fig. 61). 1° que la douelle d'intrados aura ses quatre angles curvilignes m m m' m' droits et 2° que en un point n quelconque pris sur la ligne de lit du contour de la douelle, le biveau n qui mesurerait l'angle dièdre des plans tangents aux surfaces qui s'y rencontrent sera droit.

Fig. 61.



(e) Autre surface de lit (normale aux courbes de tête, système Nicholson et Graeff). — On peut encore engendrer les lits par une droite assujettie 1° à rencontrer toujours la trajectoire orthogonale (courbe de lit) ; 2° à être parallèle au plan de tête, c'est-à-dire à être contenue dans le plan de joint, et 3° à être normale à la courbe de joint (courbe parallèle aux têtes). On voit facilement que cette surface de lit est, elle aussi, tangente à la surface cylindrique indiquée en premier.

(f) Comparaison des divers systèmes de surface de lit. — Si l'on compare le système Buck au système Nicholson, on voit que pour chacun d'eux la surface de lit est une surface gauche à plan directeur. Dans le premier (Système Buck) le plan directeur est parallèle au plan de section droite de l'intrados et les génératrices sont, en outre, normales aux courbes de section droite. Dans le second (Système Graeff) le plan directeur est parallèle aux plans de tête et les génératrices sont, en outre, normales aux courbes parallèles aux têtes.

Dans les deux systèmes la surface de lit est normale aux plans de tête, ce qui est la condition nécessaire pour éviter la poussée au vide. Seulement, le système Graeff a pour avantage de donner des lignes droites comme intersection avec les plans de tête, tandis que le système Buck donne

(fig. 61) des lignes courbes m'p'-m'p .... Et même si la courbe de tête est un cercle; les joints de tête (Système Graeff) lui étant normaux, convergent tous au centre.

Dans les voussoirs de ces deux systèmes tous les angles de douelle sont droits; tous les biveaux aussi, sauf celui du plan de tête et du plan tangent au cylindre d'intrados.

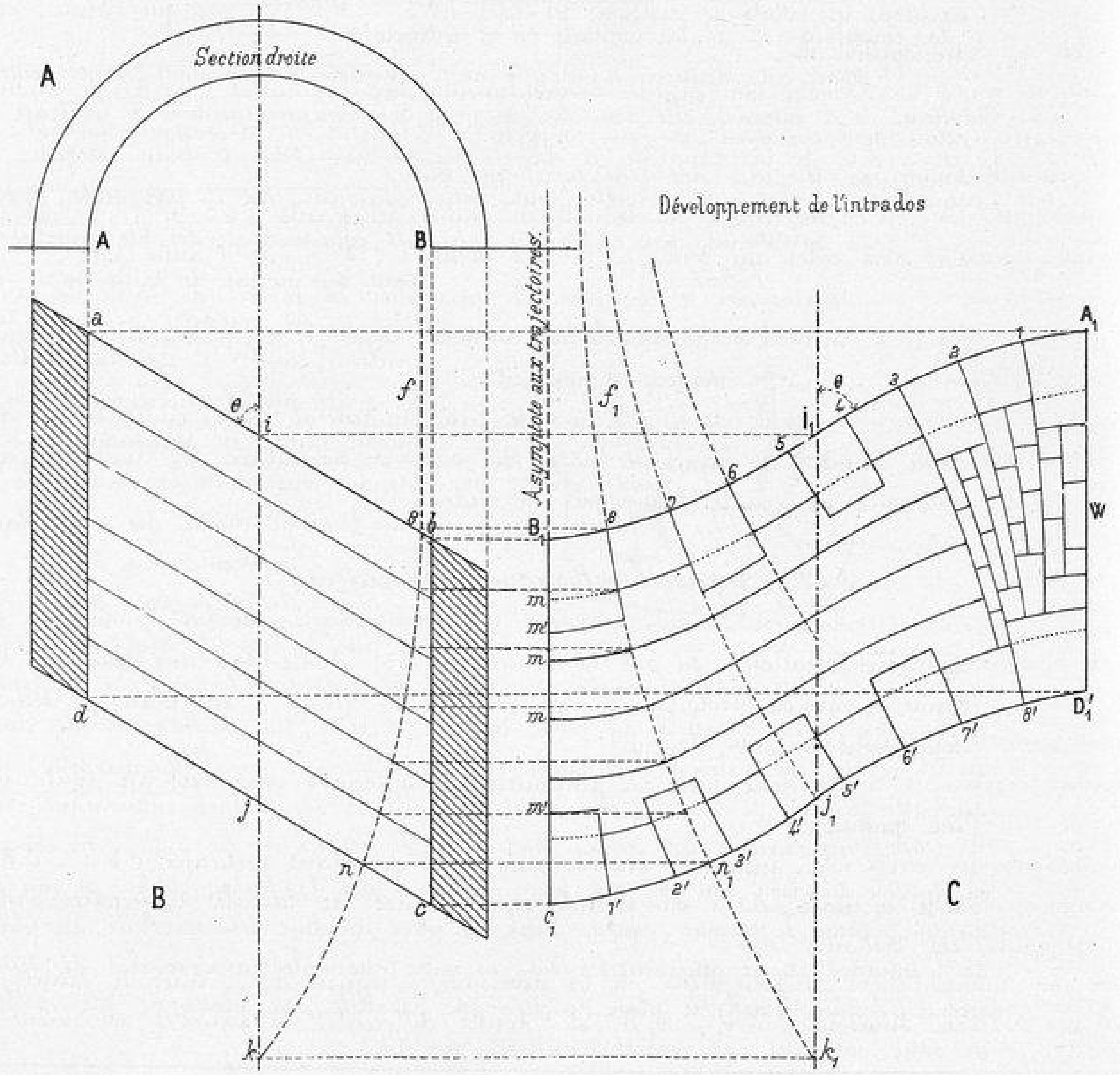
Mais pour ce dernier, il n'y a pas moyen de faire autrement; il est toujours, sauf pour le point le plus haut de la courbe de tête différent d'un angle droit puisqu'il est une conséquence forcée du biais de la voûte.

§ 41. – Aperçu sommaire de l'épure de l'appareil orthogonal parallèle (fig. 62).

On suppose que la section droite de l'intrados est un cercle (fig. 62-A).

Le plan est indiqué en B. L'intrados a été développé en C et les sinusoïdes A_1B_1 - C_1D_1

Fig. 62.



sont les transformées des sections de tête ab, cd. Aux points de naissance $A_1 B_1 C_1 D_1$ les sinusoïdes sont perpendiculaires aux génératrices. Aux points milieux $I_1 J_1$ elles font avec la génératrice centrale $I_1 J_1$ l'angle θ du biais, et présentent un point d'inflexion.

1° Les sinusoïdes $A_1 B_1$, $C_1 D_1$ de tête sont divisées en un nombre impair de parties égales aux points 1, 2, 3 ..... 1', 2', 3'..... afin d'avoir des voussoirs de longueurs égales sur la courbe de tête.

2° On relève sur un patron l'une des sinusoïdes de tête, et la faisant glisser parallèlement aux génératrices on trace un certain nombre de sinusoïdes parallèles m, m', m, m'.....

3° Se basant sur ce fait que les angles se conservent en développement, on trace une trajectoire orthogonale $f_1\ 8\ n_1\ k_1$ de toutes ces sinusoïdes. (Voir plus loin une note sur l'équation de ces courbes).

4° On découpe un patron sur cette courbe; puis le faisant glisser parallèlement aux génératrices, en se guidant en outre sur le point de repère central k_1 on fait passer ce patron par tous les points de division des têtes 1, 2, 3..... 1', 2', 3'..... ce qui donne les lignes de lit en développement.

5° On fait ensuite l'enroulement sur l'intrados (fig. B). Le croquis ci-joint montre le détail de l'opération, et fait comprendre comment en découpant un autre patron f 8 n k, on simplifiera le tracé des trajectoires en plan.

Remarque. – Les trajectoires parties des points 1, 2, 3 de l'une des têtes ne se raccorderont pas avec celles qui sont parties des points 1', 2', 3'..... de l'autre tête.

Souvent on se contentera d'appareiller en pierres de taille les voussoirs de tête, et la figure C montre, en développement, dans la région W comment le raccordement pourra se faire ensuite avec des moellons d'appareil.

La taille de ces derniers se fera en général sur le cintre même; on tracera sur la surface de ce dernier les lignes de lit et de joint et on taillera les moellons à la demande des panneaux de douelle ainsi mis en évidence [1]

§42. – Appareil orthogonal convergent.

Il arrive souvent que dans une voûte biaise, un peu longue, les deux plans de tête ne sont pas parallèles, ou que la voûte (fig. 63) droite sur une tête ab, soit biaise sur l'autre a'b'. Dans ce cas, on prolonge le plan de tête a'b' jusqu'à un plan de section droite ab, qui en sera suffisamment éloigné.

Ces deux plans se rencontreront suivant une verticale toute entière projetée en un point c.

On imagine ensuite une série de plans verticaux C b''a'' – C B A passant tous par cette verticale, et l'on prend pour lignes de lit les trajectoires orthogonales de toutes ces sections.

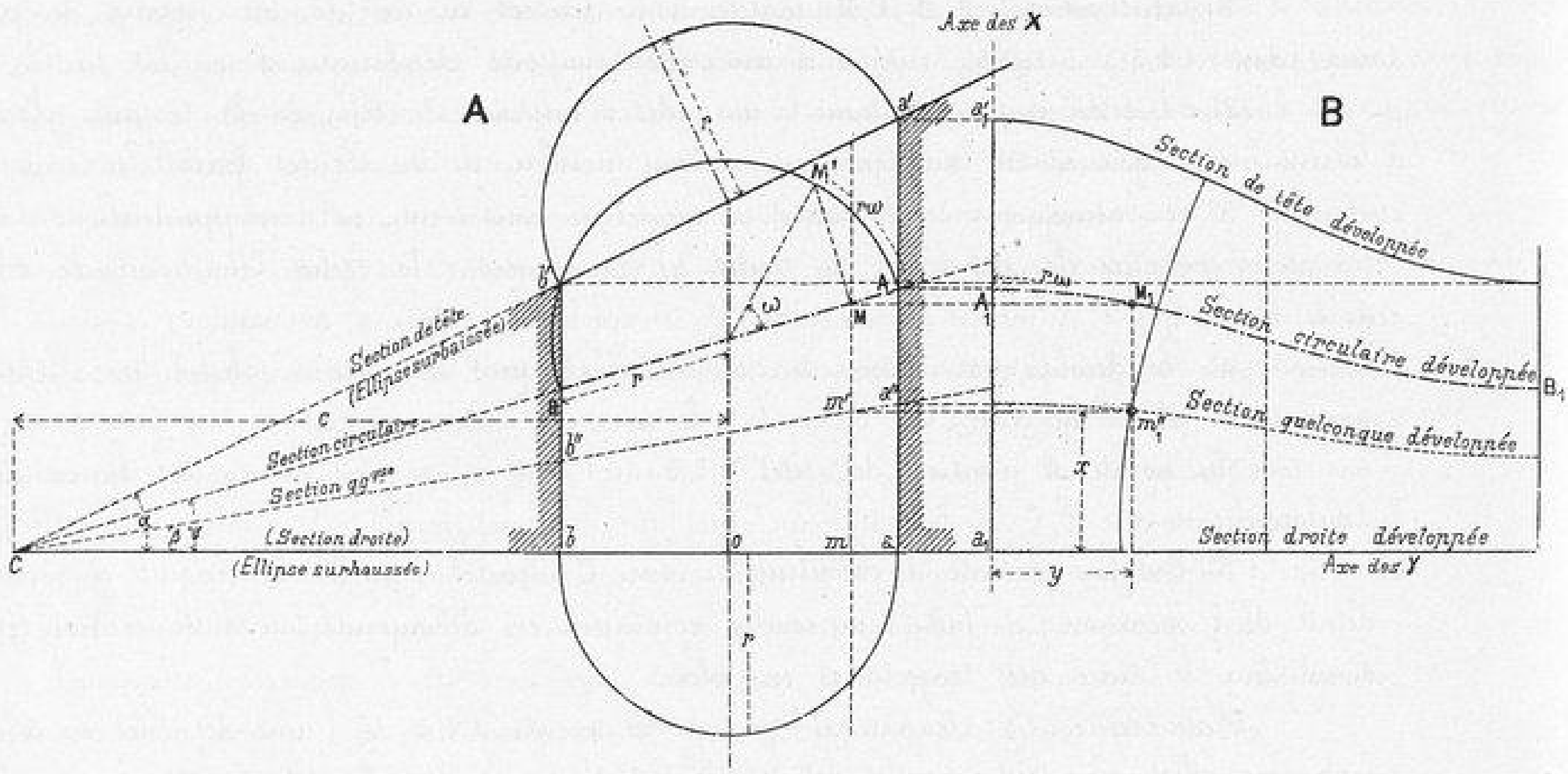
A cet effet on les développe (figure B). Elles se transforment en une série de sinusoïdes $a'_1 b'_1$ – $A_1 B_1$, etc. toutes différentes, auxquelles on mène des trajectoires

---

(1) Voir à ce sujet le Cours de Construction de Ponts par Mr Morandière: Dunod, Editeur.

orthogonales [1]. L'épure s'achève comme pour l'appareil orthogonal parallèle.

Fig. 63.



(1) *Note* : Mr Graeff, Inspecteur Général des Ponts & Chaussées, a donné l'équation la plus générale de ces trajectoires orthogonales développées.

Il a pris comme variables définissant la position d'un point quelconque m_1'' de l'une de ces trajectoires: 1° Son abscisse x (fig. B), 2° la longueur $A_1 M_1 = r\omega = AM'$ (fig. A) que la génératrice du point m_1'' détache soit sur la section AB qui est un cercle de rayon r, soit (fig. B) sur la sinusoïde $A_1 M_1 B_1$ qui est le développement de cette section circulaire.

Cette variable $r\omega$ (et par suite l'angle ω) est liée à l'ordonnée y du point courant m_1'' par une relation algébrique assez compliquée. En employant la variable $r\omega$, au lieu de l'ordonnée y on simplifie les formules.

En appelant c, la longueur CO (fig. A), α, ψ et β, les angles que font avec la section droite: 1° le plan de tête (α), 2° le plan de section circulaire (ψ) et 3° le plan de section courante (β) l'équation de la trajectoire orthogonale est:

$$(A)\quad \frac{x^2}{2} = \frac{cr}{\cos\psi} \,L\, \operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega + \frac{cr\sin^2\psi}{\cos\psi}\cos\omega + r^2 L \sin\omega + \frac{r^2\sin^2\psi\cos^2\omega}{2} + \text{constante}.$$

L étant le signe des logarithmes népériens.

La constante sera déterminée par la condition de faire passer la trajectoire par tel ou tel point soit de la courbe de tête, soit de la courbe de section droite.

Cette équation (A), s'applique à tous les cas qui pratiquement sont ordinairement les suivants:

I. Appareil

B. – Appareil hélicoïdal.

§ 43. – Description générale de l'appareil. (fig. 64, voir plus loin).

L'appareil orthogonal, très bon au point de vue de la stabilité, a le grand inconvénient de donner des voussoirs inégaux entre eux et nécessitant par conséquent, pour leur taille, des panneaux et des biveaux tous différents. Cela tient à ce que les trajectoires orthogonales ne sont pas superposables à elles-mêmes dans toutes leurs parties comme le seraient des hélices tracées sur un cylindre de révolution. C'est pourquoi on lui substitue ordinairement l'appareil que nous allons décrire.

(a) *Lignes de lit et lignes de joint.* – Nous supposons la section droite circulaire, ce qui revient à dire que l'intrados est un cylindre de révolution (soit r son rayon) et nous imaginons (surtout pour la facilité des raisonnements) que l'extrados est aussi de révolution; soit R son rayon; (voir plus loin fig. 64).

Développons l'intrados (fig. 64-B) comme dans l'appareil orthogonal, et remarquons que les sinusoïdes de tête D_1C_1 et B_1A_1 diffèrent assez peu de leurs cordes. D'ailleurs cette corde passe par le point d'inflexion; elle a donc 3 points communs avec la sinusoïde.

Par conséquent en substituant aux trajectoires orthogonales des sinusoïdes les trajectoires orthogonales de leurs cordes nous nous écarterons assez peu de l'appareil orthogonal.

Mais les cordes des sinusoïdes sont toutes parallèles. Il en sera donc de même de leurs trajectoires orthogonales. Par conséquent, ces dernières seront des lignes droites sur le développement (fig. B) et elles deviendront, par enroulement (fig. A) les *hélices de lit*, tandis que les parallèles aux cordes des sinusoïdes deviendront d'autres hélices qui seront les *hélices de joints discontinus*.

Si nous prenons les unes et les autres équidistantes, tous les voussoirs (sauf ceux des têtes et des naissances) seront égaux entre eux.

(b) *Surfaces de lits et surfaces de joints.* – Prenant les hélices précédentes comme directrices, nous ferons glisser sur elles des normales à l'intrados; nous engendrerons ainsi deux séries de surfaces de vis à filet carré, qui constitueront les surfaces de lit et les surfaces de joint.

§ 44. – Considérations théoriques.

(a) *Hélices de lit.* – Divisons (fig. B) les cordes des sinusoïdes en un certain nombre de parties égales, 9 par exemple, aux points 1, 2, 3 ...... 1' 2' 3' ...... Par un des points de division D_1,

---

I. – *Appareil orthogonal convergent.*
- a { Section de tête circulaire / Section droite elliptique } $\alpha = \psi$
- b { Section de tête elliptique / Section droite circulaire } $\psi = 0.$

II. – *Appareil orthogonal parallèle.*
- a { Section de tête circulaire / Section droite elliptique }
- b { Section de tête elliptique / Section droite circulaire }

Pour plus de détails nous renverrons le lecteur au savant mémoire de Mr Graeff, sur les arches biaises.

menons une perpendiculaire D_1T_1 aux cordes : Nous nommerons *angle intradossal naturel*, ω, l'angle qu'elle fait avec les génératrices du cylindre.

Selon toutes les probabilités cette droite D_1T_1 ne passera pas par un des points de division de l'autre corde A_1B_1. Nous lui substituerons alors une droite D_1N_1 passant cette fois par un point de division exacte, mais nous aurons soin de prendre D_1N_1 plus rapproché des naissances que D_1T_1 autrement dit nous diminuerons l'angle intradossal naturel, et nous lui en substituerons un autre, m, plus petit. (Nous justifierons plus loin cette réduction).

L'angle m se nomme *l'angle intradossal rectifié*.

Il est facile d'obtenir sur l'intrados (fig. A) en plan, la sinusoïde DNiL projection horizontale de l'hélice résultant de l'enroulement de la droite $D_1N_1I_1L$ de la fig. B.

(b) Hélices de joint. — Les lignes de joint, développées, seront les droites telles que $B_1\omega_1\delta_1$ (fig. B) perpendiculaires sur les lignes de lit. Elles s'enrouleront suivant des hélices $\delta\omega B$ faciles à déterminer (fig. A). Elles ne sont pas, en développement, parallèles aux cordes des sinusoïdes; cela résulte du changement de l'angle intradossal.

(c) Surfaces de lit et surfaces de joint. — Les normales à l'intrados le long des hélices précédentes engendreront des vis à filets carrés qui seront les surfaces de lit et de joint.

Prolongées jusqu'à l'extrados de rayon R et, plus généralement jusqu'à un cylindre intermédiaire quelconque de rayon r' concentrique au cylindre d'intrados elles le recouperont suivant des hélices de même pas total, et de même pas réduit (voir fig. E, Épure des pas réduits; h est le pas réduit des vis de lit, h' est le pas réduit des vis de joint).

On voit (fig. D), le développement de l'extrados. Sa largeur en section droite est πR au lieu de πr qui était celle de l'intrados. Les lignes de rappel font voir comment on obtient en L_2D_2 la ligne de lit d'extrados et en $B_2\delta_2$ la ligne de joint. Il est facile de voir que L_2D_2 n'est pas non plus perpendiculaire sur la corde EG_2 de la sinusoïde d'extrados; seulement tandis que sur l'intrados, par suite de la diminution apportée à l'angle intradossal (fig. B), l'angle de D_1L_1 avec B_1A_1 était obtus, sur l'extrados l'angle correspondant est aigu. Il est donc facile à comprendre qu'il doit exister un cylindre intermédiaire de rayon r' pour lequel la condition de perpendicularité entre la corde de la sinusoïde et l'hélice de lit sera remplie.(1)

Or, comme la transmission des pressions entre les voussoirs se fait, à peu près, sur

---

(1) On peut calculer le rayon r' du cylindre pour lequel les hélices de lit seraient perpendiculaires aux cordes des sinusoïdes correspondantes. Soit r' le rayon de ce cylindre moyen et supposons (ce qui n'est pas) pour faciliter le raisonnement, que la figure D donne le développement de ce cylindre moyen.

Partout où se trouve R sur la figure B nous prendrons à la place et nous écrirons r'.

On aurait, en appelant γ l'angle de la corde de la sinusoïde avec la génératrice :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\overline{O_2V}}{\overline{VK}} = \frac{\frac{\pi}{2} r'}{r' \operatorname{cotg} \theta} = \frac{\pi}{2 \operatorname{cotg} \theta} \quad \text{(quantité constante).}$$

On aurait d'autre part (même figure B)

$$\operatorname{tg} M = \frac{\overline{D_2\delta_2}}{\overline{L_2\delta_2}} = \frac{\pi r'}{\pi r . \operatorname{cotg} m} = \frac{r'}{r \operatorname{cotg} m}.$$

Pour la perpendicularité

un cylindre intermédiaire entre l'intrados et l'extrados, il est préférable que la condition de perpendicularité soit plutôt remplie pour lui que pour tout autre.

Nous justifions donc ainsi, par une première raison mécanique, la diminution de l'angle intradossal.

Remarquons, en passant: 1° que les pas de toutes les hélices de lit des différents cylindres de rayon r, r', R...... sont les mêmes, mais que les angles m, m', M qu'elles font avec les génératrices vont en augmentant et que l'on aura toujours d'après la théorie de l'hélice $\frac{r}{tg\,m} = \frac{r'}{tg\,m'} = \frac{R}{tg.M} = h$, h étant le pas réduit de la vis.

2° Que les hélices de lit d'extrados recouperont aussi en parties égales les cordes des sinusoïdes d'extrados (fig. D).

3° Que les cordes de toutes les sinusoïdes, transformées des courbes de tête des divers cylindres font toutes le même angle γ avec les transformées des génératrices. $\tang.\gamma = \frac{\pi}{2\,cotg.\theta}$.

4° que les hélices de joint d'extrados ($B_2 S_2$) ne sont plus perpendiculaires aux hélices de lit ($D_2 L_2$).

<u>15e Leçon.</u>

§ 45.- Joints des têtes.- Théorie des foyers.

(a) Le foyer des joints de tête.- Les hélicoïdes de lit recouperont le plan de tête suivant des courbes $n_1' s_1'$ (fig. C) et non pas suivant des droites, car le plan de tête n'étant pas une section droite n'est pas parallèle aux normales qui sont les génératrices et par suite les seules droites de l'hélicoïde.

On voit facilement (fig. C) comment, en se servant des deux hélices $N D$ et $S D_1$, d'intrados et d'extrados qui appartiennent à la même vis de lit, on a obtenu deux points n_1' et s_1' de l'intersection. On pourrait obtenir de même des points intermédiaires. Nous donnons plus loin (§ 50, d) un procédé pour obtenir ces courbes à l'aide de leurs tangentes.

Nous allons chercher la tangente $F_1' n_1'$ à cette courbe au point n_1' situé sur l'intrados et nous prouverons qu'elle passe par un point fixe F_1' (fig. C) et F' (fig. A') situé sur le petit axe de l'ellipse de tête et que nous nommerons le foyer.

Faisons la démonstration sur l'épure en section droite (fig. A').

La tangente $F'n'$ sera l'intersection du plan de tête et du plan tangent à l'hélicoïde.

Or ce dernier est déterminé: 1° Par la normale qui est le rayon $n'o'$; 2° Par la tangente

---

Pour la perpendicularité il faut que l'on ait: $tg.\,\gamma \times tg.\,M = 1$.

d'où: $$\frac{\pi r'}{2\,r\,Cotg.\theta\,Cotg.m} = 1$$

d'où l'on tire: $$\frac{r'}{r} = \frac{r\,Cotg.\theta\,\,Cotg.m}{\frac{\pi r}{2}}$$

Nous construirons tout à l'heure (fig. F, épure des paramètres), en σ, l'expression $q = r\,cotg.\theta\,cotg.\,m$.

La quantité $\frac{\pi r}{2}$ est donnée (fig. B) par la demi-section droite de l'intrados développé.

On construit donc r' de la manière suivante (fig. A").

On prend $\overline{OG} = q = r.cotg\,\theta.\,cotg.m$ et $\overline{OS} = \frac{\pi r}{2}$. On joint SA et la parallèle GJ, donne en $\overline{OJ}$ le rayon r' de ce cylindre moyen.

En effet, on a: $\frac{r'}{r} = \frac{OG}{OS} = \frac{r\,cotg\,\theta.\,cotg\,m}{\frac{\pi r}{2}}$

Nota: Par hasard, ici, r' est sensiblement la demi-somme de r et de R.

à l'hélice de lit.

Prenons comme plan vertical auxiliaire le plan de front OZ passant par le petit axe de l'ellipse de tête et cherchons, sur ce plan vertical, la trace du plan tangent. Elle sera parallèle à la normale O'n' qui est une droite de front du plan tangent et elle passera par le point Xx' où la tangente à l'hélice perce le plan de front OZ.

Cette trace du plan tangent sera donc x'F' parallèle à O'M'. Elle rencontre le petit axe en F' et la tangente cherchée au joint de tête est F'n'.

Je dis que O'F' est constant.

Calculons O'F' = p.

A cet effet n'x' est la sous-tangente de l'hélice. Elle est en vraie grandeur en $\overline{X_1U_1}$ sur le développement (fig. B) et sur ce développement on reconnaît que $\overline{X_1U_1}$ ou $\overline{n'x'} = \overline{N_1U_1}\,tg.m$.

Or (fig. A') $\overline{n'y'} = \overline{O'F'}$ et les deux triangles semblables n'y'x' et w'n'o' donnent :

$$\frac{\overline{n'y'}}{\overline{o'n'}} = \frac{\overline{n'x'}}{\overline{n'w'}}$$

ou : (1) $$\frac{p}{r} = \frac{\overline{N_1U_1}\,tg.m}{\overline{n'w'}}$$

Mais $\overline{n'w'}$ (fig. A') $= \overline{OU}$ (fig. A) $= \overline{N_1U_1}\,tg.\theta$ donc, en substituant dans (1)

$$\frac{p}{r} = \frac{\overline{N_1U_1}\,tg\,m}{\overline{N_1U_1}\,tg\,\theta} = \cotg.\theta \times tg.m.\ \text{d'où :}$$

(1') $$p = r\cotg.\theta \times tg.m.$$

quantité constante. C. Q. F. D.

(b) *Foyers répondant à d'autres cylindres.* — Cette formule est générale et s'applique à tout autre cylindre que celui d'intrados, par exemple au cylindre de rayon r' (fig. A''). Son foyer F_1 sera à une distance p' donnée par la formule :

$$p' = r'\cotg.\theta.\,tg.m'.$$

et on a vu que $\frac{tg.m'}{tg.m} = \frac{r'}{r}$ d'où, $tg.m' = -\frac{r'}{r}\,tg.m.$

et en substituant : $$p' = r'\cotg\theta \times \frac{r'tg\,m}{r}$$

Multiplions haut et bas par r et remarquons que $r.\cotg.\theta.tg.m$ c'est p, nous en déduirons :

(2) $$\frac{p'}{p} = \frac{r'^2}{r^2}$$

Nous déduirons (fig. A'') de cette formule une construction très simple pour déterminer les distances focales p', p'', répondant aux rayons r', r'', en les déduisant de la première p.

On joint Fa (fig. A'') et on mène aω perpendiculaire sur F'a :

Pour avoir le foyer F' répondant au cylindre de rayon r'. Joignons ωJ, menons JF' perpendiculaire et nous aurons F'. En effet, on a :

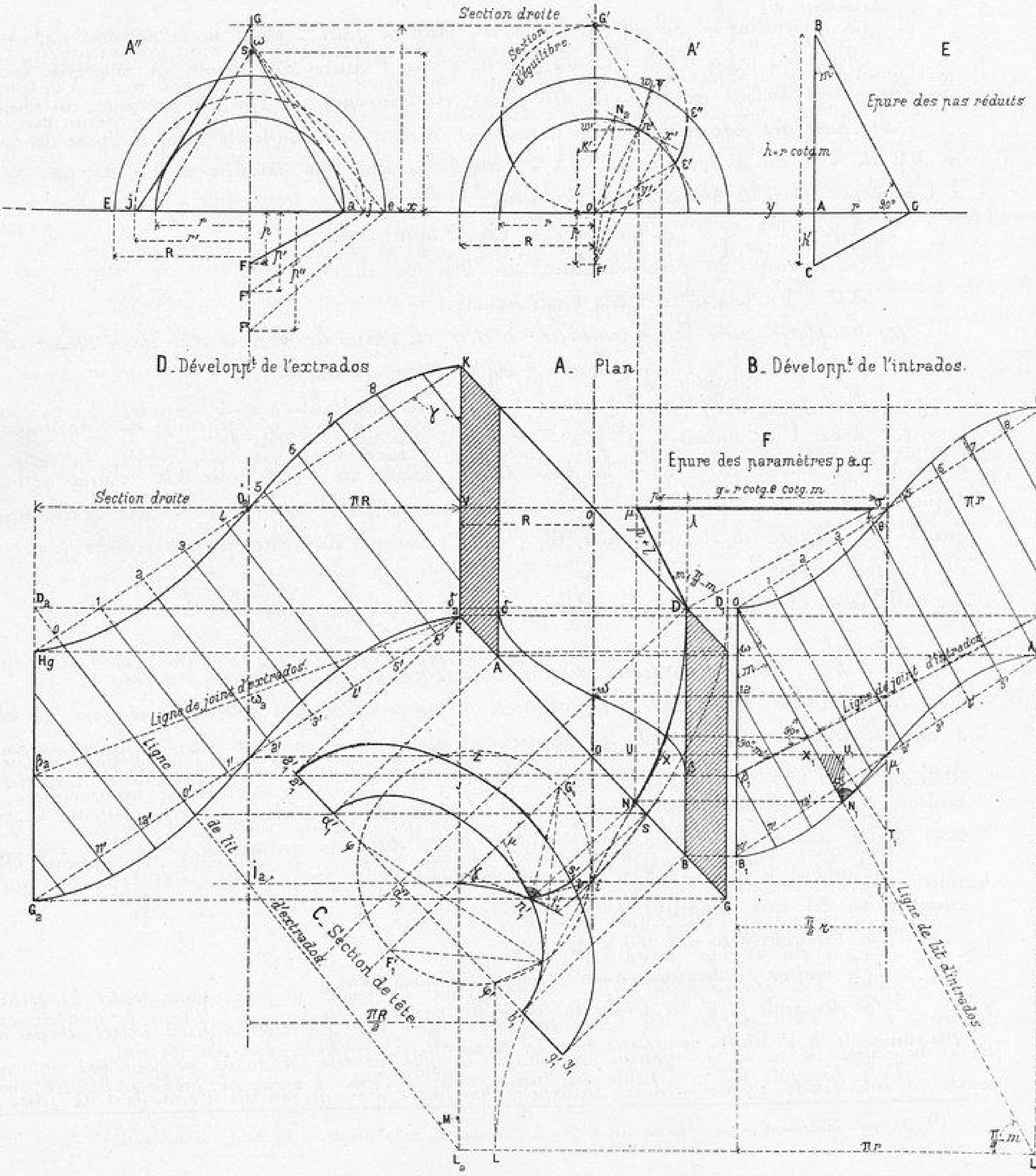
$$r^2 = \overline{OF} \times O\omega \qquad \text{et} \qquad r'^2 = \overline{OF'} \times O\omega$$

donc $\frac{OF'}{OF} = \frac{r'^2}{r^2}$ ce qui est la formule (2).

(c) *Foyer des hélicoïdes de joint.* — Le théorème des foyers est vrai pour toutes les sections que feraient sur le plan de tête des hélicoïdes quelconques, du genre vis à filets carrés, et, par conséquent si les hélicoïdes de joint recoupaient, eux aussi, le plan de tête (ce qu'ils ne font pas en réalité) les courbes d'intersection auraient leurs tangentes passant par un même point fixe G, dit foyer

Appareil hélicoïdal. – Considérations théoriques.

Fig. 64.



des hélicoïdes de joint. Soit q, la distance OG.

La même formule servira, en y remplaçant l'angle m, par $\frac{\pi}{2}$ - m puisque les hélices de joint d'intrados sont perpendiculaires sur les hélices de lit, ce qui donnera :

$$q = r . \cotg \theta \cotg m.$$

Ce foyer G variera aussi avec les cylindres d'après leurs rayons ; et si l'on nomme q'q''.... les distances focales des hélicoïdes de joint on aura aussi la formule :

$$\frac{q}{q'} = \frac{r^2}{r'^2} \text{ et par suite } \frac{q}{q'} = \frac{p}{p'}$$

(La démonstration de cette formule est facile à faire. - Nous ne la donnons pas ici).

Reportons (fig. C) les distances p et q sur l'épure qui donne la courbe de tête en vraie grandeur, nous aurons en F_1' et G_1' les foyers, et par suite en $F_1'n_1'$ la tangente au joint de tête.

(d) *Épure des paramètres.* - Les paramètres p et q sont construits (fig. F. Épure des paramètres) en $\lambda\mu$ et $\lambda\sigma$. On a évidemment $\overline{D\lambda} = r \cotg \theta$; menons $D\mu$ parallèle à D_1L_1 et, par suite incliné à l'angle m sur les génératrices. On aura :

$\overline{\lambda\mu} = \overline{D\lambda} \operatorname{tg} m$ (et par suite) $= r \cotg \theta . \operatorname{tg} m = p$.

En menant $D\sigma$ perpendiculaire sur $D\mu$, on aura :

$\lambda\sigma = D\lambda \cotg m = r \cotg \theta \cotg m = q.$

(e) *Relations entre les paramètres p et q, et entre les axes a et b de l'ellipse de tête.* -

On aura $pq = r \cotg \theta . \operatorname{tg} m \times r \cotg \theta . \cotg m = r^2 \cotg^2 \theta$.

Mais pour l'ellipse de tête on a (fig. C) en appelant a et b ses axes : $b = r$ et $a = \frac{r}{\sin \theta}$

d'où l'on déduit : $a^2 - b^2 = \frac{r^2 - r^2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{r^2 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = r^2 \cotg^2 \theta$

mais $a^2 - b^2$ c'est le carré c^2 de la demi-distance focale de l'ellipse de tête. Soient φ et φ' ses 2 foyers. La relation précédente prouve donc que $pq = c^2$ ce qui veut dire géométriquement que la circonférence construite sur $F_1'G_1'$ (fig. C) comme diamètre passe par les foyers φ et φ' de l'ellipse de tête.

Cette propriété a été démontrée par Mr. Lucas, Ingénieur des Ponts et Chaussées.

§ 46. - Considérations sur l'équilibre d'un voussoir de tête.

(a) *Les trois tangentes au sommet d'un voussoir de tête.* - Un voussoir de tête sera d'autant plus acceptable qu'il se rapprochera plus d'un voussoir de l'appareil orthogonal. Nous allons chercher quel est le point de la courbe de tête pour lequel les 3 arêtes du voussoir qui l'aurait pour sommet dans l'appareil hélicoïdal se rapprochent le plus des trois arêtes du voussoir orthogonal qu'il est destiné à remplacer.

Étudions le point $NN_1 n'n_1'$ ..... et considérons les 3 tangentes aux 3 courbes qui s'y rencontrent. Ces trois tangentes sont (fig. C) :

1° La tangente $n_1'\mu$ à l'ellipse de tête.

(Le voussoir orthogonal aurait aussi cette tangente).

2° La tangente $n_1'V$ au joint de tête. Elle passe par le foyer F_1'. (Dans le voussoir orthogonal, cette tangente $n_1'V$ serait remplacée par la normale à l'ellipse, voir Aα fig. 60).

3° La tangente $n_1'L$ à l'hélice directrice $i_1' n_1' d_1'$ [1]. (Dans l'appareil orthogonal cette hélice serait

---

[1] On voit facilement sur l'épure fig. C et A, comment ces 3 points i_1' n_1' et d_1' sont obtenus.

remplacée par la trajectoire orthogonale des courbes parallèles aux têtes et par suite $n'_1\mathcal{E}$ serait remplacé par une droite, elle aussi, normale à l'ellipse).

Il résulte de cette comparaison que si nous pouvions trouver un point $\mathcal{E}_1$ sur l'ellipse de tête, pour lequel la tangente $n'_1\mu$ serait perpendiculaire aux 2 autres tangentes ξ et $\mathcal{V}$ ce point serait le meilleur de toute la courbe de tête, nous le nommerions le point d'équilibre.

(b) *Point d'équilibre*. — Pour le trouver, remarquons que la tangente $n'_1\xi$ à l'hélice est perpendiculaire à la droite $n'_1G'_1$ qui aboutirait au foyer supérieur des hélices de joint d'intrados.

En effet, l'hélice de joint et par suite la vis de joint, est, sur l'intrados, normale à l'hélice de lit $n'_1d'_1$, et par suite la trace $n'_1G'_1$ de son plan tangent sur le plan de tête, est normale à la tangente $n'_1\mathcal{E}$ de l'hélice de lit; c. q. f. d.

Cela posé, menons à l'ellipse de tête la tangente $G'_1\mathcal{E}_1$; je dis que nous aurons en $\mathcal{E}_1$ le point d'équilibre.

En effet $\mathcal{E}_1F'_1$ aboutissant au milieu F'_1 de l'arc de cercle $\varphi\varphi'$ est la bissectrice des rayons vecteurs $\mathcal{E}_1\varphi$ et $\mathcal{E}_1\varphi'$ et par suite est normale à l'ellipse; elle est donc à la fois la tangente à l'hélice de lit et la tangente au joint de tête, et pour ce point $\mathcal{E}_1$ les trois tangentes au sommet du voussoir se confondent dans le système hélicoïdal et dans le système orthogonal.

Remarque. — Cette propriété d'être tangente à la courbe de tête se conserve dans toutes les projections et en particulier en projection sur la section droite (fig. A'). On aura donc le point d'équilibre $\mathcal{E}'$ (fig. A') en menant du point G' la tangente au cercle de section droite.

§ 47. — Lieu des points d'équilibre — Cylindre d'équilibre.

Le point G'_1 (ou G') foyer des hélicoïdes de joint pour l'intrados jouit de la propriété d'être un point par lequel passe la normale à l'hélice de lit d'intrados, parce que sur l'intrados l'hélice de lit est perpendiculaire à l'hélice de joint, c'est ce qui fait que la formule qui a donné q, s'est déduite de la formule qui donnait p.

$$p = r.\,\text{cotg.}\,\theta \times \text{tg.}\,m$$

en remplaçant m par $\frac{\pi}{2} - m$

ce qui donnait $q = \dfrac{r\,\text{cotg}\,\theta}{\text{tg.}\,m}$.

A ce titre le point G' pourrait être appelé foyer conjugué du foyer F'. — Il en serait de même pour toute hélice de lit appartenant à un cylindre quelconque de rayon r', ce qui veut dire que si dans la formule qui donne sa distance focale:

$$p' = r'\,\text{cotg.}\,\theta\,.\,\text{tg.}\,m'$$

on remplaçait m' par $\frac{\pi}{2} - m'$, on aurait le conjugué de son foyer, c'est-à-dire un point par lequel passerait sur l'élévation de tête (fig. C) la normale à cette hélice.

Cela donnerait une distance ρ' conjuguée de p':

$$\rho' = \frac{r'\,\text{cotg.}\,\theta}{\text{tg.}\,m'}$$

d'où l'on déduit: $\dfrac{q}{\rho} = \dfrac{r}{r'} \times \dfrac{\text{tg.}\,m'}{\text{tg.}\,m}$

mais: $\dfrac{r'}{r} = \dfrac{\text{tg}\,m}{\text{tg}\,m'}$

d'où l'on déduit: $\dfrac{q}{\rho} = 1$ et $q = \rho$.

Cela prouve que les normales aux projections des diverses hélices de lit, aux points où

ces hélices percent le plan de tête (fig. C) passent par un point fixe G_1 et que l'on obtiendrait les points d'équilibre des diverses ellipses de tête, intermédiaires entre l'ellipse d'intrados et l'ellipse d'extrados, en menant du point fixe G_1 chaque fois, une tangente à ces ellipses, lesquelles sont homothétiques et concentriques.

Mais cette propriété d'être tangente se conserve sur toute autre projection, donc, en particulier, sur la section droite (fig. A') on aura les points d'équilibre, tels que le point E'' d'extrados, en menant du point G' une tangente au cercle correspondant de section droite.

Le lieu des points d'équlibre E, E'' est donc, en section droite, le demi-cercle construit sur $0'G'$ comme diamètre.

En réalité, dans tout le corps de la voûte, c'est le cylindre qui a ce cercle pour base. On le nomme le cylindre d'équilibre.

§ 48.- Etude d'un trièdre de tête.

(a) Les trois angles faces. - Considérons le trièdre formé par les trois tangentes n'_1, γ, μ et V, et cherchons-en les éléments. Les 3 angles faces sont faciles à connaître.

1° L'angle $V n'_1 \mu$ est en vraie grandeur sur le plan de tête.

2° L'angle $\mu n'_1 \gamma$ est en vraie grandeur sur le développement de l'intrados (fig. B) en $\mu_1 N_1 \xi_1$

3° L'angle $V n'_1 \gamma_1$ s'obtiendra comme nous allons l'indiquer, en cherchant son rabattement sur le plan de section droite ZOX qui nous a déjà servi pour la recherche du foyer.

A cet effet, remarquons (fig. A') que l'angle que nous cherchons est projeté sur la section droite en $x'n'F'$ et que la droite $F'x'$ est une ligne de front de son plan. Prenons-la comme charnière et rabattons le sommet n' sur le plan de front OZ. Le point n' viendra sur le prolongement de $x'n'$ en un point N_2, et le rayon de rotation $x'N_2$ est en vraie grandeur sur le développement de l'intrados en N_1X_1 (fig. B). Ce qui donne facilement N_1 et par suite, en vraie grandeur $F'N_2x'$ le 3° angle plan. Ce tracé très élémentaire peut encore être simplifié par la remarque suivante.

(b) Remarque. - Menons, par N_2 (fig. A') une parallèle N_2K' à $F'x'$, je dis que le point K' où elle rencontre l'axe est un point fixe.

Calculons $O'K'$, ou mieux encore $F'K'$.

On a :
$$\frac{F'K'}{F'O'} = \frac{x'n'}{x'N_2}$$

mais $F'O' = p = r \cotg \theta \, \tg m$, et le développement (fig. B) donne $x'n' = X_1U_1$ et $x'N_2 = N_1X_1$ par conséquent :

$$\frac{x'n'}{x'N_2} = \frac{X_1U_1}{X_1N_1} = \sin \theta$$

d'où l'on conclut :

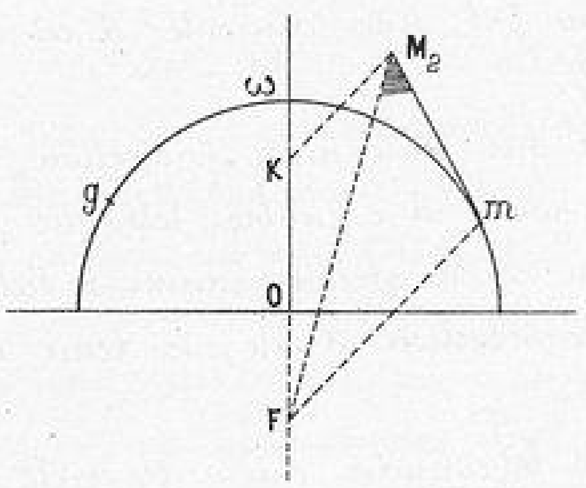
$$F'K' = F'O' \sin \theta = r \cotg \theta \, \tg m \sin \theta = r \cos \theta \, \tg m \quad \text{quantité constante.}$$

Il est facile de voir que sur l'épure des paramètres (fig. F) la ligne $\overline{D\mu}$ donne la longueur $F'K'$.

Le point K', sera nommé le *point de convergence* ; il nous servira pour trouver facilement le 3° angle face de tous les trièdres des voussoirs de tête, ce qui nous permettra de tailler les voussoirs de tête comme nous l'indiquerons plus loin. Résumons la construction (fig. 65 ci-contre).

Soit à trouver cet angle, c'est-à-dire l'angle de l'hélice de lit d'intrados, avec la ligne de joint de tête pour un point m quelconque.

Fig 65.



On joint Fm (D'après la théorie du foyer, c'est la tangente au joint de tête); on mène par le point K de convergence, la ligne KM_2 parallèle à cette droite jusqu'à la rencontre en M_2 avec la tangente au cercle et on obtient en FM_2m l'angle cherché.

Il est facile de voir par cette construction que cet angle est aigu pour tous les points à droite du point le plus haut ω, obtus pour ceux de gauche et qu'il n'est droit que pour le point le plus haut ω.

(c) Les trois angles trièdres. – Connaissant les trois angles faces d'un trièdre de tête on en déduirait facilement les trois angles dièdres. – Dans l'appareil orthogonal un de ces dièdres, celui formé par la surface de lit et par le plan de tête, c'est-à-dire celui qui aurait pour arête la droite qui correspond à n', ψ, serait toujours droit. Les autres varieraient, car ils dépendent du biais de la voûte. Dans l'appareil hélicoïdal le dièdre correspondant à l'arête n', ψ ne sera droit que pour le point d'équilibre.

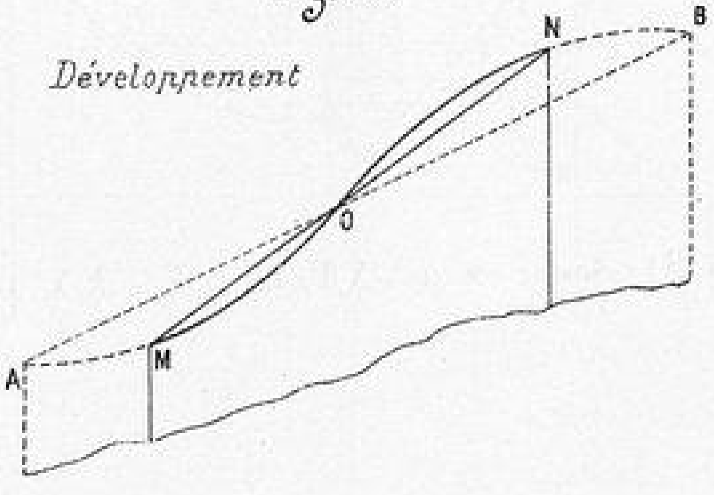
§ 49. – Résumé de l'étude qui précède.

1° L'angle intradossal rectifié ayant été pris plus petit que l'angle intradossal naturel, cela nous donne pour le paramètre $q = r \cot g.\ \theta \cot g.\ m$, une valeur assez grande qui met le point G, foyer supérieur, forcément en dehors du cercle d'intrados, et par suite, permet d'obtenir des points d'équilibre, en menant les tangentes à ce cercle.

2° Ces points d'équilibre seront d'autant plus bas que le point G sera plus haut ce qui est un avantage car il serait facile de se rendre compte que l'appareil hélicoïdal s'écarte d'autant plus de l'appareil orthogonal que l'on se rapproche plus des naissances.

3° On aura donc intérêt soit à descendre dans une mesure raisonnable le point d'équilibre, si l'on emploie une voûte plein cintre. – Soit à supprimer la portion de voûte située au-dessous des points d'équilibre, c'est-à-dire à prendre pour section droite un arc de cercle au lieu d'un cercle complet.

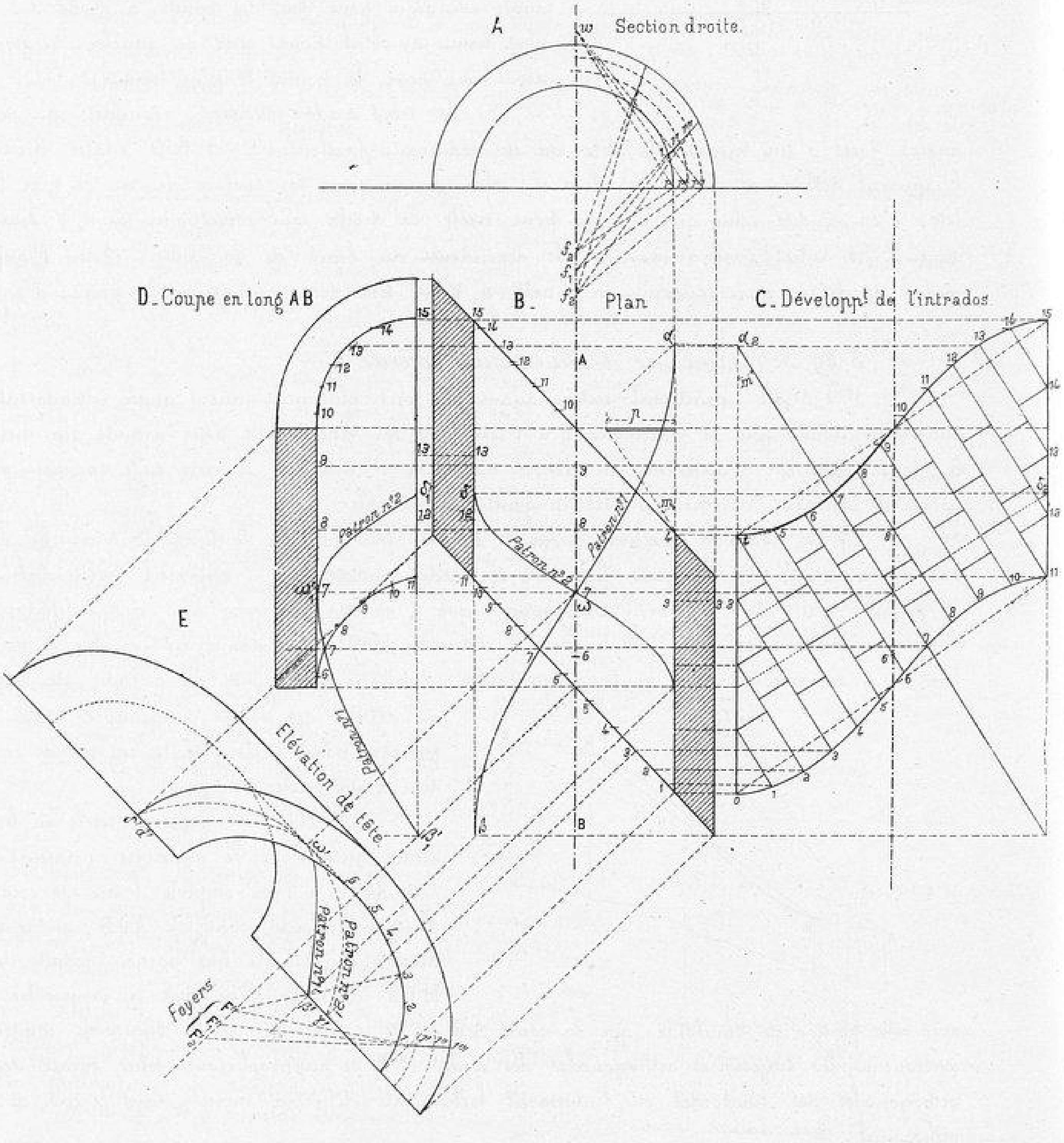
Fig. 66.



4° Le choix d'un arc de cercle au lieu du plein cintre aurait encore un autre avantage c'est que (fig. 66), si l'on emploie l'arc de cercle, au lieu d'une sinusoïde complète AOB, on n'aura, en développement, qu'une portion réduite de sinusoïde MON dont la corde MN se rapprochera bien plus avec cette portion de sinusoïde que la corde AB ne se rapproche de la sinusoïde complète. – Par conséquent les trajectoires orthogonales des cordes MN se rapprocheront plus encore des trajectoires orthogonales des sinusoïdes et l'appareil hélicoïdal différera moins dans ce cas, de l'appareil orthogonal.

Dessin des arches biaises.

Fig 67.



C. – Dessin des arches biaises. – Taille des voussoirs.

Stéréotomie.
16e Leçon.

§ 50. – Dessin des arches biaises. (fig. 67).

a – Épure en développement. – Comme dessin d'ensemble on donne en général, le plan (fig. B), la section droite (fig. A), le développement de l'intrados (fig. C), l'élévation sur un plan parallèle aux têtes (fig. E) et une coupe longitudinale passant par l'axe du cylindre (fig. D).

Sur le développement (fig. C) on a tracé les sinusoïdes, transformées des courbes de tête; on a mené leurs cordes, on a divisé ces cordes en un nombre impair (11, sur l'épure) de parties égales et, opérant comme il a été dit plus haut, on a déterminé en $\alpha_2 \beta_2$ une première hélice de lit et en $\gamma_2 \delta_2$ perpendiculaire à $\alpha_2 \beta_2$ une hélice de joint.

On a fait ensuite, sur le développement (fig. C) la délimitation des voussoirs par des droites parallèles à $\alpha_2 \beta_2$ et à $\gamma_2 \delta_2$.

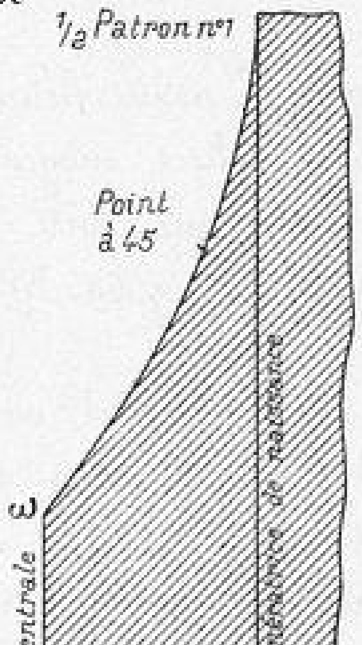
b. – Enroulement de l'intrados. – Préparation des patrons. – On commence par enrouler les deux hélices précédentes. C'est un problème connu et complètement résolu en géométrie descriptive. – Nous conseillons, pour tracer sur les divers plans, élévations ou coupes les projections ($\alpha\beta - \gamma\delta$) ($\alpha'\beta' - \gamma'\delta'$) – ($\alpha'_1 \beta'_1 - \gamma'_1 \delta'_1$) des 2 hélices types, de se servir : 1° des points de naissance, 2° des points ω sur la génératrice centrale, 3° des points situés sur les génératrices à 45° et qui répondent à un quart de pas.

Cela fait, on découpera dans du carton bristol ou sur du bois de placage, quatre patrons distincts, savoir :

1° Le patron N° 1 qui servira pour les hélices de lit sur le plan et sur la coupe en long, et le patron N° 1' qui servira pour les mêmes hélices en projection sur le plan de tête.

2° Les patrons N° 2 et N° 2' qui répondront aux hélices de joint.

Fig. 68



Il est à remarquer que (fig. 68) il suffirait, à cause de la symétrie, de ne tailler que la moitié du patron; à la condition de s'en servir une seconde fois par retournement. Mais si l'on peut tracer le patron complet, cela vaudra mieux.

Les lignes de repère du patron seront la génératrice de naissance α A et la génératrice centrale ω B.

c. – Repérage des patrons sur l'épure. – Comme points de repère, sur l'épure, on aura déterminé sur toutes les projections les points 1, 2, 3 ..... 14, 15 par lesquels doivent passer les hélices, points situés soit sur les courbes de tête, soit sur la génératrice centrale, soit sur les naissances.

Nous pensons qu'il est inutile d'insister davantage sur ce problème, purement graphique. On devra profiter, comme toujours, de toutes les occasions de vérification qui se présenteront.

d. – Joints de tête et panneaux de tête. (fig. 67). – Les joints

courbes de tête tels que 1, 1', 1'', 1''' se traceront approximativement en utilisant la propriété des foyers, de la manière suivante :

Imaginons que nous ayons divisé l'intervalle entre l'intrados et l'extrados en trois couronnes cylindriques d'égale épaisseur (fig. 67 - A) par des cylindres de rayon r' et r''. Nous avons vu plus haut (fig. 64 - A'') qu'à chacun d'eux répondait un foyer F' ou F'' et nous avons donné la manière de les obtenir.

Reportons ces foyers (fig. 67 - E) en F'_1 F'_2.

Cela fait, joignons F' au point 1. Nous avons la tangente au départ du joint de tête.

Nous confondons cette tangente avec la courbe, sur un tiers de l'épaisseur de la voûte, ce qui nous conduit en 1'.

Puis nous joignons 1' au second foyer F'_1 et sur le second tiers de l'épaisseur, c'est-à-dire de 1' en 1'', nous confondons cette tangente avec la courbe. Enfin nous joignons le point 1'' au 3e foyer F'_2, et, pour terminer, nous arrondissons les angles du polygone 1, 1', 1'', 1''' ainsi formé, ce qui nous donne, avec une exactitude bien suffisante, le joint de tête.

Les indications qui précèdent sont suffisantes pour faire comprendre la marche à suivre dans le dessin d'une arche biaise. Pour ne pas embrouiller l'épure, sur les figures B, E et D, nous n'avons représenté que les hélices types et les principaux points de repère.

§ 51. - Taille d'un voussoir courant ; méthode par équarrissement.

a. - *Représentation du voussoir.* - Nous opérerons à peu près comme nous l'avons fait pour la taille du limon d'escalier.

Soit (fig. 69 - A) le plan de l'intrados, vu par dessous. Sur le développement de l'intrados (non représenté ici) on a fait la répartition des pierres et on en a déduit la longueur et la largeur d'un voussoir courant, comptées sur deux hélices α β et γ δ, que nous nommerons la première (α β) l'hélice moyenne de lit d'intrados, et la seconde (γ δ) l'hélice moyenne de joint.

Cela fait, on suppose que, faisant glisser le voussoir dans l'assise hélicoïdale à laquelle il appartient, on ait amené le point de croisement ω, des deux hélices moyennes sur la génératrice milieu du cylindre. Dans cette position le voussoir présentera une sorte de symétrie qui fera qu'il débordera autant à gauche qu'à droite, et qu'en élévation (fig. 69 - B) ses points les plus bas a' et c' seront au même niveau.

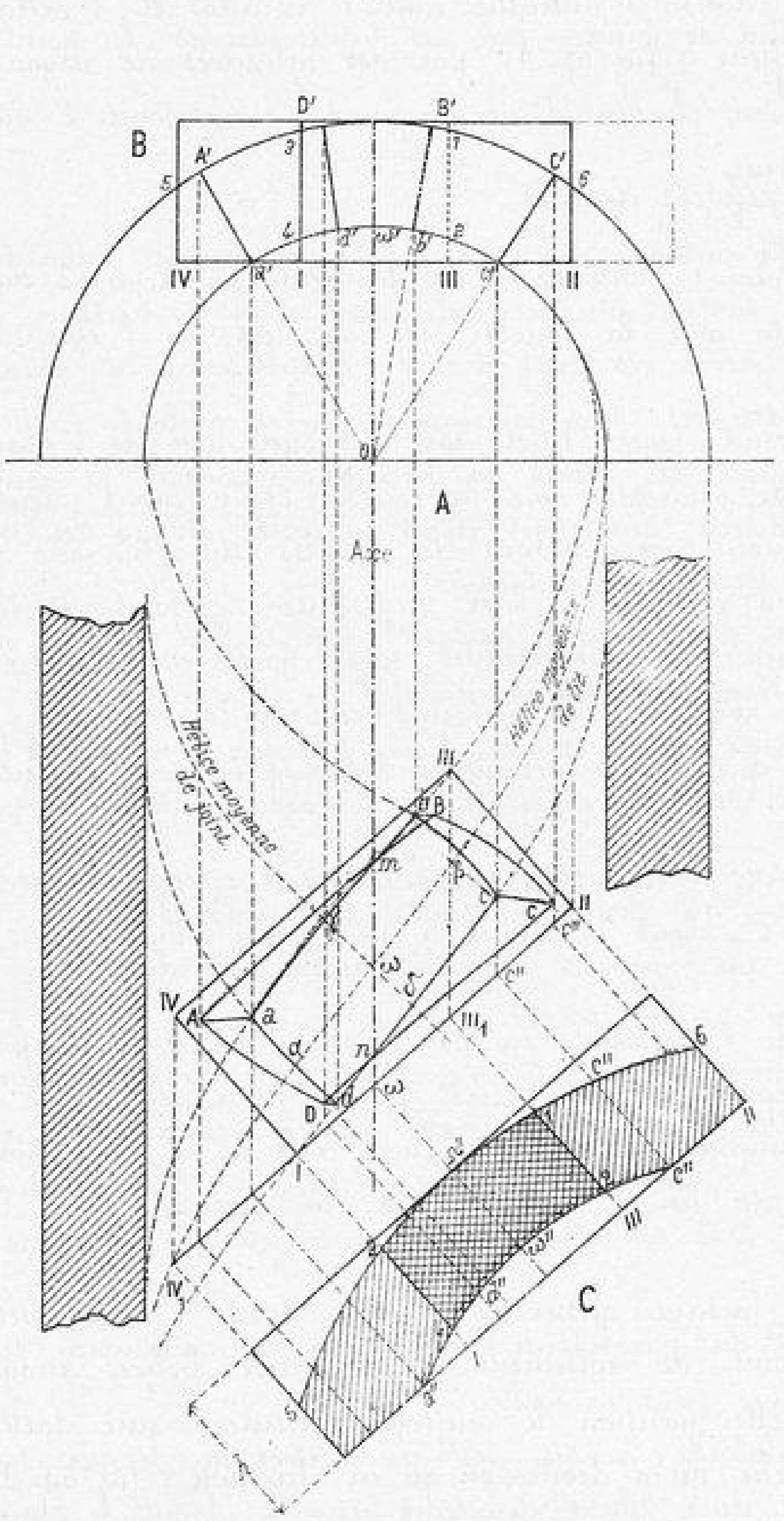
En se servant des patrons de lit et de joint d'intrados et d'extrados on a pu tracer, en plan, les hélices de lit d'intrados a b, c d, celles d'extrados AB, CD, répondant aux mêmes normales a A, b B, c C, d D, et, de même, les hélices de joint d'intrados et d'extrados, et cela aussi bien en plan (fig. A) qu'en élévation (fig. B). Le voussoir courant est donc complètement représenté.

b. - *Solide capable.* - On enferme alors le voussoir dans un parallélipipède capable de le contenir et le serrant d'aussi près que possible. En élévation ses faces de dessus et de dessous sont horizontales ; en plan ses quatre faces verticales I, II, III, IV, sont parallèles aux deux directions générales du voussoir.

c. - *Cylindres d'intrados et d'extrados.* - On procède comme nous avons fait pour le limon d'escalier.

On prolonge les cylindres d'intrados et d'extrados jusqu'à leurs rencontres avec les faces du solide capable,

Fig. 69.



ce qui donnera, comme intersection, deux ellipses, ou plutôt deux arcs d'ellipse. Sur les faces parallèles I, II et III, IV, supposées indéfinies, les ellipses obtenues seraient superposables. Pour n'avoir donc à les tracer qu'une seule fois, on suppose que la face III, IV a été entraînée parallèlement aux génératrices du cylindre et est venue se placer en III_1, IV_1 sur le prolongement de la face I, II. On cherche ensuite (fig. C), par des reports de hauteurs, la vraie grandeur de ces deux ellipses a"ω"c", pour l'intrados, et 5 A", 3, Ω", 1, C" 6 pour l'extrados. Le panneau elliptique ainsi déterminé servira en partie pour la face I, II, en partie pour la face III, IV. On voit (fig. C) par le sens des hachures les portions à affecter à chacune des faces du solide. Le panneau est commun aux deux faces là où les hachures se croisent.

Ces panneaux une fois appliqués sur les faces du solide et les points qui répondent aux mêmes génératrices, numérotés des mêmes chiffres, on prend ces ellipses comme directrices et les cylindres d'intrados et d'extrados peuvent être taillés.

d. Recherche et application des douelles. On aura eu soin d'indiquer soigneusement la génératrice centrale d'intrados ω, et celle d'extrados Ω. Puis, on relèvera sur le développement de l'intrados le rectangle qui répond à la douelle d'intrados, (fig. 70. a, b, c, d) en ayant soin de marquer la génératrice médiane m ω n, qui servira de repère.

On aura facilement aussi le parallélogramme (fig. 70 bis) développement de la douelle d'extrados. Il est facile de le déduire du précédent par la considération de l'angle intradossal m et de l'angle extradossal M (construction indiquée sur les figures 70 et 70 bis).

On appliquera ensuite ces deux panneaux flexibles sur les cylindres taillés en

Fig. 70.

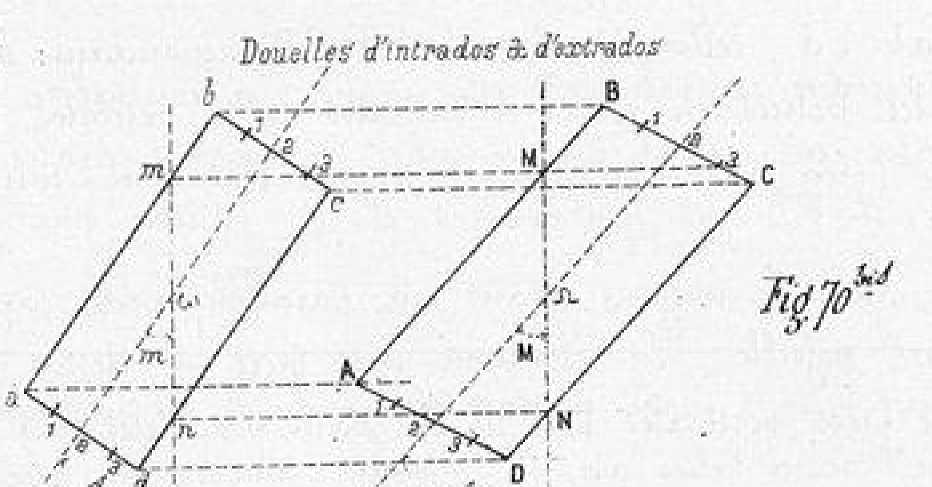


Fig. 70 bis.

les repérant sur les génératrices médianes m n et M N.

e.- Taille des vis de lit et de joint.- Les hélices de lit et de joint seront donc, par l'opération qui précède, indiquées sur leurs cylindres respectifs, avec des numéros 1, 2, 3 .... 1, 2, 3 ..... qui les divisent en parties égales. Il suffira de joindre par des lignes droites, les points numérotés de même, pour avoir les surfaces de vis.

Stéréotomie. 17e Leçon.

§ 52.- Taille par la méthode directe.

(a) Esprit de la méthode.- Cette méthode est basée sur la remarque suivante.

Si l'on considère dans une surface gauche quelconque, à plan directeur, 3 génératrices suffisamment rapprochées, et si on prend ces trois droites (parallèles à un même plan) pour directrices d'une surface réglée qui, dès lors, sera forcément un paraboloïde, cette dernière surface se rapprochera beaucoup de la première et, dans la pratique, pourra la remplacer.

Dans le procédé de taille directe, que nous allons indiquer et qui est presque exclusivement employé sur les chantiers, on opère comme suit :

1° On commence en se servant d'une règle gauche[1] par tailler une des vis de lit, ou plutôt, un paraboloïde s'en rapprochant suffisamment ;

2° De cette surface de lit on passe en se servant d'un panneau monté[1] à la douelle d'intrados ;

3° De la douelle d'intrados, en se servant encore d'un panneau monté, on passe à la seconde surface de lit ;

4° On taille les surfaces de joint, qui sont très sensiblement planes ;

5° On termine par l'extrados que l'on se contente souvent de dégrossir.

(b) Le paraboloïde substitué à la vis de lit.- Soit en plan (fig. 71-A) en a ω b, une hélice de lit d'intrados ; (non plus comme tout à l'heure l'hélice moyenne d'une douelle mais une hélice du contour de cette douelle). Prenons sur cette hélice deux points, a et b, équidistants du point milieu ω et pas trop éloignés de ce point ; menons les trois normales (a A - a'A'), (ω Ω - ω'Ω'), (b B - b'B'). L'une d'elles ω Ω est verticale et est projetée toute entière en un point ω Ω sur le plan horizontal.

Prenons les pour directrices d'un paraboloïde ; ce dernier se confondra sensiblement avec la vis de lit et pourra lui être substitué pour la taille.

On remarquera que le paraboloïde aurait ses génératrices du second système (1,1 - 1',1'), (2,2 - 2',2') etc ..... horizontales, et ses deux plans directeurs seraient, l'un, le plan horizontal, l'autre le plan vertical.- En réalité c'est un paraboloïde droit puisque ses deux plans directeurs sont perpendiculaires l'un sur l'autre.

Remarquons aussi que la directrice centrale ω Ω est inutile à considérer et qu'il suffirait pour engendrer ce paraboloïde de diviser en un même nombre de parties égales aux points 1, 2, 3, ... 1, 2, 3 ...... les segments a A, et b B des génératrices et de joindre par des droites les points correspondants.[2]

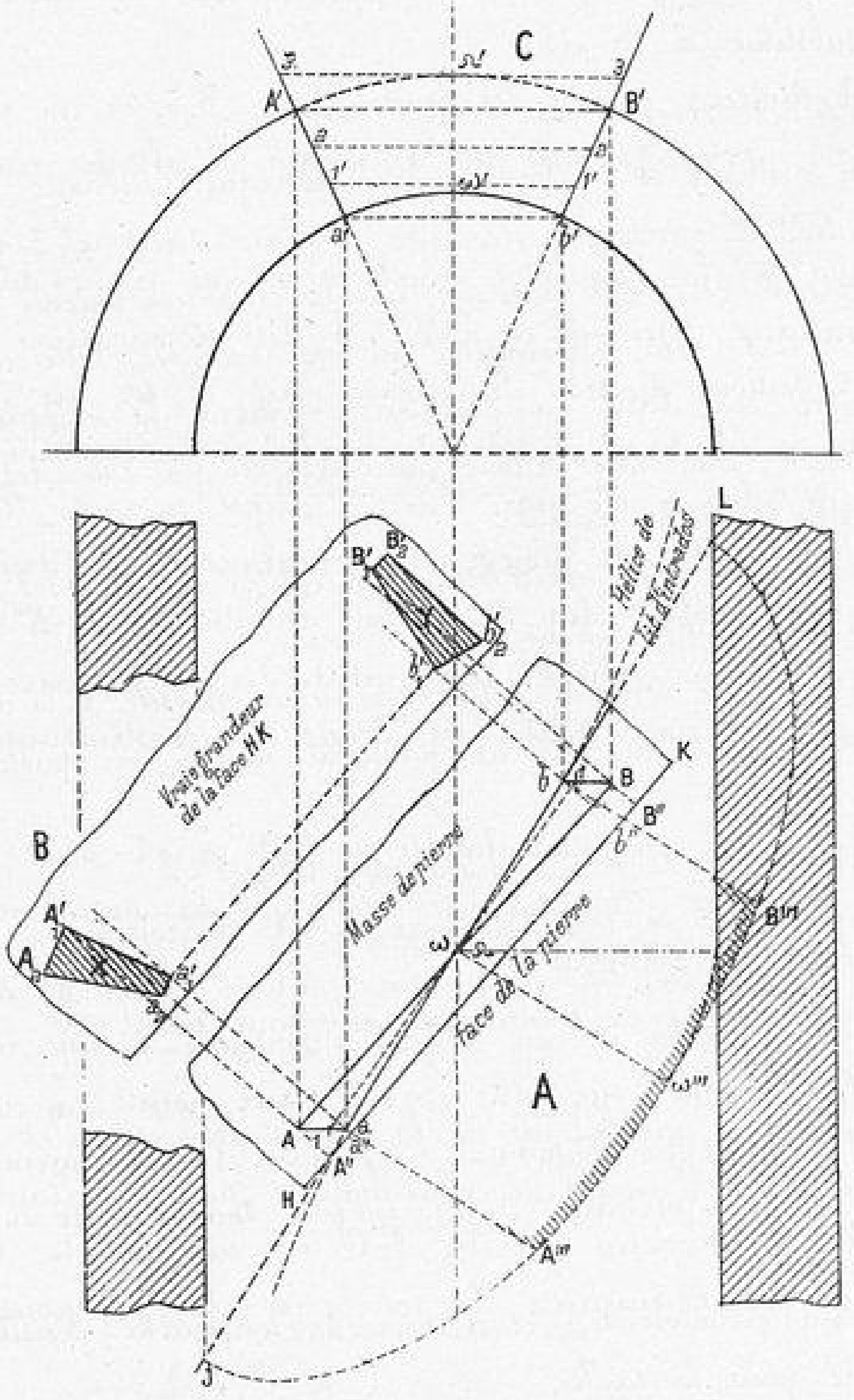
---

(1) Nous indiquons plus loin la construction et l'usage de la règle gauche et du panneau monté.

(2) Remarquons aussi, en passant, que l'arc d'hélice a b, se confondra sensiblement avec l'arc d'ellipse, section du cylindre par le plan vertical JL.

Les droites de l'espace a A et b B, occupent l'une par rapport à l'autre, des positions relatives bien déterminées. Si nous pouvions dans l'intérieur d'une pierre, non équarrie à l'avance, faire apparaître deux droites occupant ces mêmes positions relatives, il nous serait facile, ensuite, de tailler cette pierre en forme de paraboloïde.

Fig. 71.



(c) *Règle gauche.* – A cet effet : Imaginons (fig. 71. A) que nous ayons une masse de pierre sur l'emplacement où devra se trouver le voussoir et que, dans cette masse, les deux directrices a A et b B aient été trouvées.

Supposons aussi, pour la facilité du raisonnement, qu'une face HK de cette pierre ait été dressée bien plane, que sur cette face HK nous ayons appliqué une planche et que nous ayons cloué normalement à cette planche deux autres planchettes en forme de trapèzes AA"aa" et BB"bb" qui seraient les trapèzes projetant les génératrices Aa, Bb sur la face HK ; nous aurons ainsi (fig. 72) ce que l'on nomme une règle gauche.

Pour la construire on cherchera (fig. 71-B) en $A'_1a'_1$ – $B'_1b'_1$, la vraie grandeur de la face HK.

Elle est obtenue facilement en donnant quartier à la pierre et en y reportant les hauteurs prises sur la figure 71-C.

Quant aux trapèzes $A_1A_2a_1a_2$, on en a cherché en X et Y, figure 71 - B le rabattement.

On a : A'_1A_2 (fig. B) = AA" (fig. A) etc...

On découpera donc des planchettes, ou mieux des lames de zinc épaisses, à la grandeur de ces trapèzes X et Y ; on les placera (fig. 72) normales à la planche MN, en en appliquant la tranche sur les droites A_1a_1 – B_1b_1 et on les consolidera, si cela est nécessaire, par de petites équerres. – La règle gauche sera construite.

Fig. 72.

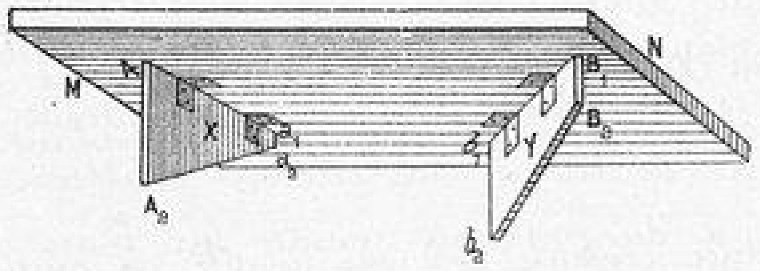
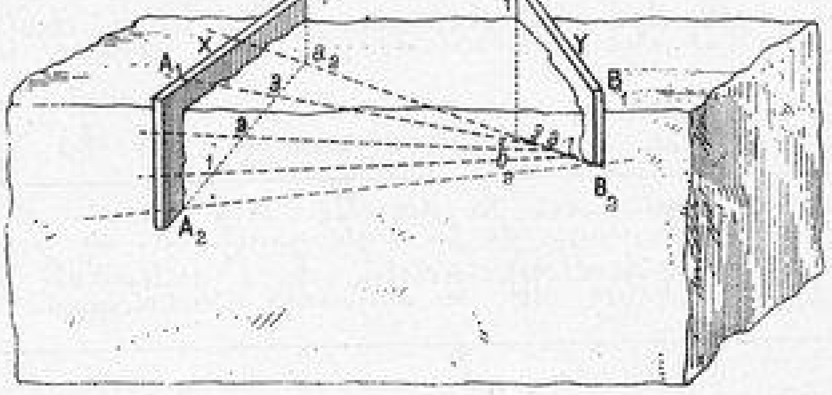


Fig. 73.



(d). Taille du premier lit. - Après quoi prenant une pierre (fig. 73) grossièrement équarrie, comme elle l'est sortant de la carrière, il suffira de pratiquer deux jouées $A_2 a_2$ - $B_2 b_2$ telles que en y présentant la règle gauche les deux trapèzes X et Y de cette dernière viennent y occuper rigoureusement leur place. Le fond $A_2 a_2$ - $B_2 b_2$ des jouées ainsi pratiquées donnera les deux génératrices du paraboloïde, que l'on substitue à la vis.

Pour tailler le paraboloïde, on divisera ensuite les droites $A_2 a_2$ - $B_2 b_2$ en un même nombre de parties égales aux points 1, 2, 3 ..... 1, 2, 3 ..... (fig. 73) ce qui permettra d'obtenir autant de génératrices du 2e système que l'on voudra.

(e) Panneau monté. - On voit (fig. 74) la perspective cavalière d'une partie du cylindre d'intrados, en a ω b l'arc d'hélice considéré déjà, et en a A, b B, les normales à l'intrados. De plus on a ajouté, en a M et b N, 2 sections droites. Reportons-nous à la fig. 71 - A et remarquons que les 3 points a ω et b de la sinusoïde étant en ligne droite, nous pouvons, sans erreur sensible, remplacer l'arc d'hélice a ω b par l'arc d'ellipse suivant lequel le cylindre d'intrados serait coupé par le plan JL qui projette horizontalement la droite a b[1]. - Cette cerce elliptique a ω b serait facile à établir (fig. 71 - A) en rabattant en A''' B''' la section faite dans le cylindre d'intrados par le plan vertical qui aurait J a ω b L pour trace.

Cela posé, matérialisons, pour ainsi dire, toutes ces lignes en construisant le panneau monté (fig. 74).

A a M et B b N seront deux biveaux-cerces circulaires, en bois; a ω b sera une cerce elliptique rattachée en biais aux deux premières. Des traverses de consolidation, non indiquées sur la figure 74, assureront l'invariabilité du système.

Enfin sur un carton flexible on relèvera la contre-cerce elliptique F G a ω b, dont la vraie grandeur est fournie en A'' B'' fig. 71.

(f). Taille de la douelle d'intrados. - Le paraboloïde de lit ayant les normales a A et b B pour directrices est supposé taillé comme nous l'avons dit plus haut. On y applique alors, en se repérant sur les 2 points a et b, le panneau flexible F G et, en suivant le contour elliptique a ω b, on y marque, avec une pointe traçante, la courbe a ω b, qui nous remplace, sans erreur sensible, l'arc d'hélice.

Cela fait, on présente le panneau monté en appliquant a A, sur la normale, génératrice du paraboloïde et la cerce elliptique sur la courbe qui vient d'être tracée. - La cerce circulaire M a prend forcément alors la position d'une section droite ce qui permet de pratiquer dans la pierre une jouée susceptible de la recevoir exactement.

En déplaçant ensuite le sommet a du panneau monté sur l'arc d'hélice a ω b, et le mettant successivement en a, ω, etc...... On pratiquera autant de jouées de section droite que l'on voudra et on en déduira l'intrados en reliant ces sections droites par des génératrices.

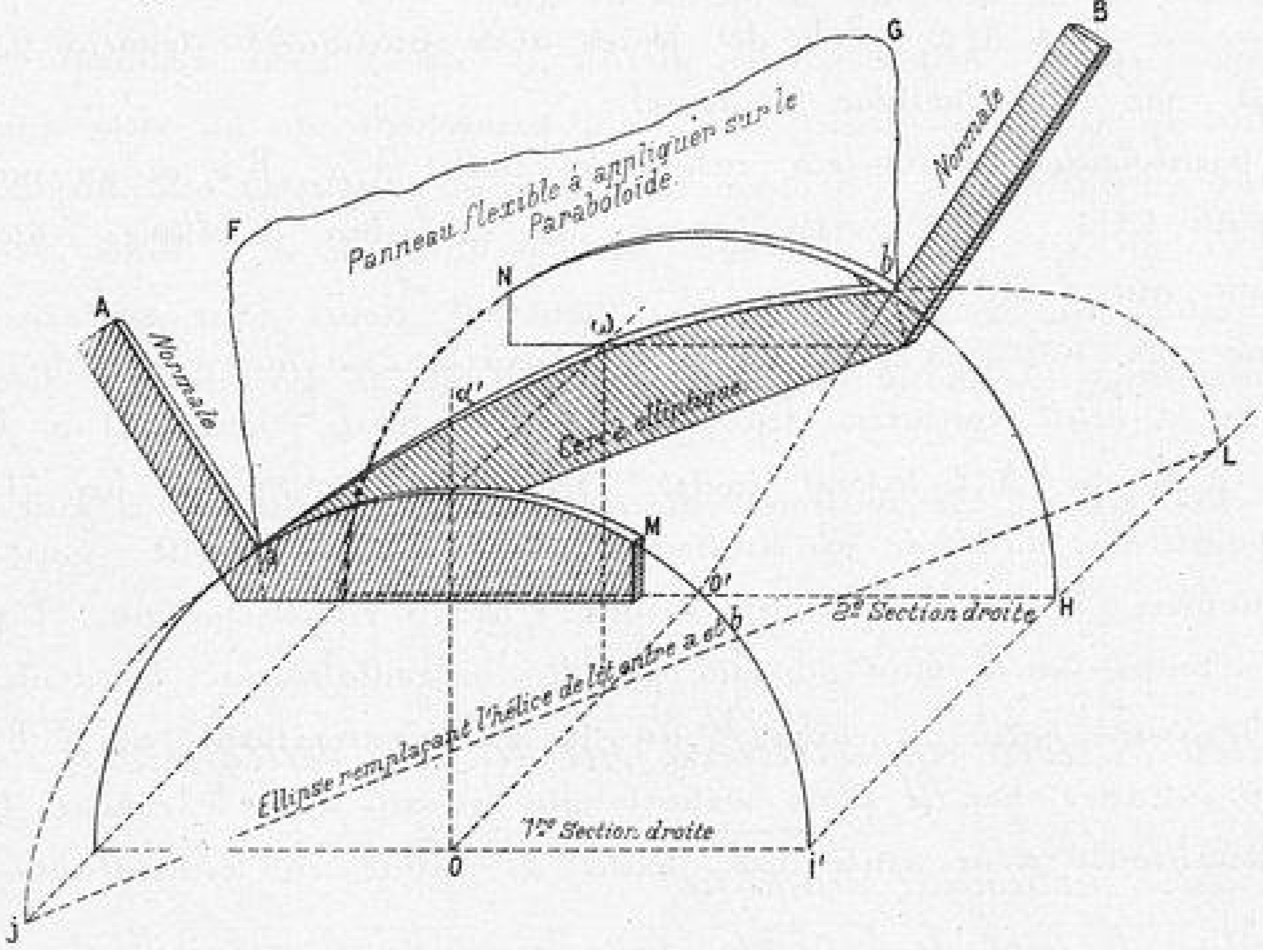
(g). Taille du second paraboloïde de lit. - Soit en prenant sur les sections droites des arcs égaux entre eux, soit en appliquant sur la douelle qui vient d'être taillée un panneau de forme rectangulaire relevé sur le développement de l'intrados, on pourra tracer

---

[1] Voir la note 2 au bas de la page 260.

l'hélice, ou plutôt la seconde ellipse de lit qui limite la douelle.

Fig. 74.



Après quoi en se servant du panneau monté en ordre inverse, c'est-à-dire : appliquant la cerce diagonale a ω b sur cette ellipse et l'autre cerce circulaire sur une des sections droites déjà faites on pourra faire apparaître deux génératrices du second paraboloïde de lit ce qui suffira pour en terminer la taille.

Nota. - On voit que le panneau monté peut ne contenir ni la seconde cerce circulaire b N, ni la seconde normale b B. - Nous les avons indiquées sur la figure 74, afin de mieux faire comprendre la position du panneau monté ; mais en réalité ce panneau ne comporte que les trois branches a A (ligne droite) - a M (arc de cercle) et a b (arc d'ellipse).

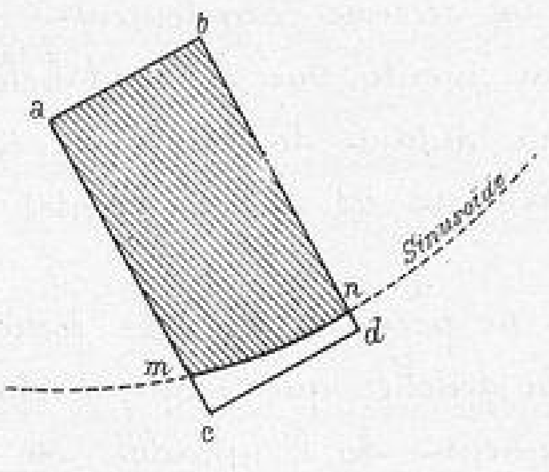
(h) Surfaces de joint. - Les normales qui les limitent sont apparues sur la pierre par la taille déjà faite. On les divisera en parties égales et joignant les points de division par des droites on aura les paraboloïdes de joint (Ils diffèrent très peu de plans).

(i) Extrados. - L'extrados s'achève ensuite grossièrement et en général sur les voussoirs mis en place.

§ 53. - Voussoirs de tête.

(a) Douelle d'intrados. - Pour avoir un voussoir de tête on commence d'abord par tailler, par l'une des deux méthodes précédentes, un voussoir courant suffisamment long pour contenir le voussoir de tête demandé.

Fig. 75.



Puis, se reportant au développement de l'intrados, on voit (fig. 75) qu'un voussoir de tête limité du côté de l'intérieur de la voûte par une hélice a b normale aux lignes de lit a c et b d, est limité du côté de la tête par la sinusoïde m n, développement de l'ellipse de tête. Le panneau flexible a b m n, relevé sur le développement, sera donc appliqué sur la douelle d'intrados du voussoir courant et avec une pointe traçante on obtiendra l'arc de tête m n.

(b) Plan de tête. - Pour faire apparaître le plan de tête il suffirait, puisque l'on a déjà un arc d'ellipse qui lui appartient

d'en connaître une autre droite, ou une autre courbe.

Or nous avons indiqué (fig. 65) la manière d'obtenir l'angle que font entre elles, la tangente à l'hélice de lit et la tangente au joint de tête.

Relevons cet angle (fig. 65) sur un carton flexible et après avoir remarqué que l'hélice de lit et la courbe de tête appartiennent toutes deux au paraboloïde de lit déjà taillé, nous appliquerons ce carton sur le paraboloïde (quoique ce dernier ne soit pas une surface développable); en faisant coïncider un des côtés de l'angle avec la tangente à l'ellipse de tête, l'autre côté nous donnera la direction du joint de tête. Nous pourrons donc faire apparaître ensuite le plan de tête, et finalement, vérifier la taille en appliquant le panneau de tête sur le voussoir terminé.

(c). Voussoirs des naissances. Les voussoirs de naissance se tailleront d'une manière analogue.

D. Voûtes biaises appareillées sur la tête seulement.

§ 54. Appareil dit: hélicoïdal simplifié.

(a) Description. Lorsque le corps de la voûte doit être construit en moellons ou en briques, on se contente d'appareiller en pierres de taille les arcs de tête et les sommiers. Alors on simplifie encore les tracés et aux surfaces de lits et de joints en forme de vis à filets carrés on substitue des lits et des joints plans.

Nous supposerons que la voûte soit surbaissée, ce qui est favorable à la simplification que nous allons indiquer (fig. 76).

Le plan A donne en OZ_1 l'axe de la voûte. La section droite (C) montre en $c'a'\omega'b'd'$ le cercle complet de section droite.

Mais la voûte étant surbaissée, on se donne la flèche h de la voûte, c'est-à-dire sa montée et la partie utile de la section droite est l'arc de cercle $a'\omega'b'$.

Néanmoins, nous appellerons r, le rayon $o'c'$ du cercle complet.

Le plan (A) donne en CD le mur de tête, lequel fait avec l'axe l'angle du biais, θ. On trouve facilement par des reports de cotes (fig. B), sur l'élévation, la vraie grandeur $C'A'\Omega'B'D'$ de l'ellipse de tête, dont la seule partie $A'\Omega'B'$ est utile. On fait comme à l'ordinaire le développement de l'intrados (fig. D) et l'on obtient, pour transformée de l'arc d'ellipse de tête, l'arc de sinusoïde $A_1\Omega_1B_1$.

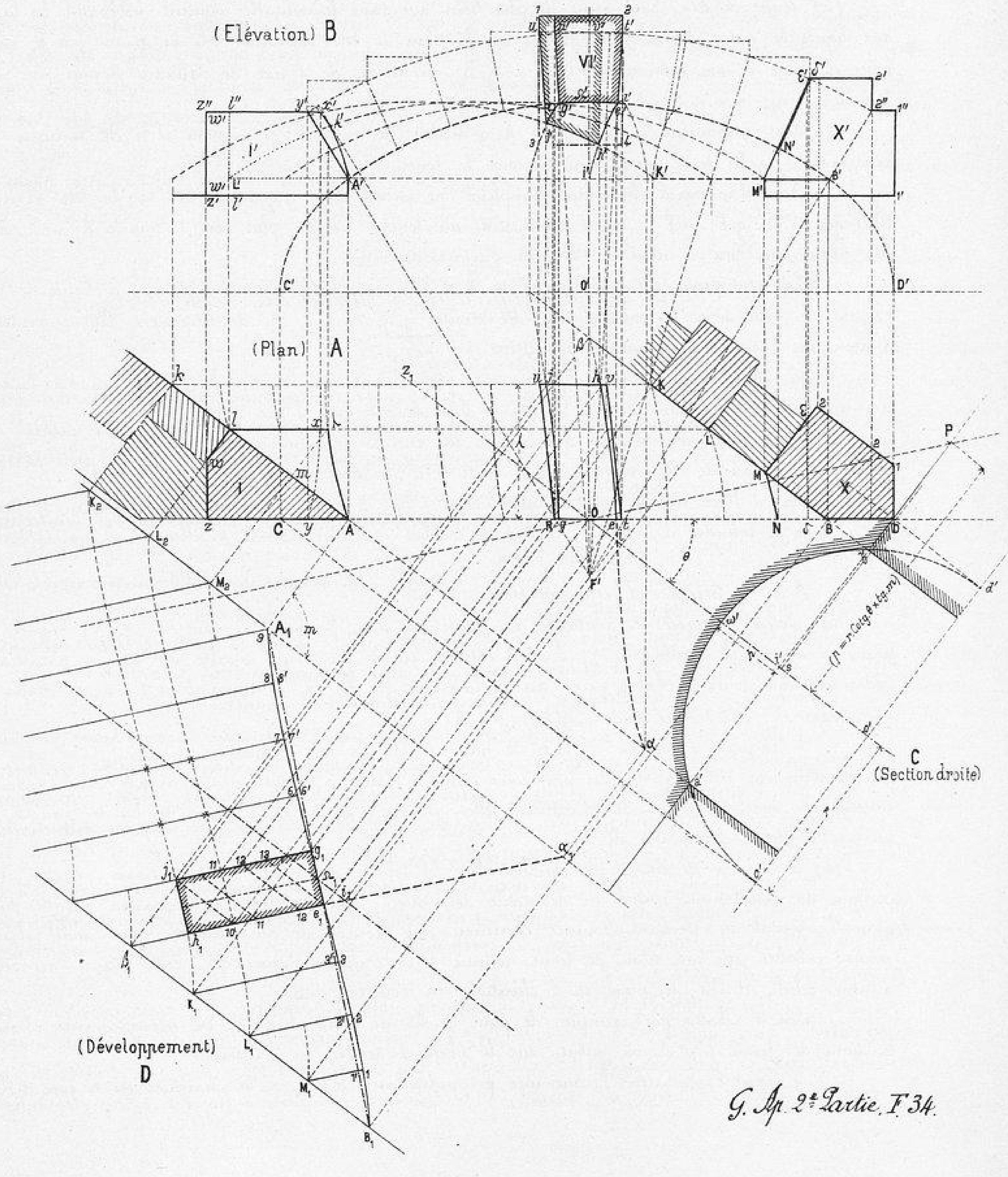
On remarquera combien cet arc de sinusoïde se rapproche de la droite $A_1\Omega_1B_1$ qui réunit ses extrémités, de sorte qu'en prenant pour lignes de lit les perpendiculaires telles que $\alpha_1\beta_1$ à la corde, au lieu des perpendiculaires à la sinusoïde, on commettra une erreur peu sensible.

Dès lors, on divise la corde B_1A_1, en un nombre impair, neuf par exemple, de parties égales, aux points 1', 2', 3', ... 8', 9'; on mène par les points de division des perpendiculaires à cette corde; elles recoupent aux points 1, 2, 3 ..... 8, 9 la sinusoïde, ce qui permet, par des lignes de rappel, de déterminer en plan (fig. A) et en élévation

(fig. B) les limites des voussoirs.

Remarque. – Les arcs de sinusoïde 1,2 – 2,3, etc...... de la figure D, sont égaux aux arcs de l'ellipse de tête de la figure B, puisque les longueurs se conservent dans le développement.

Fig. 76.



Sur le développement les douelles des voussoirs sont limitées aux sinusoïdes K_1K_2 - L_1L_2 et M_1M_2 parallèles à la sinusoïde de tête, de telle sorte que, en réalité, dans l'espace les voussoirs seront limités par des plans de découpe tels que Mm - Ll et Kk, parallèles au plan de tête (fig. A).

On enroule l'intrados et l'on obtient facilement sur le plan et sur l'élévation les projections des hélices qui résultent de l'enroulement des lignes de lit telles que $\alpha_1 \beta_1$

(b) *Plans de lit*. - Nous avons vu plus haut que dans le véritable appareil hélicoïdal les tangentes aux lignes de sortie des surfaces de lit sur le plan de tête passaient par un point fixe F' nommé foyer et situé à une distance $p = O'F'$ (fig. B) au-dessous de l'axe du cylindre donnée par la formule : $p = r.\cot g.\theta \times tg.m.$

Nous construirons en SP (fig. A, à droite) la quantité p, comme il a été indiqué et la reportant (fig. B) de O' en F' nous aurons le foyer.

Dans l'appareil hélicoïdal simplifié on prend pour lignes de lit sur la tête, les droites telles que A'F' - g'F' - e'F'....... qui aboutissent au foyer. Et, de plus, on s'impose d'avoir des lits plans, au lieu d'avoir des lits en surfaces de vis.

Par conséquent (fig. B) si jg' et h'e'...... sont les projections des arcs d'hélice de lit jg et he, qui sont les enroulements des droites j_1g_1 et h_1e_1 du développement, cette convention d'avoir des lits plans revient à admettre :

1° Qu'un plan de lit, celui de gauche par exemple du voussoir VI, est défini par la droite n'g' qui converge au foyer et par le point J' extrémité de l'arc d'hélice ;

2° que, comme conséquence, ce plan de lit recoupe le plan arrière du voussoir Kk, qui est parallèle au plan de tête suivant une droite J'n' parallèle à g'n' ;

3° que, à l'arc d'*hélice* g'J', on lui substitue l'arc d'*ellipse* suivant lequel ce plan de lit g'n'n'j' recoupe le cylindre d'intrados. - Ces deux courbes ne diffèrent pas sensiblement l'une de l'autre.

§ 55. - Taille d'un voussoir.

(a) *Solide capable et abattage des plans de lit*. - Prenons le voussoir N° VI lequel est figuré à une échelle double fig. 77. - On l'entoure dans un solide capable qui est un parallélipipède rectangle dont la base, prise sur l'élévation (fig. B) est le rectangle 1, 2, 3, 4, et dont la profondeur, h, est donnée sur le plan, (fig. A).

L'élévation donne en n't'e'g' le panneau de la tête d'avant et en n'J'h'v' celui de la tête d'arrière. On applique les panneaux sur les faces d'avant et d'arrière du solide capable et, dès lors, ayant des directrices telles que n'g' et n'J', du plan de lit de gauche, cela permet d'abattre les plans de lit.

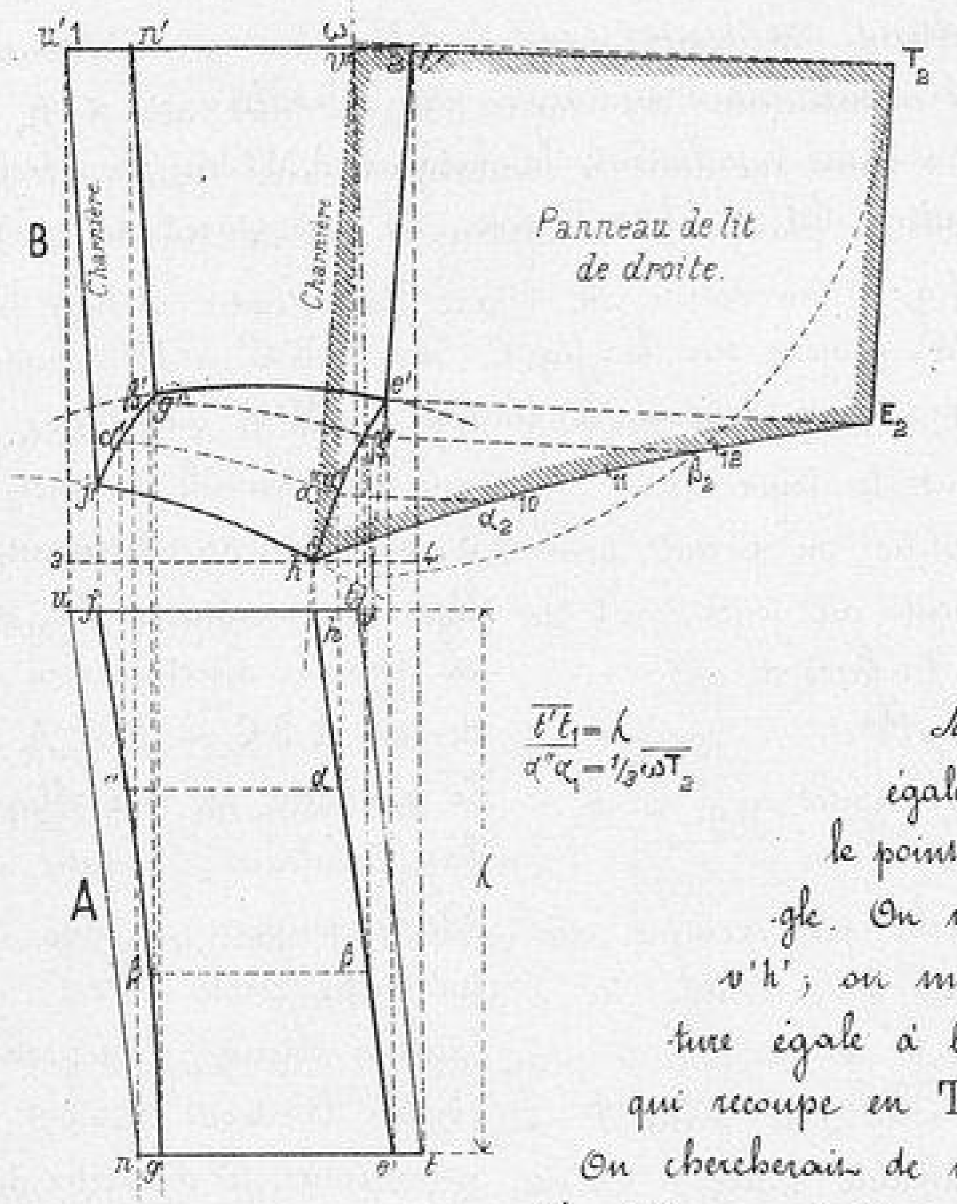
(b) *Panneaux de lit*. - On cherche alors les vraies grandeurs des panneaux. C'est le problème du rabattement étudié en géométrie descriptive. Pour le résoudre on pourra rabattre sur un plan horizontal en prenant comme charnière une horizontale du plan de lit ; mais il vaudra mieux rabattre sur un plan de front comme l'indique la figure 77. Cette figure reproduit, à une échelle double, le plan et l'élévation du voussoir étudié.

Soit à rabattre, par exemple, le plan de lit de droite, h'e'v't'. On prend, comme charnière, la ligne de front h'v' et on rabat sur le plan d'arrière du voussoir.

Le point t' vient en T_2 sur une perpendiculaire $\omega t' T_2$ à la charnière et à une distance

ωT_2 de cette charnière qui est l'hypothénuse ωt_1 d'un triangle rectangle qui a pour premier côté de l'angle droit $t'\omega$ le rayon de rotation projeté, sur le plan vertical, et pour second côté $t't_1 = \lambda$ la profondeur du point tt' en avant du plan de front sur lequel on rabat.

Fig. 77.



On rabat de même le point e' en E_2 et les points α' β' de l'ellipse en α_2 et β_2, par la même méthode.

On remarquera que α et β étant dans des plans de front qui sont à $1/3$ et à $2/3$ de l'épaisseur λ, leurs rayons de rotation sont le $1/3$ et les $2/3$ du rayon de rotation ωT_2 du point tt'.

Dès lors le panneau de lit de droite est connu.

Nota. — Comme vérification la droite $v'T_2$ doit être égale à la ligne vt du plan. Ce qui permet d'obtenir le point T_2 sans faire la construction du triangle rectangle. On mène la droite $t'\omega$ perpendiculaire sur la charnière $v'h'$; on met une pointe de compas en v' et avec une ouverture égale à la ligne vt du plan, on trace un arc de cercle qui recoupe en T_2 la perpendiculaire $\omega t'$ prolongée.

On chercherait de même celui de gauche.

Cela fait, on applique les panneaux sur les plans de lit qui sont taillés et, en suivant, avec un crayon, le contour des parties elliptiques telles que $\alpha_2\ \beta_2$ .... on a des courbes qui appartiennent au cylindre d'intrados.

Pour tailler ce dernier on aura, sur le développement (fig. 76 - D) marqué des génératrices telles que J_1 10 - 11.11 - 12.12, etc..... On aura pris sur ce développement les longueurs h,10 - 10.11 - 11.12 etc..... interceptées sur les lignes de lit, et comme, dans l'enroulement, les longueurs se conservent, on les reportera (fig. 77) en h.10 - 10.11 - 11.12, sur l'ellipse $h'E_2$. On fera de même sur les deux panneaux de lit et, dès lors, ayant les points de départ et les points d'arrivée d'autant de génératrices du cylindre que l'on voudra, ce dernier sera facilement taillé.

Nota. — Les deux sommiers N° I et N° X s'étudieront d'une manière analogue. — On remarquera que afin d'avoir une pierre d'angle plus massive, le sommier de droite N° X, placé du côté de l'angle obtus, est en réalité la réunion de deux voussoirs.

Sur le sommier de droite N° X' l'hélice MN a pour projection verticale une ligne M'N' presque droite et presque normale à l'ellipse de tête. Cela tient à ce que le point N' est très voisin du point d'équilibre.

Voûtes coniques.

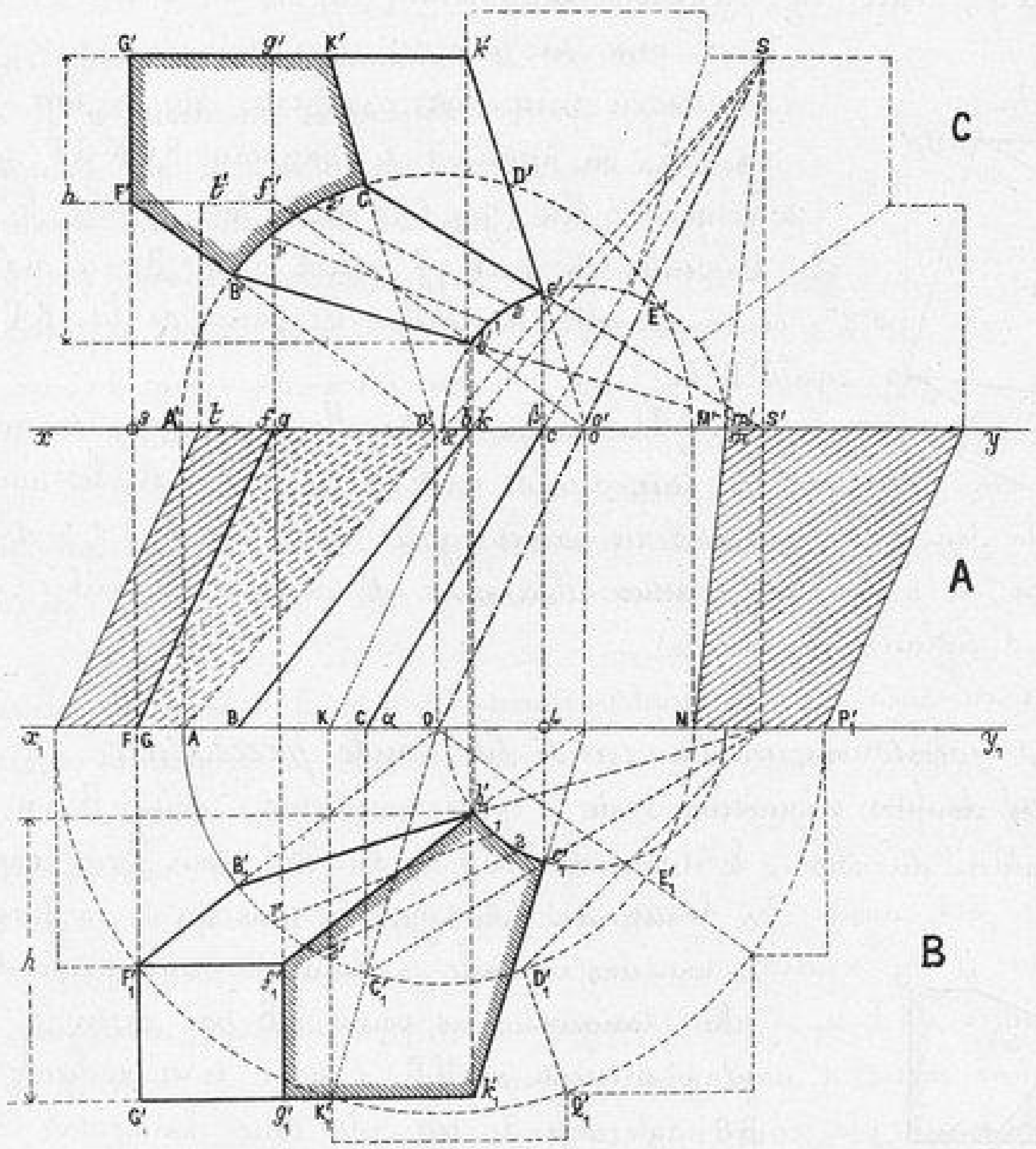
Stéréotomie.
18e Leçon.

§ 56. – Porte conique biaise dans un mur droit (fig. 78).

(a) Données. – Un mur est limité par deux plans verticaux parallèles xy et x_1y_1 ; une ouverture AM-a'm' est à pratiquer dans ce mur ; seulement la largeur AM sur un parement est plus grande que la largeur a'm' sur l'autre. Tel est le cas pour les embrasures de canon pratiquées dans les murs d'un fort.

On se donne la courbe de tête AM, projetée sur la fig. C, en A'B'C'..... M'. Supposons ici que ce soit une demi-circonférence. – On prendra pour couvrir le trapèze Aa'M'm' du plan (fig. A) un cône dont le sommet sera en S, au point de croisement des deux lignes de naissance Aa' et Mm', et dont la directrice sera le cercle de tête A B C...... M – A'B'C'.... M'. Ce sera donc un cône oblique, à base circulaire. L'autre mur de tête, xy, coupera ce cône suivant un autre cercle a b c.... a'b'c'.... facile à obtenir ; son centre est OO' sur la droite OS – O'S' que nous nommerons le diamètre du cône[1]. Si la droite SO – S'O' était perpendiculaire aux plans de tête alors la porte serait droite et son intrados serait un cône de révolution ; SO – S'O' serait l'axe de ce cône.

Fig. 78.



(b) Appareil. – Le cercle de tête a été divisé en cinq parties égales ; par les points A'B'C'D' E'M' on a mené des génératrices et les surfaces de lit sont des plans passant par ces génératrices et par le diamètre SO – S'O' du cône. Mais il faut remarquer, dès maintenant, que ces plans de lit ne sont pas normaux au cône ; si le biais est peu prononcé cela n'a qu'un faible inconvénient. – Nous indiquerons plus loin comment il faudrait mener les lignes de lit BF' – C'K' ..... sur la tête, pour que la normalité soit réalisée.

---

[1] Le cône étant oblique la droite OS – O'S' n'est pas un axe de symétrie dans le sens rigoureux du mot. – En réalité c'est le diamètre des sections planes parallèles aux têtes.

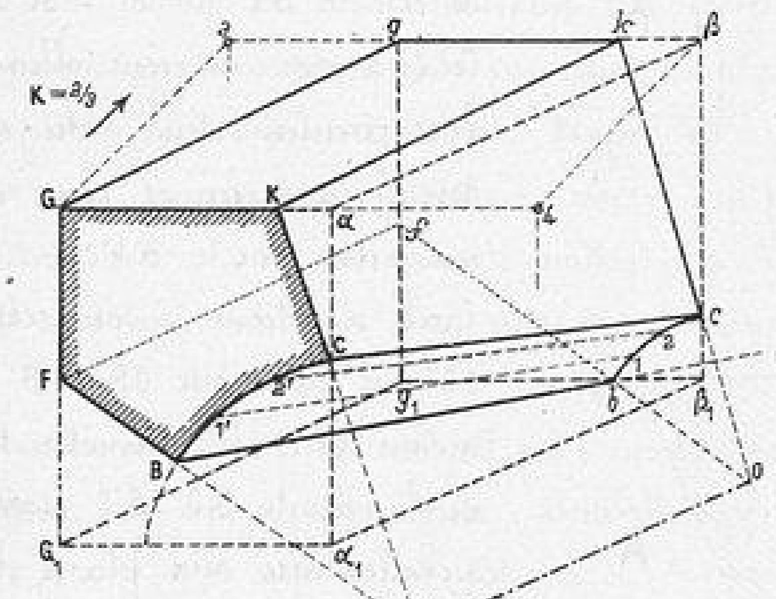
La figure C, montre, en élévation, le 2e voussoir de gauche, projeté en regardant du côté du grand cercle de tête. – Ce même voussoir est projeté, fig. B, en le regardant du côté de la petite tête. – Les lignes de lit sur les deux têtes, telles que C'K' et c'k', sont parallèles et divergent, la première du point O' et la seconde du centre o'.

Latéralement le voussoir est limité par un plan Ff (fig. A) parallèle au diamètre OS du cône; on adopte cette disposition dans les voûtes coniques afin que les panneaux de lit soient terminés latéralement par des droites Ff – F'f', parallèles à ce diamètre, et, par conséquent, horizontales. – A la partie supérieure, si l'appareil est en tas de charge, le voussoir est limité par un plan horizontal G'K'k'.

§ 57. – Taille du voussoir.

On emploie la méthode par équarrissement. – Le solide capable est un prisme droit dont la base est un quadrilatère αβGg, relevé en projection horizontale (fig. A) et dont la hauteur, h, est prise sur une des élévations. La figure 79 le montre en perspective cavalière. Sur la face de tête, αα₁GG₁ on applique le panneau BCKGF relevé sur la grande tête (fig. C) et sur la face arrière le panneau de petite tête bckgf relevé (fig. B), ce qui suffit pour permettre de tailler les plans de lit KC kc, et FB fb.

Fig. 79.



Pour tailler la douelle conique on se guidera sur les deux arcs de cercle BC et bc; on les aura même divisés en parties égales aux points 1.2.3 et 1'2'3' ce qui assurera la place d'un certain nombre de génératrices.

§ 58. – Tracé des joints normaux dans la voûte précédente.

Reprenons (fig. 80) les données géométriques de l'épure précédente. – Soit bB, un point du cercle de tête, et S, le sommet du cône. – Le plan de lit, devrait être, pour bien faire, normal à l'intrados. Il suffirait, pour qu'il en fût ainsi, qu'il contînt une normale, c'est-à-dire une perpendiculaire au plan tangent, au point bB par exemple. – Or le plan tangent en bB a pour trace verticale la tangente Bθ, au cercle de tête. Sa trace horizontale est Sθ. – La normale est bg et Bg' perpendiculaires respectivement aux traces Sθ et Bθ du plan tangent.

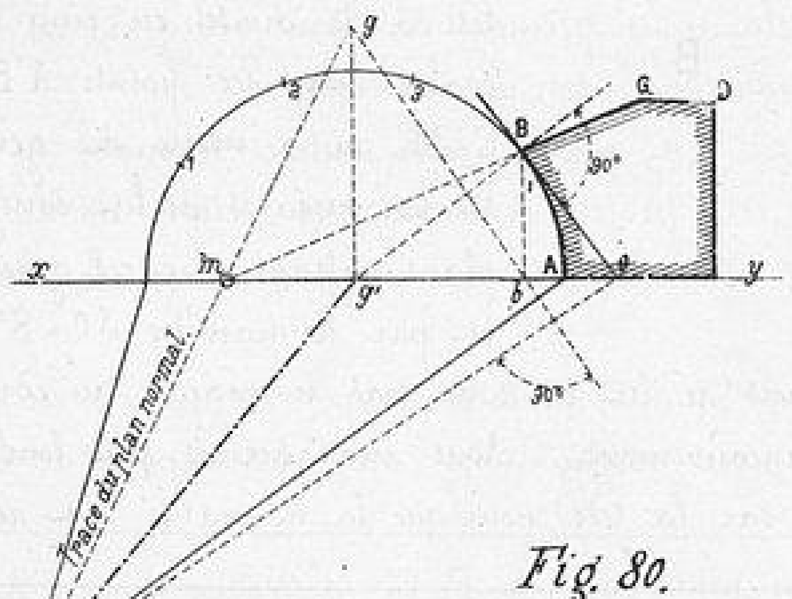


Fig. 80.

Dès lors on prend en g'g, la trace horizontale de cette normale et, joignant Sg, on a la trace horizontale du plan normal, laquelle rencontre en m, la ligne de terre, ce qui donne en mB, la trace verticale du plan normal. – Telle devrait être la véritable ligne de lit sur

le plan de tête. On voit qu'elle diffère notablement du rayon $q'B'$.

§ 59. – Lunette cylindro-conique, ou porte conique biaise, dans un mur en talus, rachetant un berceau cylindrique (fig. 81).

(a). – Préliminaires. – Dans cet exemple nous emploierons un cône de révolution ; par conséquent, en faisant passer tous les plans de lit par l'axe, nous satisferons à la condition de normalité ; seulement nous ne serons plus maître de choisir à notre gré la courbe de tête ; et nous serons forcés d'accepter l'ellipse, d'une forme plus ou moins satisfaisante, que nous donnera l'intersection du cône par le plan de tête.

(b). Données. – La figure A donne, en plan, la trace horizontale $x_2 y_2$ du mur de tête et en $m t$ la trace, c'est-à-dire la génératrice de naissance du berceau, laquelle est parallèle à $x_2 y_2$. – La figure B montre, en coupe, les sections droites du mur de tête ($a'h'$) et celle du berceau qui est un cercle ($r'q'v'$) dont le centre est en O'.

Il faut couvrir par un cône de révolution l'espace trapézoïdal compris (fig. A) entre les droites αm et $F t$. – Ces lignes qui formeront les lignes de naissance de la porte, ne sont pas également inclinées sur l'axe du berceau ; c'est ce qui fait que la porte conique sera biaise. Pour définir le cône, prenons en SF et en SA, sur les lignes de naissance, deux longueurs égales ; joignons FA, cela nous donnera la trace d'un plan vertical dans lequel nous tracerons une demi-circonférence, qui sera prise pour directrice ou section droite du cône. – On voit (fig. D) en $x_1 y_1$ la projection, vraie grandeur de cette demi-circonférence. – L'axe du cône est la perpendiculaire SO'_1, qui passe par le milieu de FA.

Remarquons immédiatement que sur la projection (fig. D) tous les plans méridiens du cône, lesquels seront aussi les plans de lit normaux, se projetteront, avec tout ce qu'ils contiennent, et particulièrement avec les normales au cône, suivant des droites telles que $O'_1 d'_1 i'_1$ – $O'_1 r'_1 k'_1$... etc.. Dès lors toutes les données sont prises.

(b). – Appareil et intersection des surfaces en présence. – Divisons la section droite du cône (fig. D) en cinq parties[1], aux points $B'_1 C'_1 D'_1$..... projetés horizontalement en B C D.....

Par reports de hauteurs, cherchons sur la figure B, en A'B'C'D' les projections des différents points de la section droite, points que nous pourrions réunir par une ellipse dont F'A' serait le petit axe et Ω' l'extrémité du grand axe. – Cela nous permet d'obtenir (fig. A) en SA-SB-SC, etc..... et (fig. B) en S'A'-S'B'-S'C'....... les projections des génératrices.

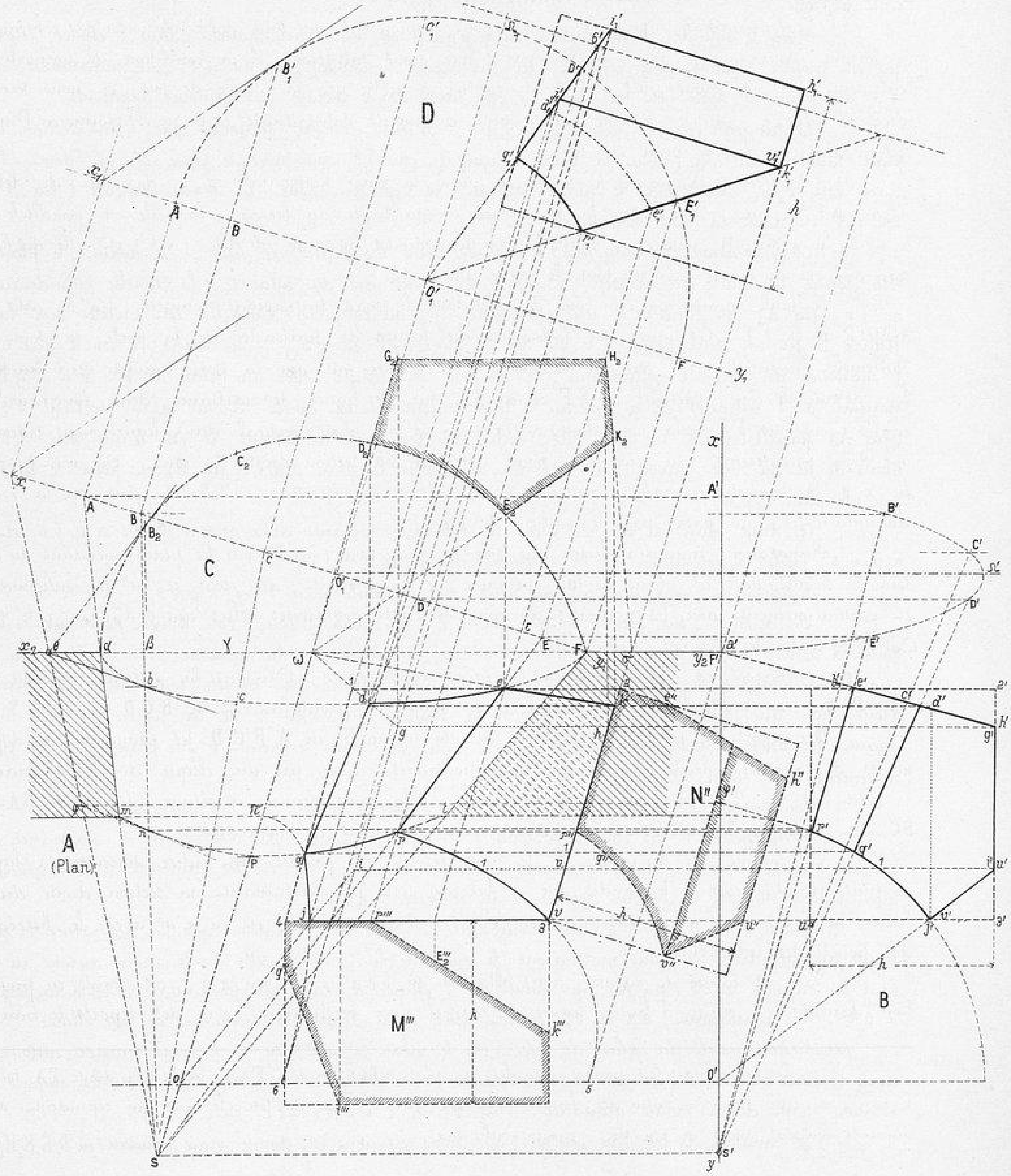
Or, comme sur la figure B, le mur de tête est projeté tout entier suivant sa ligne de plus grande pente F'h' tandis que le berceau est projeté suivant sa section droite circulaire, nous obtenons immédiatement en b'c'd'..... avec le mur et en r'q' avec le berceau, des points des intersections.

Par des lignes de rappel nous obtenons en b c d ..... et en r q ... ces points en projection horizontale ; enfin d'autres lignes de rappel, avec vérifications par des reports de hauteurs,

---

[1] Il est bon de prendre ces parties inégales et plus petites du côté F où la section droite FA touche le mur ; de cette façon on aura des chances pour que, sur l'ellipse de tête, les arcs qui répondent aux différents voussoirs soient, à peu près, égaux entre eux.

Fig. 81.



nous donnent ces mêmes points sur l'élévation en section droite (fig. D).

(c) *Détails géométriques.* — L'intersection avec le mur de tête est une ellipse a, b, c, d .... qui doit être tangente en a et F aux génératrices de naissance qui sont les lignes de contour apparent du cône.

Avec le cylindre l'intersection m n p q r t est une courbe gauche, dans l'espace, mais qui est projetée suivant une conique (ici un arc d'hyperbole); en m et t, aux naissances, il y a un point d'arrêt et la courbe n'est tangente à aucun des contours apparents.

La tangente en un point b, ou m, s'obtient, comme toujours, par l'intersection du plan tangent au cône, dont la trace horizontale est S θ, soit avec le plan sécant, dont la trace est $x_2\, y_2$, soit avec le plan tangent au cylindre dont la trace verticale (fig. B) est r' f' et dont la trace horizontale est f' f.

(d) *Délimitation des voussoirs; sections par les plans de lit.* — En avant, le plan de tête forme la limite du voussoir. Du côté de l'intrados du cylindre, la douelle cylindrique q p j v (fig. A) est limitée à une génératrice j v du cylindre, laquelle est projetée sur la figure B en un seul point j' v' et sur la figure D en $j'_1\, v'_1$. — En arrière, c'est-à-dire dans l'épaisseur du berceau cylindrique, le voussoir est limité par un plan de lit v' u' (fig. B) normal à l'intrados de ce berceau. — Latéralement il est arrêté à un plan vertical 2.3. (fig. A) parallèle à l'axe du cône. Enfin en dessus et en dessous, il est limité par les plans de lit du cône, savoir: pour le lit de dessus, le plan $0'_1\, q'_1\, i'_1$ (fig. D) et pour le lit de pose, le plan $0'_1\, p'_1\, k'_1$.

Ces deux plans de lit recoupent le cylindre suivant deux arcs d'ellipses π. q. j. 6 et π. p. v. 5, faciles à déterminer de la manière suivante:

Raisonnons pour un seul des deux, par exemple pour l'arc π p v 5.

On a en r, sur l'arête gauche m n P q p t, déjà obtenue, son point de départ. — Son point d'arrivée, v, est projeté (fig. B) en v' sur la génératrice du cylindre. — On l'obtient en v'_1 (fig. D) en coupant le plan de lit $0'_1\, v'_1$, qui sur cette figure est projeté tout entier en ligne droite, par une horizontale $j'_1\, v'_1$ située à la hauteur du point v' de la figure B. — Dès lors ayant les deux projections verticales v'_1 et v', on en déduit le point v en plan (fig. A) par croisement des lignes de rappel.

Tout autre point intermédiaire, tel que 1, serait obtenu de la même manière.

Remarques: 1° Ces ellipses prolongées doivent rencontrer la génératrice de naissance du berceau au point π où elle est rencontrée par l'axe du cône, et être tangente à cette génératrice, puisqu'elle est le contour apparent du cylindre.

2° Menons (fig. D) en 5' 6' une horizontale à la même hauteur que la génératrice la plus haute du cylindre; si nous prolongeons le plan de lit jusqu'à cette droite, nous aurons en 5' (fig. D) rappelé en 5 (fig. A) un point de l'ellipse à tangente horizontale, c'est-à-dire parallèle à 0π. — Par conséquent, 0π et 05 seront deux demi-diamètres conjugués de cette ellipse.

(e) *Rabattement du plan de tête.* — On le rabat (fig. C) en le faisant tourner autour de $x_2\, y_2$ comme charnière. Les centres de rotation sont les points α. β, γ, δ ...... et les rayons de rotation sont donnés, vraie grandeur, (fig. B) en F'b' – F'e' – F'c' etc ....

Le panneau de tête du voussoir que nous étudions est donné, vraie grandeur, en $D_2\, E_2\, K_2\, H_2\, G_2$.

§ 60. – Taille d'un voussoir.

On emploie la méthode par équarrissement. – Le solide capable est un prisme droit dont la base est le parallélogramme 1, 2, 3, 4 (fig. A) et dont la hauteur h est donnée sur une quelconque des élévations.

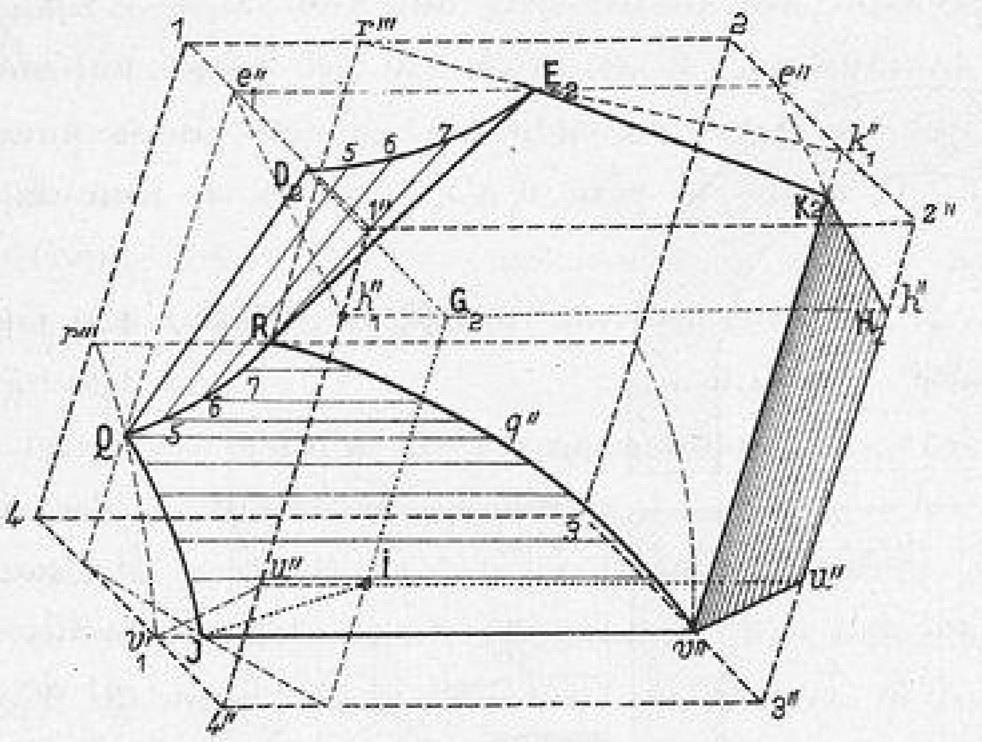
Supposons ce solide bien préparé. – On peut alors procéder de deux manières :

1ère manière. – On cherche (fig. M‴) la sortie des plans de lit du cône sur sa face arrière 4.3, et sur sa face avant 1.2. Ces panneaux de sortie sont les mêmes sur chaque face. Les droites r‴k‴ et q‴i‴, qui sont les intersections des plans de lit avec ces faces sont obtenues en reportant en vk‴ et 4 q″ les hauteurs des points k et q.

Dès lors on peut abattre la pierre entre les lignes de chaque face et faire apparaître les plans de lit.

Cela fait, on cherche, comme à l'ordinaire, la vraie grandeur des panneaux de lit du cône et (fig. 82. en perspective) on les applique en RE_2K_2v'' pour le lit de pose et G_2IJQD_2 pour le lit de dessus. – Cela permet d'abattre le plan de tête $E_2K_2H_2G_2$ dont on possède deux directrices E_2K_2 et D_2G_2.

Fig. 82.



Quant au cylindre, on possède deux directrices Rv'' et QJ données par les panneaux, ce qui permet de le tailler jusqu'à la génératrice Q q″ du point Q.

Pour la portion qui reste Q q″ R on prolonge le cylindre jusqu'à la face de gauche 1.4.1″.4″ du solide (voir le panneau en N″, fig. 81) et on peut dès lors la tailler en se servant de deux directrices.

Il ne reste plus qu'à faire apparaître la douelle conique QRD_2E_2 et le lit du cylindre JIv″u″. – Ce dernier est un plan dont nous avons déjà deux directrices Jv″ et JI, donc il peut se tailler.

Pour avoir la douelle conique on applique sur le plan de tête déjà abattu, le panneau de tête trouvé (fig. 81 - C) ce qui donne en D_2E_2 une directrice du cône ; la seconde directrice du cône sera la courbe gauche d'intersection QR, que fournirait un développement de la douelle du cylindre.

2e manière. – 1° On cherche en N″ (fig. 81) la sortie, sur les faces latérales du solide capable, non seulement du plan de tête (e″h″), mais encore du berceau (r″v″) et du plan de lit (v″u″) du berceau ; après quoi on abat la pierre entre ces lignes. – A ce deuxième état le solide a donc la forme d'un prisme horizontal, dont la base est le contour mixtiligne N″ (fig. 81).

2° On cherche le développement de la douelle cylindrique q r j v (notre épure n'indique pas ce développement), on l'applique sur le cylindre taillé et cela donne (fig. 82) en QJ une directrice du panneau de lit de dessus, en QR une directrice du cône, et en Rv″ une courbe appartenant au lit de pose.

3° Sur le plan de tête, déjà apparu, on applique le panneau de tête $D_2G_2E_2K_2H_2$ que l'on

connait, et, dès lors, toutes les surfaces qui restent à faire apparaître sont délimitées ce qui suffit pour la taille.

On remarquera que cette seconde méthode dispense de chercher les panneaux de lit du cône.

Voûte d'arêtes cylindro-conique.

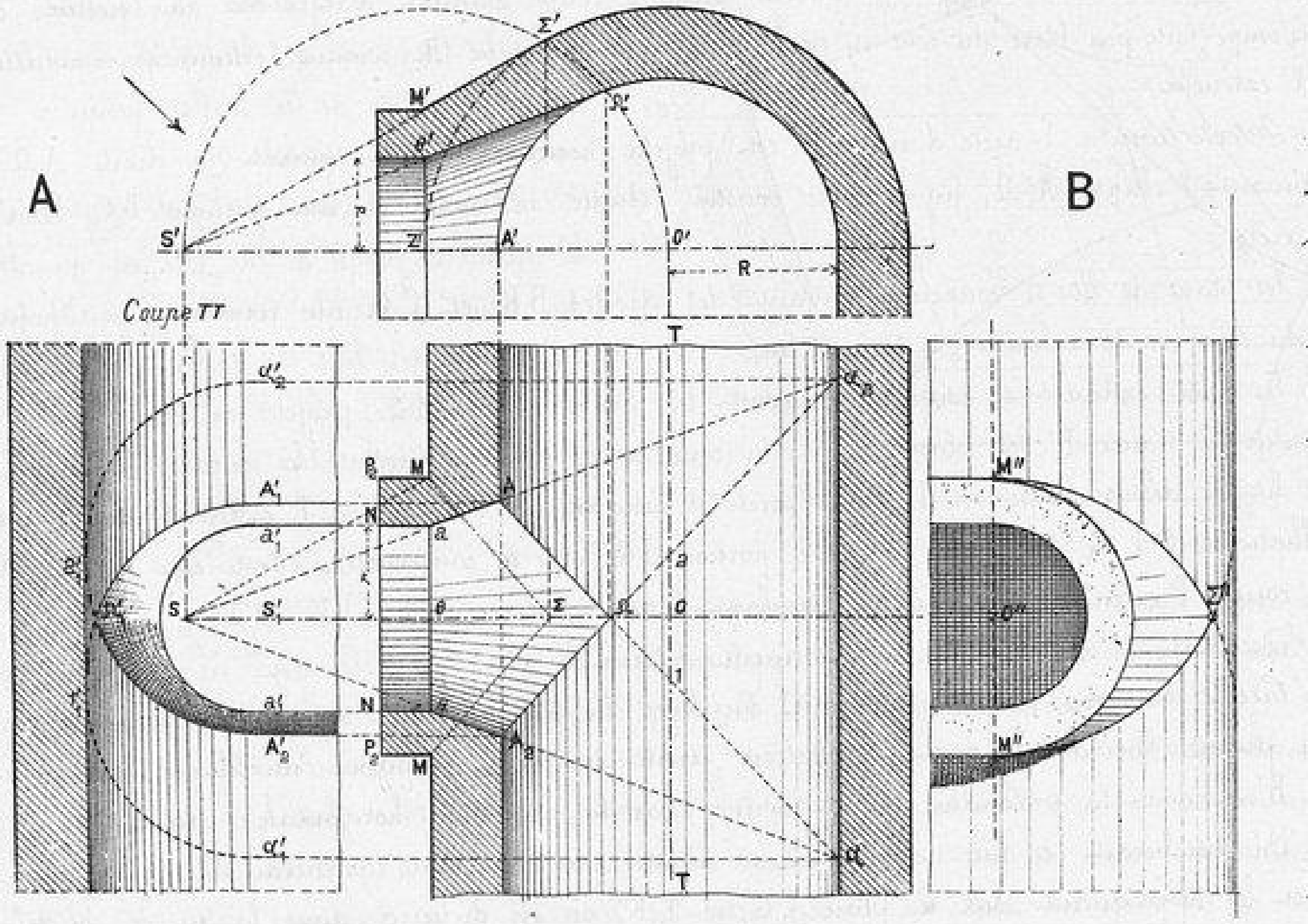
Stéréotomie 18e Leçon (bis).

§61. – Description de la voûte. – Considérations géométriques. (fig. 83).

Imaginons un berceau cylindrique d'axe O'OT, rencontré par une voûte conique d'axe SO ; le plus ordinairement, si tout en ayant même plan de naissance que le berceau et tout en étant de révolution, le cône a pour base un cercle vertical quelconque, son intersection avec le cylindre sera une courbe gauche quelconque, et l'ensemble des voûtes constituera soit une lunette cylindro-conique, soit une porte conique rachetant un berceau cylindrique. Nous avons étudié plus haut ce dernier cas §59.

Mais, si le cercle de base du cône a son rayon calculé de telle sorte que le cône et le cylindre aient un plan tangent commun S'Ω' (fig. 83) au-dessus des naissances, alors, comme par raison de symétrie, ils en auront un second situé au-dessous des naissances, ils rentreront dans le cas de deux surfaces du second degré qui ont deux plans tangents communs et qui, par conséquent se coupent suivant deux courbes planes AΩα et $A_2 Ω α_2$. Les données pour arriver à ce résultat, sont faciles à prendre.

Fig. 83.



On se donne le rayon R du berceau ; en a a on se donne le diamètre de la fenêtre à ouvrir ; soit r = Oa, son rayon. – On porte sur l'élévation, en Z'θ' une hauteur égale à r ; on mène Ω'θ' tangent au cercle de base du berceau et on obtient en S', rappelé

horizontalement en S, le sommet du cône. - SaA et SaA' donneront les ébrasements de la fenêtre. On voit que l'inclinaison de ces faces d'ébrasement ne peut pas être choisie arbitrairement, mais qu'elle est une conséquence des données.

Si du même point SS' comme sommet on mène un second cône d'extrados S'Σ' tangent au cylindre d'extrados du berceau alors l'intersection des deux extrados sera, elle aussi, formée de deux courbes planes MΣ et MΣ.

La figure A donne une coupe faite dans l'axe du berceau. Les deux sections planes Aα et $A_2\alpha_2$ y sont représentées par deux ellipses $A'_1\alpha'_1$ et $A'_2\alpha'$ qui se recoupent en Ω'_1 en donnant naissance à une ogive $A'_2\omega'_1A'_1$ à branches elliptiques. - Jamais ces ellipses de la coupe A ne peuvent être des arcs de cercles, parceque, jamais les plans Aα et $A_2\alpha^2$ ne peuvent être inclinés à 45° sur l'axe; cela est facile à démontrer.[1] - On voit en B l'aspect extérieur de la voûte.

§ 62. - Epure de la voûte d'arête cylindro-conique.

(a) Données. - Les données sont les mêmes que sur la figure précédente, mais agrandies (fig. 84). - La figure 84-A donne le demi-plan vu par dessous avec l'indication de toutes les lignes de lit ou de joint. La figure A' donne les projections horizontales d'un voussoir d'arête N° II et de la clef N° IV.

On voit en B et B' les projections sur un plan de coupe passant par l'axe du berceau. - En C, nous avons une coupe faite par l'axe du cône et en D, une élévation de la tête conique, obtenue par rotation, mais faite de l'extérieur.

(b) Intersections. - L'arête d'intrados est projetée horizontalement suivant la droite AΩ et en coupe suivant l'ellipse $A'_1\Omega'_1$ fig. B'. - Le voussoir étudié ne prend qu'une portion BC - B'C' - $B'_1C'_1$ de cette arête.

Les plans de lit se coupent suivant des droites BK et CG, qui convergent au point O, où les axes du cône et de cylindre se rencontrent.

Les deux extrados se coupent suivant la courbe pleine MΣ, projetée en coupe (fig. B').

Sur la figure B', les plans de lit du cône se projettent suivant les lignes droites $O'_1G'_1$ et O'_1K_1. - Le lit de dessus coupe en I'_1-I-I' l'arête d'extrados et donne sur l'extrados du cylindre une section elliptique 0, I, G, 12, dont la seule portion IG est à conserver. - De même, le lit de pose du cône coupe l'extrados du berceau suivant l'arc d'ellipse JK - J'K' - $J'_1K'_1$.

Dès lors le voussoir est complètement déterminé.

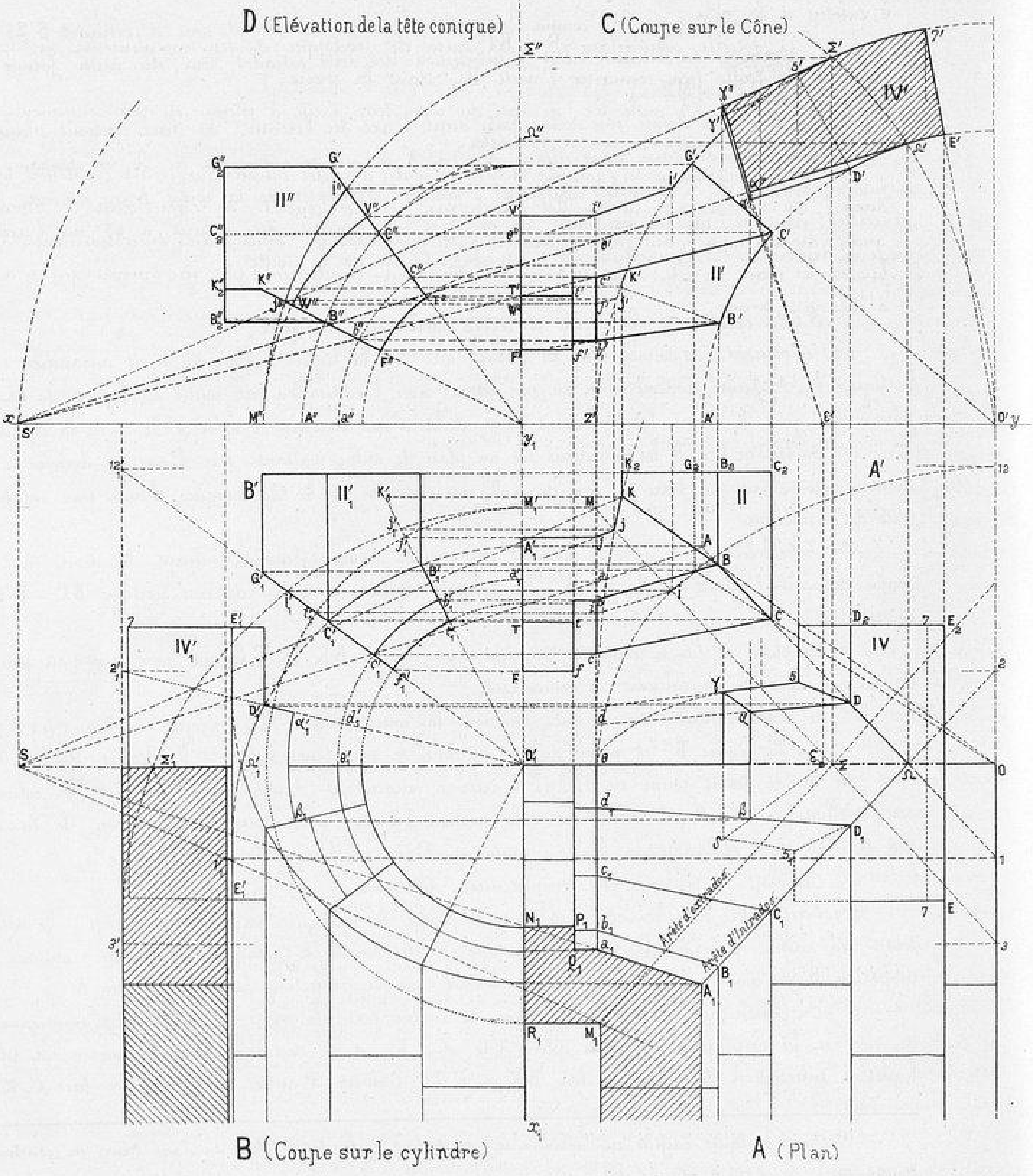
(c) Taille du voussoir. - On pourrait employer la méthode par équarrissement. Le solide capable serait un prisme horizontal dont la section droite serait le polygone mixtiligne, contour de la projection B' et dont la profondeur serait donnée par la projection horizontale (fig. A').

On chercherait (ce que notre épure ne donne pas) la vraie grandeur des panneaux de lit du cône et les appliquant sur le plan $f'_1G'_1$ et $t'_1K'_1$ on en déduira, dans la pierre, la place des lignes d'intersection des plans de lit BK et CG. - Comme d'autre part sur la face C_2K_2 du solide

---

(1) Dans quelques édifices et notamment dans la crypte de l'Eglise du Sacré Cœur en construction à Montmartre, on a pris comme données une ogive à branches circulaires $A'_1\omega'_1A'$ en coupe; il en est résulté que la courbe qui doit former l'arête est gauche et non plus plane. - On perd ainsi presque tout le bénéfice de la voûte d'arête cylindro-conique.

Fig. 84.


D (Elévation de la tête conique)
C (Coupe sur le Cône)
B (Coupe sur le cylindre)
A (Plan)

capable on aura pu appliquer le panneau C'G'K'B' (de la fig. C) les plans de lit du cylindre seront faciles à tailler.

La douelle cylindrique se taillera à l'équerre en se guidant sur la courbe CB'. On peut l'enlever à la volée.

La douelle cylindrique $B_2 C_2 BC$ aura été développée et son enroulement sur le cylindre qui vient d'être taillé fera connaître l'arête BC dans la pierre.

De même le cercle bc, de base du cône sera facile à obtenir et par conséquent ce cône étant défini par deux directrices, pourra se tailler.

On pourrait aussi, comme dans la voûte d'arêtes cylindrique (§31) employer la méthode directe. On substituerait les douelles plates aux douelles courbes ; on chercherait le biveau de leur angle dièdre, et à l'aide d'une série d'autres biveaux on obtiendrait successivement les plans de lit et les plans de tête. Les extrados s'obtiennent en dernier par un travail qui n'a pas besoin d'être aussi soigné.

Trompes et arrière-voussures.

Stéréotomie
19e Leçon.

§63. - Généralités.

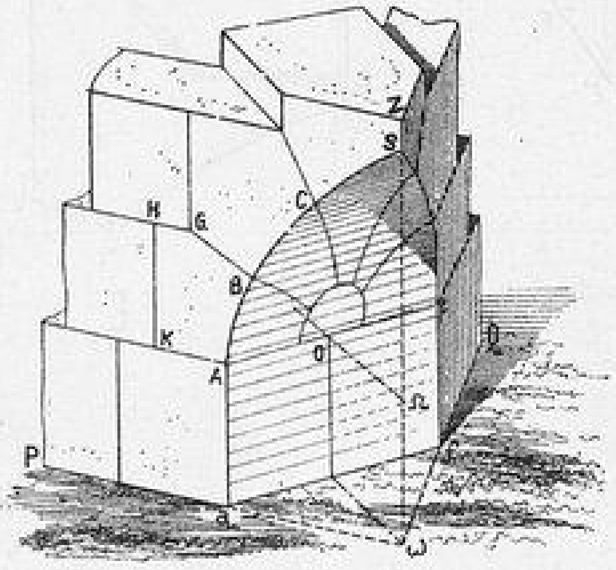
Les trompes sont des voûtes qui servent ordinairement à supporter des encorbellements, c'est-à-dire des parties en saillie sur les murs. Les trompes ont été très employées par les architectes de la renaissance. Elles demandent, pour être solides, à être construites avec des matériaux de grandes dimensions, surtout pour les pierres qui constituent les assises inférieures ; autrement l'ensemble de la construction pourrait basculer. Il faut aussi pour éviter la bascule, que les pierres soient chargées en queue.

Nous étudierons deux trompes cylindriques (fig. 85 et 87) et deux trompes coniques (fig. 89 et 92).

§64. - Trompe cylindrique sur pan coupé.

(a) Description (fig. 85, en perspective). - Deux murs aP et fQ situés à l'angle d'une rue, sont reliés à rez-de-chaussée par un pan coupé, af, afin de faciliter la circulation. - Mais, aux étages, on ne veut pas perdre la place prise par le pan coupé ; il faut donc que l'angle SZ soit soutenu en encorbellement. A cet effet, dans le mur aP, on prend une courbe AS, ordinairement un arc de cercle, pour directrice d'un cylindre dont les génératrices horizontales seront parallèles à la trace horizontale af du pan coupé. - Ce cylindre est coupé par l'autre mur fQ suivant une courbe FS ordinairement différente de la courbe prise dans le premier mur. L'angle SZ des étages supérieurs sera supporté par ce cylindre.

Fig. 85.



(b) Epure (fig. 86). - La figure A donne le plan. - La trompe est biaise parceque les deux longueurs de mur tronquées ΩA et ΩF ne sont pas égales.

On prend le milieu O du pan coupé AF, et on choisit en xy, le plan vertical de projection perpendiculaire à la médiane ΩO du triangle de pan coupé.

Nous rabattons (fig. C) parallèlement au plan vertical, la face ΩH du mur de gauche et nous nous donnons en $A'_3 B'_3 C'_3 \Omega'_3$ la directrice du cylindre en vraie grandeur.

Nous ramenons et nous menons en BE, B'E' - CD, C'D'.... les génératrices du cylindre et nous obtenons en Ω'D'E'F'.... rabattue (fig. D) en $F'_2 E'_2 D'_2$.... la section du cylindre par le parement du second mur, celui de droite.

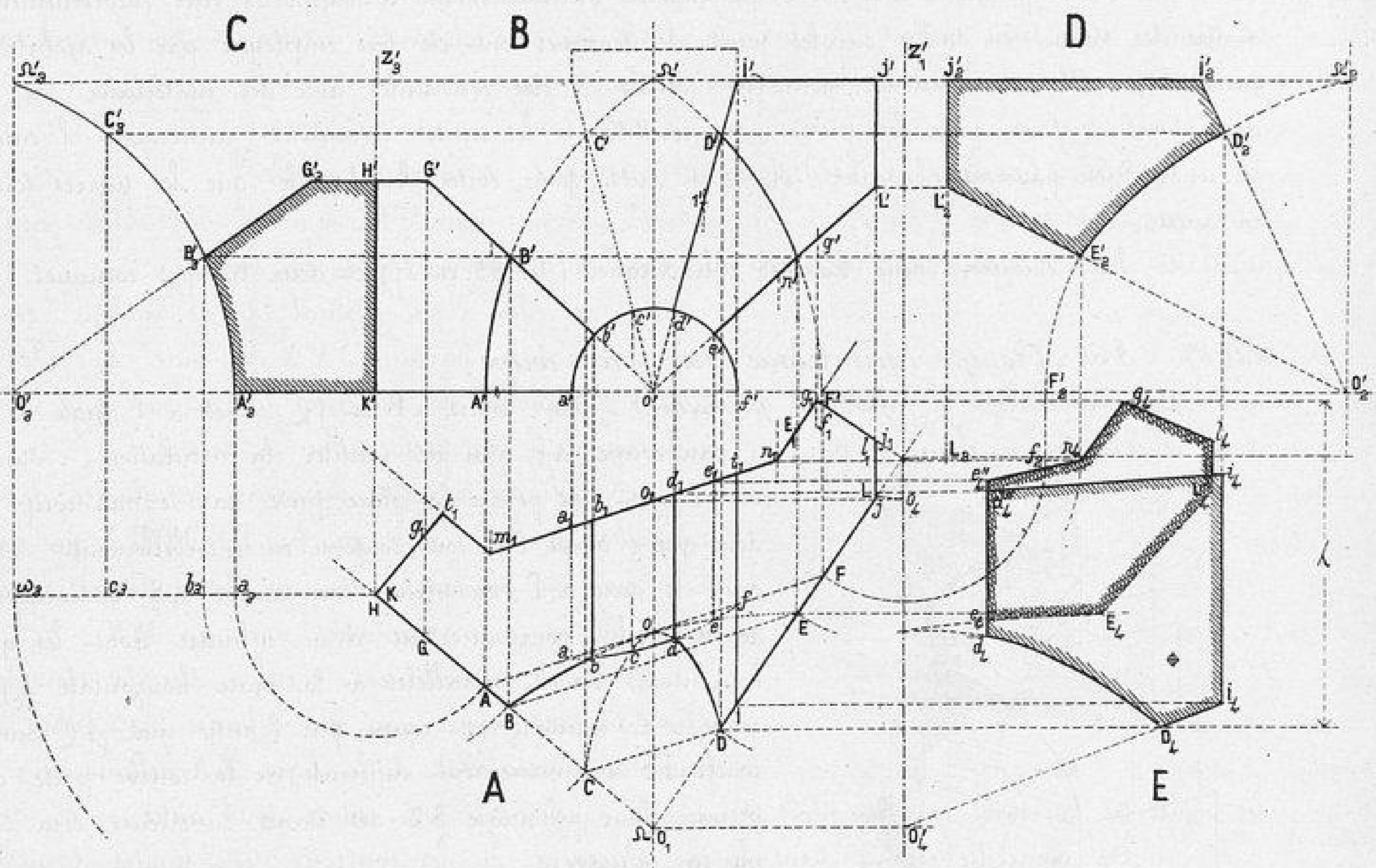
(c) Appareil. - Par les points de division B'C'D'E' sur l'élévation (fig. B) nous faisons passer des plans de lit contenant tous la droite ΩO. - Le reste de l'appareil se comprend facilement.

(d) Trompillon. - Si l'on continuait les voussoirs jusqu'à l'axe OΩ, ils finiraient par y avoir une épaisseur trop faible et seraient fragiles. - C'est pourquoi on les arrête à une pierre b'c'd'f' que l'on nomme un trompillon et à laquelle, dans le cas actuel, on donne la forme d'un petit cylindre, à génératrices horizontales ayant le centre a'b'c'f' pour base.

On détermine, comme à l'ordinaire, l'intersection de ce cylindre de trompillon avec le

cylindre de la trompe, et l'on obtient une courbe gauche dont la projection horizontale a b c d f est un arc d'hyperbole (Voir Lunette cylindrique).

Fig. 86.



(e) Intersection des plans de lit et de l'intrados. - Les plans de lit tels que O'L' et O'I' recoupent le grand cylindre d'intrados de la trompe suivant des arcs d'ellipse o e E et o d D, qui, prolongés iraient tous passer par le point O, et y seraient tangents à la droite AF.

§ 65. - Taille d'un voussoir (même figure 86).

Le solide capable est un prisme droit horizontal dont la base est le polygone mixtiligne d'e'L'J'I'd' projection verticale du voussoir et dont la profondeur est donnée en λ (fig. E). - On cherche les rabattements des panneaux de lit; On voit (fig. E) en $d_4\, d''_4\, i_4\, I_4\, D_4$ le panneau de dessus, et en $e_4\, e''_4\, n_4\, q_4\, l_4\, L_4\, E_4$ le panneau de dessous.

On applique les panneaux sur les plans de lit d'I' et e'L' (fig. B) du solide capable ce qui donne une partie des contours des douelles ou des plans à tailler.

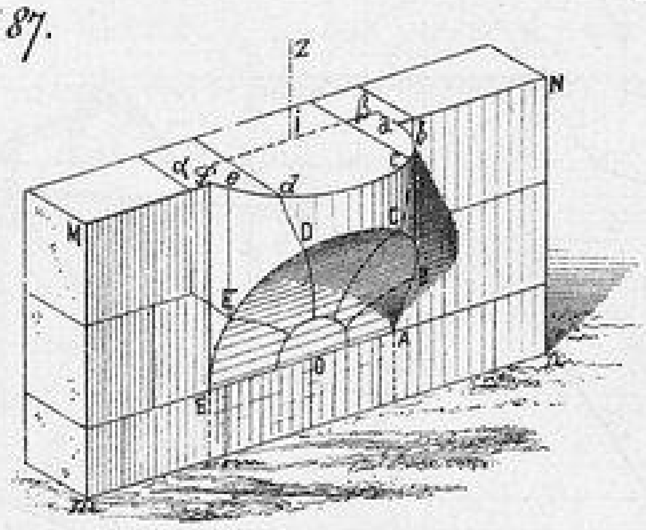
Le plan supérieur I'J' a son panneau fourni (fig. A) en $I\, i_1\, n_1\, q_1\, l_1\, L$, ce qui permet de tailler, à l'équerre, les parements des murs verticaux, tels que IJ, Jl_1, l_1q_1, q_1n_1 et n_1i_1 (fig. A). La douelle cylindrique de la trompe se creuse en dernier, après avoir appliqué sur le parement le mur IJ qui vient d'être mis en évidence, par cette taille à l'équerre, le panneau, vraie grandeur, fourni par le rabattement (fig. D).

On voit en effet que la douelle cylindrique est limitée, à gauche, par l'ellipse dD - d'D', qu'a donné le panneau de lit de dessus, et à droite en partie par l'ellipse eE - e'D' du panneau de dessous et en partie par l'ellipse DE - D'E' fourni par le panneau de parement (fig. D). - Si donc on a eu le soin, en préparant tous ces panneaux, de numéroter par les mêmes chiffres les points situés aux mêmes niveaux on aura tous les éléments nécessaires pour obtenir autant de génératrices que l'on voudra du cylindre de la trompe.

§ 66. - Trompe cylindrique supportant une tour ronde[1].

(a) Description (fig. 87, en perspective). - Sur un mur MN - mn on veut établir une saillie circulaire f d c b pour supporter soit un pavillon cylindrique, soit un balcon.

Fig. 87.



A cet effet l'axe vertical IZ, de la tour, est pris un peu en dedans du parement MN du mur, de telle sorte qu'il n'y a qu'un arc de cercle f b, et non pas un demi-cercle complet, qui fait saillie en dehors.

Du côté de la partie inférieure le cylindre de la tour est limité par une courbe gauche FEDCBA qui n'est autre chose que son intersection avec un autre cylindre, à génératrices horizontales et perpendiculaires au mur MN.

Enfin l'encorbellement c'est-à-dire la trompe proprement dite est formée par un cylindre horizontal dont les génératrices parallèles à la ligne EA relient deux à deux les points de la courbe gauche situés d'un côté à ceux qui sont situés de l'autre.

On appareille comme dans le cas précédent et les voussoirs sont limités à un trompillon cylindrique O.

(b) Données de l'épure (fig. 88). - Le plan est donné (fig. 88 - A). L'axe de la tour est en O, et son diamètre est α β. La portion FCGBA du demi-cercle qui aurait α β pour diamètre, fait, seule, saillie en dehors du mur.

En élévation (fig. B) la courbe gauche qui limite inférieurement la trompe a pour projection verticale le demi-cercle F'E'C'B'A', décrit sur la corde F'A' comme diamètre (et non pas sur α β).

La figure C donne en $b'_2 B'_2 C'_2$ la projection de cette courbe gauche sur un plan de profil. On démontrerait facilement, comme nous l'avons fait pour la lunette cylindrique, que cette courbe est un arc d'hyperbole équilatère[2]. Cette hyperbole est prise comme base du cylindre à génératrices horizontales qui forme l'intrados de la trompe.

(c) Appareil. - Le demi-cercle F'A' est divisé en un nombre impair de parties égales, et on appareille comme on ferait pour une porte. Les voussoirs sont limités, du côté du centre O', à un trompillon dont la courbe de base a'b'c'd'...... est une réduction homothétique de la

---

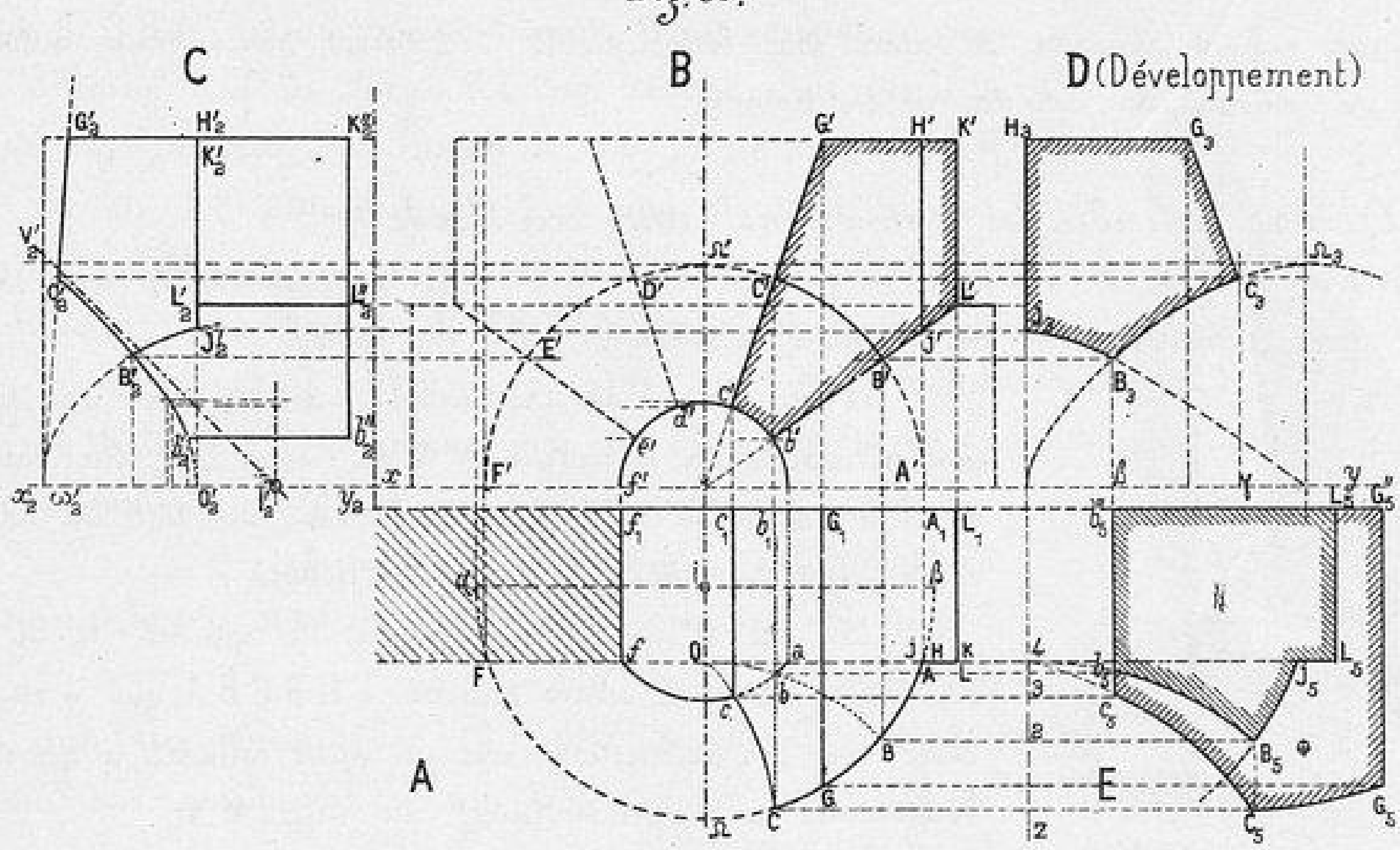
[1] On voit un exemple remarquable de cette trompe à l'extrémité de l'abside de l'Église St Sulpice, à Paris.

[2] Si le cercle F'Ω'A' (fig. B) avait été décrit avec le même diamètre, α β, que la tour, au lieu d'une hyperbole, sur la figure C, on aurait eu une ligne droite inclinée à 45°, ce qui aurait donné un mauvais profil pour l'encorbellement.

courbe A'B'C'D'....... C'est donc, ici, un demi-cercle.

(d) *Intersections et préparation de la taille.* – Si l'on considère un plan de lit, par exemple le lit de pose b'B'L', il donne les intersections suivantes : 1° en bB – b'B', une hyperbole, intersection de ce plan avec le cylindre hyperbolique d'intrados de la trompe ; 2° en BJ – B'J' un arc d'ellipse, intersection avec le cylindre de la tour ; 3° en JL – J'L', une ligne droite intersection avec le parement du mur.

Fig. 88.



On voit ce panneau de lit de pose rabattu, fig. E, en $b_5'' b_5 B_5 J_5 L_5 L_5''$. – Le lit de dessus est rabattu à côté, sur la même figure.

Enfin sur la figure D, on a fait le développement du cylindre extérieur de la tour. – $B_3 C_3$ est la transformée de la courbe gauche ; $B_3 J_3$ et $C_3 G_3$ sont les transformées des sections de ce cylindre par les plans de lit ; ce sont donc des arcs de sinusoïdes. Tout est prêt pour la taille.

§ 67. – *Taille d'un voussoir (même figure 88).*

Le solide capable est un prisme droit dont la base est prise en élévation (fig. B) suivant le polygone mixtiligne c'b'L'K'G' dont la profondeur est donnée par la projection horizontale. On a soin de prendre le lit de carrière de la pierre à peu près parallèle au lit de pose b'L'.

Sur le plan supérieur G'K' on applique le panneau donné en $G G_1 L K J$ sur la projection horizontale et cela permet de tailler, à l'équerre, les parties verticales GA, cylindrique et AK, plane. Sur le cylindre GA on applique le panneau flexible donné (fig. D) par le développement et cela donne la portion BC – B'C' de la directrice gauche du cylindre.

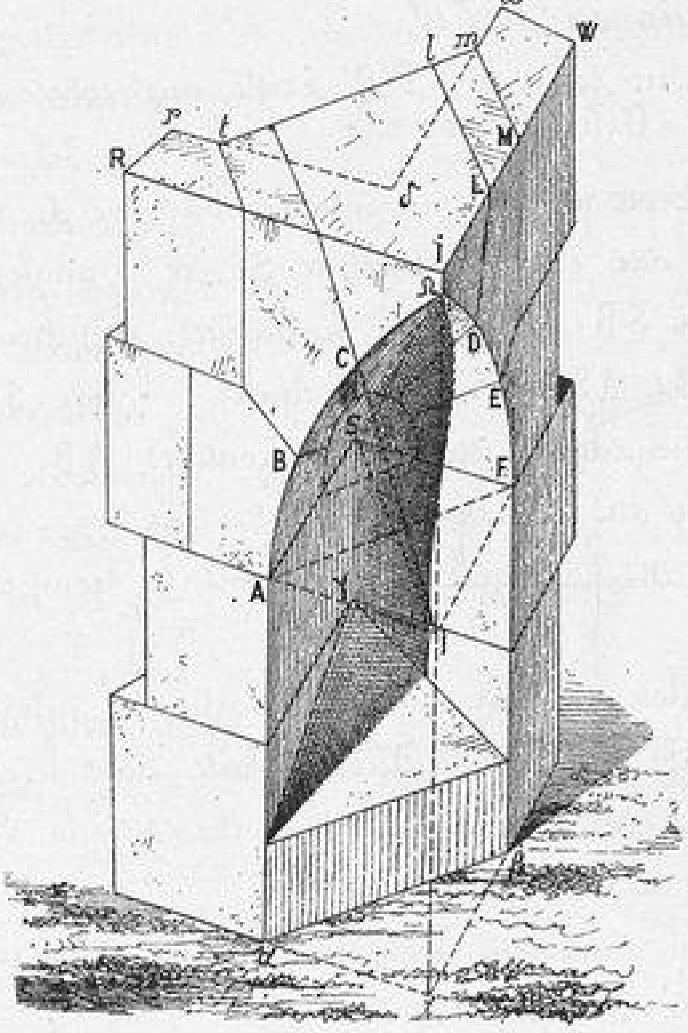
Les panneaux de lit fournis par les rabattements, fig. E, et appliqués sur les plans de lit correspondants, achèvent de délimiter le contour de la douelle de trompe c'C'B'b', ce qui permet de la creuser, comme dans l'exemple précédent.

§ 68. – *Trompe conique sur l'angle.*

(a) *Description.* – Deux murs (fig. 89. perspective) sont réunis par un pan coupé α β ; mais on veut comme à la figure 85 supprimer le pan coupé aux étages supérieurs. – Nous supposons ici les murs à angle droit l'un sur l'autre. – On mène en AS et SF deux horizontales respectivement

parallèles aux murs, et on prend ces lignes pour génératrices méridiennes d'un cône de révolution dont le sommet sera le point S.

Fig. 89.



L'axe de ce cône est donc la bissectrice SI de l'angle ASF. Ce cône supportera l'encorbellement. Il sera recoupé par les parements des murs suivant deux courbes ABCΩ et FEDΩ; et il est facile de voir que SA ayant été pris parallèle au mur FΩW, il en résulte que ce dernier est parallèle au plan tangent au cône tout le long de cette génératrice SA et que, par conséquent la courbe ΩDF est un arc de parabole. Il en est de même de la courbe ABCΩ, et ces deux paraboles sont égales.

On appareille le cône comme à l'ordinaire par des plans méridiens passant par son axe SI, et au sommet on place un trompillon cylindro-conique (fig. 91).

(b) Épure. La figure 90 représente complètement le trompillon MM' et un voussoir.

En D, on a donné les rabattements des deux panneaux de lit. On remarquera que le trompillon est limité sur l'intrados du cône au petit cercle gh..... g'h'.

On pourrait lui donner comme dans les deux autres trompes une forme exactement cylindrique; mais l'angle hgh, serait trop aigu, une fois surtout que la cavité conique du trompillon serait creusée; c'est pourquoi on fait porter les voussoirs sur le trompillon par l'intermédiaire du cône θgj.θgk, lieu des normales menées à l'intrados par les divers points du cercle limite gh...... Ce cône des normales constitue ce que nous nommerons la portée des voussoirs sur le trompillon.

La figure C, donne par

Fig. 90.

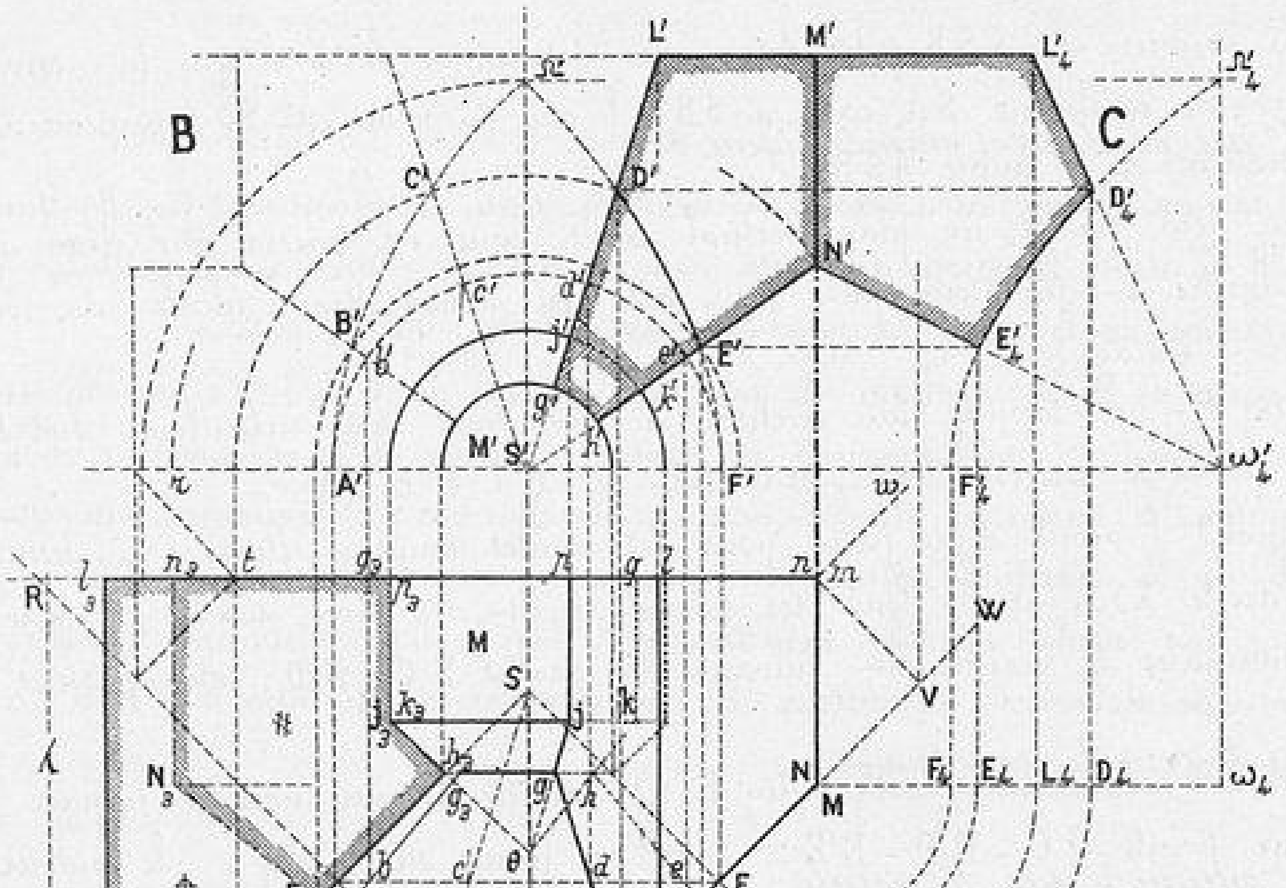
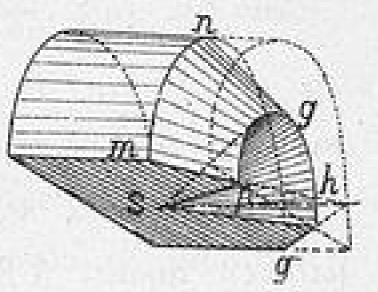


Fig. 91.



une rotation en $E'_4 D'_4 L'_4$ ..... la vraie grandeur du panneau de tête sur le mur DM.

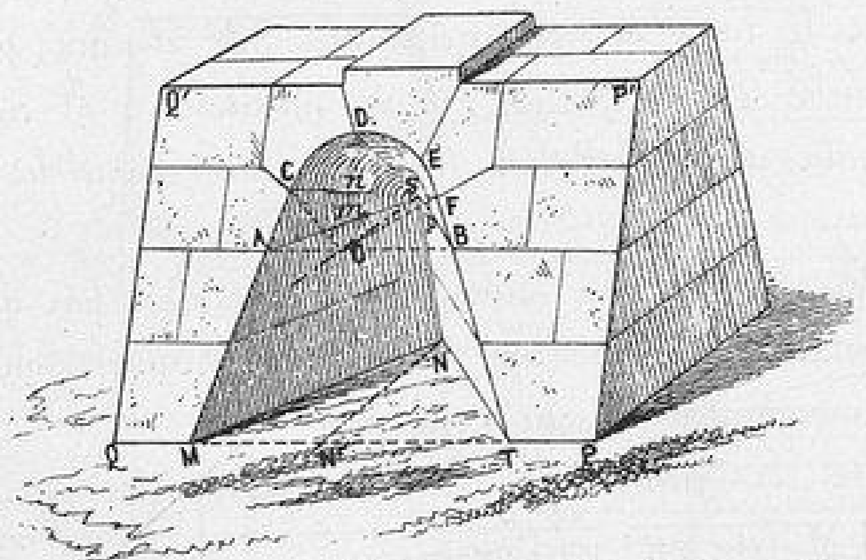
Dès lors tout est prêt pour la taille, laquelle se fera comme dans les exemples précédents.

Stéréotomie. 19e Leçon (bis)

§ 69. – Trompe conique biaise dans un mur en talus.

(a) Description (fig. 92 - perspective). – Dans un mur en talus PQP'Q' existe une cavité triangulaire MNT-ASB que l'on veut couvrir.

Fig. 92.



A cet effet on prend pour intrados un cône de révolution dont l'axe est la bissectrice SO de l'angle ASB et dont SA et SB sont deux génératrices méridiennes.

Si les droites AS et SB sont égales, l'axe SO du cône est perpendiculaire sur les horizontales AB.... du mur et l'on dit que la trompe est *droite*.

Si SA n'est pas égale à SB, alors la trompe est biaise.

Le trompillon a pour ligne de portée d'intrados, m n, une courbe qui est la section faite dans le cône par un plan parallèle au mur de tête; ce sera donc une ellipse et la surface de portée sera la surface gauche, lieu des normales à l'intrados menées par les points de la courbe m n.[1]

Nota. – Cette voûte est d'un emploi très rare. Nous en étudierons cependant complètement l'épure, parcequ'elle nous présente un exemple de surface de lit gauche.

(b) Données de l'épure (fig. 93). – On voit en $B'_1 a B$ (fig. A) la trace horizontale du mur de tête; son fruit est indiqué (fig. C) par une projection latérale faite sur un plan vertical de projection $x_1 y_1$ perpendiculaire au mur de tête.

La cavité triangulaire à couvrir est a SB (fig. A). Pour déterminer le cône qui la couvrira on prend sur les génératrices de naissance SA égal à SB, l'axe du cône est SO, perpendiculaire sur AB et, par suite, bissectrice de l'angle ASB.

Par la droite AB on fera passer un plan vertical dans lequel on tracera une demi-circonférence, ayant AB pour diamètre et qui sera prise pour base, ou section droite, idéale, du cône de révolution, qui doit former l'intrados.

On prend en XY (fig. B) un second plan vertical de projection, perpendiculaire sur l'axe SO et sur ce mur la section droite se projette, vraie grandeur, en B'C'D'E'F'A'.

Remarquons, comme nous l'avons déjà fait pour les voûtes coniques étudiées ci-dessus que sur cette élévation en section droite XY (fig. B) tous les plans de lit du cône, toutes les génératrices et, même, toutes les normales se projetteront suivant des droites S'C' - S'D'... etc..... issues du point S'.

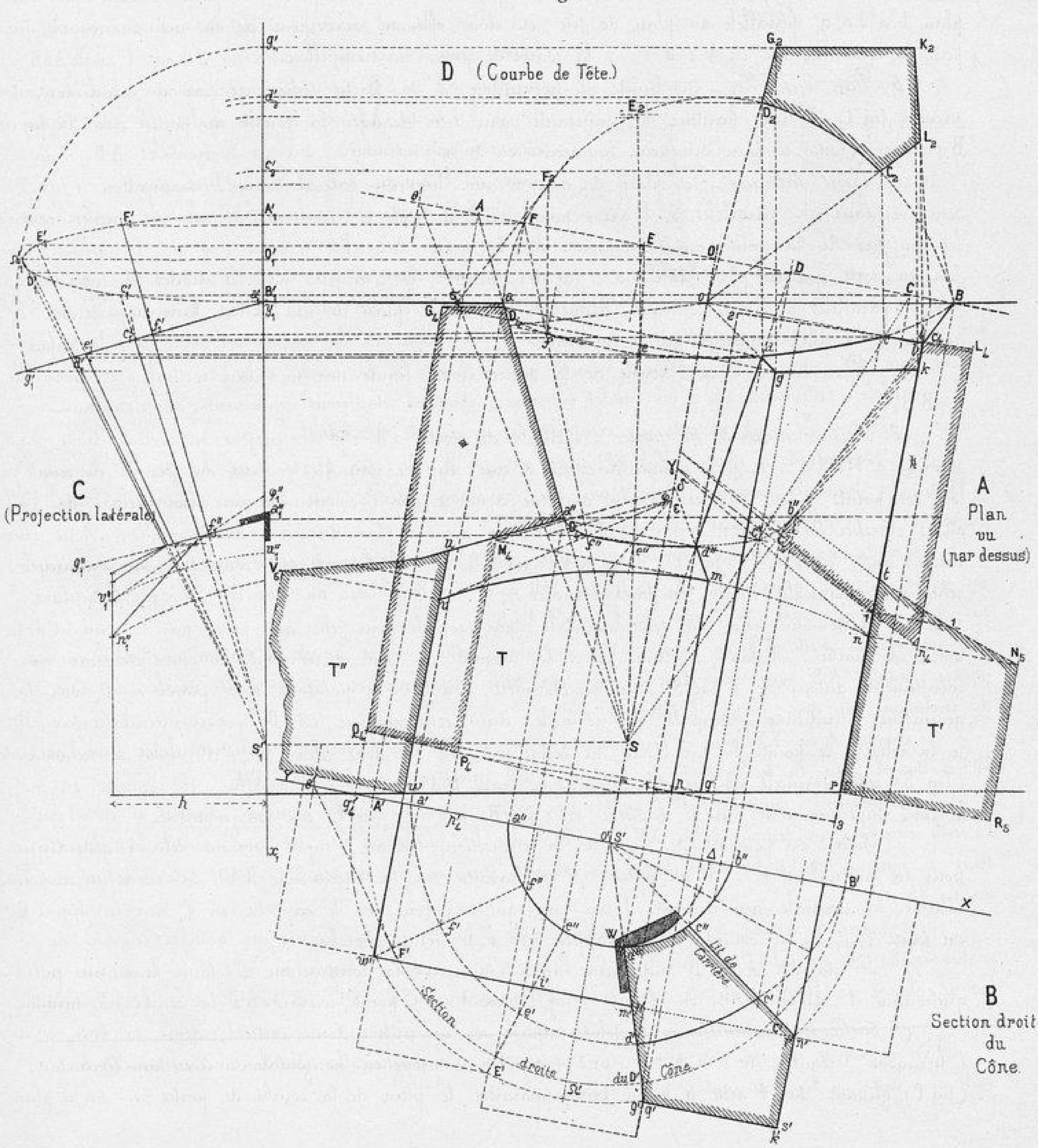
(c) Appareil et section de tête. – La section droite (fig. B) est divisée en un nombre impair de parties égales ou inégales, aux points C'C - D'D - E'E ...... et on figure en n's'q'..... le contour en tas de charge de chaque voussoir. On mène les génératrices SC - S'C', SD - S'D', etc...... On obtient

---

[1] Ces surfaces se nomment des normalies. – Ordinairement elles sont gauches, elles seraient développables si la courbe m n était une ligne de courbure de l'intrados.

par reports de hauteurs, sur la projection latérale (fig. C) les projections $S'_1C'_1$ - $S'_1D'_1$ .... etc .... de ces génératrices, on prend leurs intersections avec la trace verticale du plan de tête et on en déduit en $c'_1 d'_1 e'_1 f'_1$ .... rappelés en c d e f ..... sur les génératrices, en plan, fig. A), les points de la courbe de tête. - Il ne reste plus qu'à joindre ces points par une ellipse. - Enfin comme nous l'avons fait pour la lunette

Fig. 93.



cylindro-conique (§ 59), on cherche en $C_2 D_2 E_2 F_2$ .... (fig. D) la vraie grandeur des panneaux de tête. Le voussoir est limité latéralement (fig. A) par un plan vertical 3.4. parallèle à l'axe du cône.

Etudions plus spécialement le trompillon.

§ 70.- Trompillon.

(a) *Courbe de portée.* - A une distance suffisante du sommet nous coupons le cône par un plan $b''a'' - a''_1 g''_1$ parallèle au plan de tête, et nous obtenons exactement de la même manière que pour la courbe de tête, en $b''c''d''e''$..... la courbe de portée du trompillon.

(b) *Plan supérieur.* - On limite le trompillon, à sa partie supérieure par un plan horizontal mené (fig. C) à une hauteur h, suffisante pour bien dégager la courbe de portée. - Sur la figure B (section droite) ce plan supérieur apparaît en $w'n'$.

(c) *Plans latéraux.* - Les plans tr et uw qui limitent latéralement le trompillon (fig. T) sont verticaux et parallèles à l'axe; pour éviter d'avoir à recouper suivant des angles rentrants les voussoirs de la voûte qui porteraient sur les arêtes latérales nr et vw du trompillon, on fait en sorte que ces plans latéraux (fig. B) passent précisément par les droites $nr - n'r'$ et $wv - w'v'$.... parallèles à l'axe suivant lesquelles le premier plan de lit $S'C'$ et l'avant-dernier $S'F'$ recoupent le plan supérieur du trompillon.

(d) *Plan-arrière.* - A l'arrière de la pierre il est limité par un plan vertical rw, parallèle à BB'_1.

(e) *Surface normale de portée.* - L'ellipse de portée $a''b''c''d''$.... projetée en section droite (fig. B) suivant $a''b''c''d''$..... est prise comme directrice d'une série de normales menées au cône d'intrados par tous ses points. - Cette surface gauche constitue donc ce que l'on nomme une *normalie* dont nous allons chercher en v i m n (fig. A) l'intersection avec le plan supérieur du trompillon. - Nous chercherons aussi en t, 1, N_5 (fig. T') et en u V_6 (fig T'') les rabattements des courbes suivant lesquelles, cette même normalie recoupe les faces latérales.

Raisonnons pour une seule normale; par exemple pour celle qui passe par le point d'' de la courbe de portée. - Il faut construire en d'' la normale au cône d'intrados; à cet effet par un rabattement autour de l'axe SO, comme charnière, j'amène le point d'' à se placer en D_4 sur la génératrice méridienne principale. La normale, dans cette position, est $D_4\delta$, perpendiculaire sur SD_4. Je la relève: le point δ, sur l'axe, ne bouge pas; elle est donc relevée en $\delta d''$. - Sur la section droite (fig. B) cette normale est projetée suivant la trace $S'd''m'$ du plan méridien; elle recoupe en m' le plan supérieur $n'w'$; et je rappelle m' (fig. B) en m (fig. T) sur la génératrice.

Nota. - On pourrait se servir de la projection latérale (fig. C) comme cela est indiqué pour la normale $f''v$. - A cet effet: f'' est rabattu sur la méridienne SA; on mène en ce point rabattu, la normale qui rencontre l'axe en φ qui sera fixe; on le rappelle en φ''_1 sur la figure C. On joint $\varphi''_1 f''_1$ et on obtient en v''_1, rappelé en v, le point cherché.

Les figures A et B indiquent aussi comment la construction se fait pour un point quelconque 1, et comment on obtient (fig. T') en 1, un point courant de la courbe tN_5 rabattue.

(f) *Taille du trompillon.* - Le solide capable est un prisme droit, vertical, dont la base est l'hexagone irrégulier w u a''b''t r, pris (fig. T) en projection horizontale. - Avec un biveau a''_1 (fig C) glissant sur l'arête $a''b''$ on fait apparaître le plan de la courbe de portée, et sur ce plan,

une fois dressé, on applique le panneau de cette courbe.- Pour l'obtenir on l'aura rabattu comme nous avons fait plus haut (fig. D) pour la courbe de tête: Notre épure n'indique pas ce rabattement. D'ailleurs l'ellipse ainsi obtenue serait semblable à l'ellipse de tête. – On prend en v n r w (fig. T) le panneau supérieur du trompillon et en T' et T'' ses panneaux latéraux ; par conséquent nous possédons deux directrices de la surface gauche des normales, savoir : 1° l'ellipse de portée, et 2° les courbes $u\,v_6$ (fig. T'), v, i, m, n (fig. T) et t, i, n_5 (fig T'); nous aurons marqué sur chacune les points de départ et les points d'arrivée des génératrices, cette surface peut donc se tailler.

La partie conique a''S b'' se creuse en dernier.

§71.- Etude d'un voussoir courant (même figure 93).

(a) *Projections et panneaux*.- Par exception sur l'épure, ce voussoir est supposé vu par dessus. On voit en d c - d''c'' sa douelle conique d'intrados; en d''c''- m n, sa surface gauche de portée sur le trompillon et en m n - q r, le plan par lequel ce que l'on pourrait appeler sa crosse, repose sur le trompillon.

On cherche la vraie grandeur de ses panneaux de lit, en les rabattant autour de l'axe du cône comme charnière.- Le lit de dessus est rabattu à gauche en $D_4 G_4 Q_4 P_4 M_4 D_4$.- Le panneau de dessous a été rabattu à droite en $C_4 I_4 n_4 c_4''$.

(b) *Taille*.- Comme solide capable on prend un prisme horizontal 1.2.3.4, dont la section droite est le polygone mixtiligne d'q'S'n'c' pris sur la fig. B ; polygone que l'on a soin de prolonger jusqu'au biveau-cerce indiqué en W.- La cerce circulaire de ce biveau n'est autre chose que la section droite du cône d'intrados qui passerait par le point d'd' de la courbe de portée.

Sur les plans de lit S'q' et S'r', on applique les panneaux de lit obtenus ci-dessus; sur le plan supérieur q' k' du solide on applique le panneau g k s q (donné fig. A) et dès lors le plan de tête est limité par des droites d g - g k - c l ..... ce qui suffit pour le tailler.

Une fois dressé, on y applique le panneau de tête (fig. D) et cela donne une directrice elliptique d c, du cône d'intrados.- Une seconde directrice, circulaire cette fois, sera donnée par le biveau W, placé au point d''d''.- Dès lors le cône d'intrados peut être taillé.- On aura fait le développement du cône d'intrados et on aura cherché la transformée de la courbe de portée d''c''.- Un enroulement la mettrait donc en place; à la rigueur ce développement est inutile, parce que d'après la manière même dont la courbe de portée a''b''c''d''..... est obtenue, il est évident que les génératrices S d, S c, etc..... sont toutes partagées dans un même rapport par les points d''c'' de la courbe de portée; il en résulte que la corde d''c'' et la corde d c sont entre elles dans le même rapport constant[1] et qu'il en sera de même pour toute autre corde. Cela permet de déduire des points de la courbe de tête c d, autant de points que l'on voudra de la courbe de portée situés sur les mêmes génératrices.

Dès lors on possède une génératrice de la surface des normales.

On creusera la crosse, en arrière, en se guidant d'une part sur la droite m p qu'a donnée le panneau de lit de dessus et d'autre part sur la ligne p'n' (fig. B) qui est une horizontale de

---

[1] Sur l'épure on a pour ce rapport $K = \frac{40}{83} = 0,48$.- On prendra donc un point intermédiaire entre c et d.- On mesurera sa distance au point d, on multipliera cette distance par 0,48, on mènera la génératrice du cône et, du point d' comme centre, avec cette distance réduite, traçant un arc sur la douelle conique qui est taillée, on aura par recoupement avec la génératrice le point homologue de la courbe de portée.

hauteur connue. On fera donc apparaître le plan m n r p dont le panneau est fourni par la projection A. - Cela donne en m n une seconde directrice de la surface des normales, qui peut, dès lors, être taillée.

Arrière voussures.

—

§ 72. - Description et définitions.

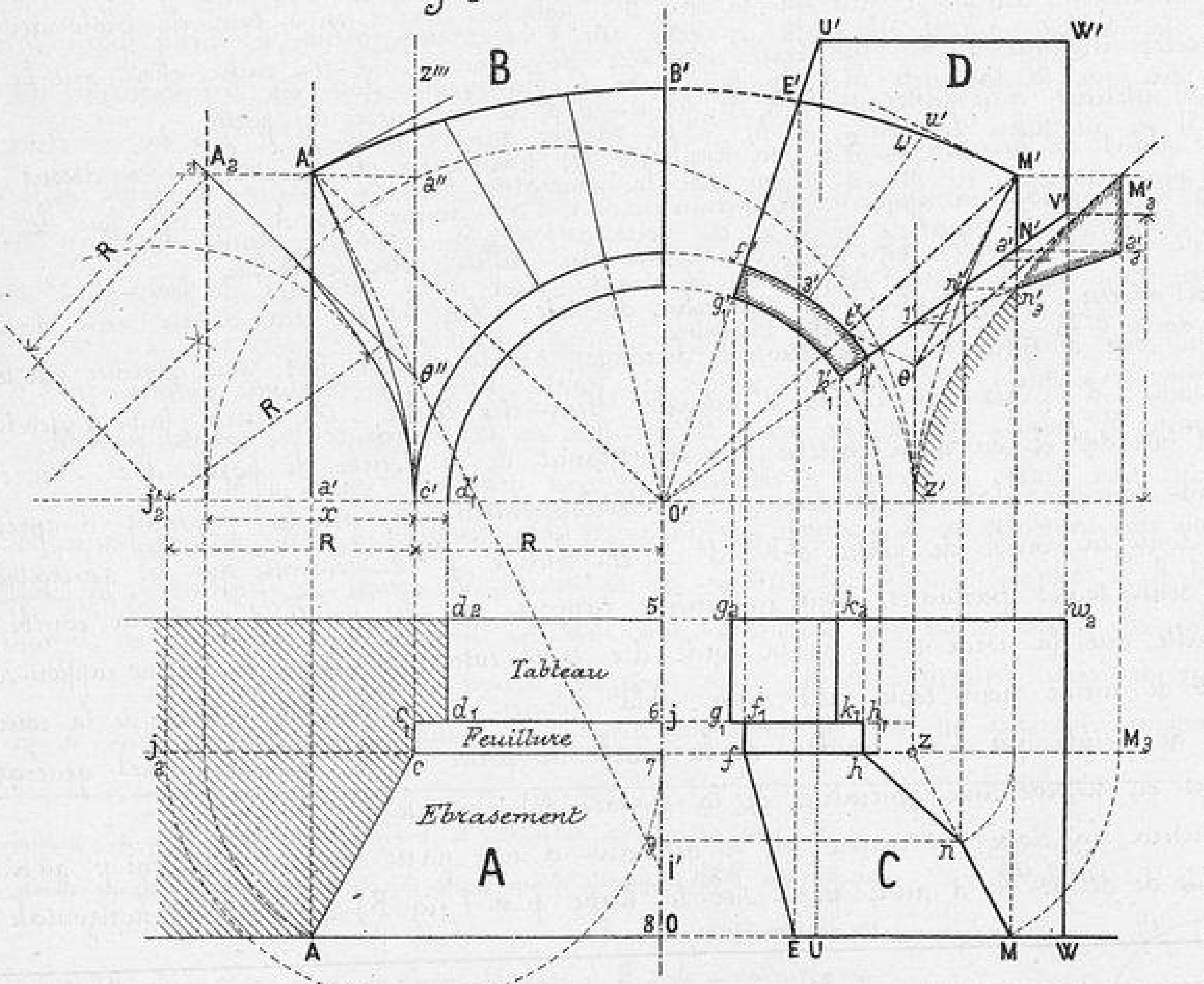
Les arrière voussures sont des voûtes employées pour couvrir l'espace trapézoïdal A, compris entre le plan d'ébrasement c A d'une fenêtre, entre son plan de feuillure c J et entre le parement intérieur A O, dans le cas où la fenêtre est circulaire.

Cette voûte doit être calculée de telle sorte qu'elle permette à la menuiserie d'échapper lorsque l'on ouvre les battants cintrés de la fenêtre.

§ 73. - Arrière voussure de Marseille. (fig. 94).

(a) Données. - Le tableau de la fenêtre $d_1 d_2$ ..... est couvert par un cylindre plein cintre. La feuillure $c_1 c$ est couverte par un autre cylindre d'un rayon un peu plus grand. On sait que la feuillure est destinée à loger le batis en bois sur lequel les battants de la fenêtre seront fixés à l'aide de charnières.

Fig. 94.



L'ébrasement c A, sera couvert par une surface gauche que nous allons définir.

Elle sera à trois directrices, savoir :

1ère directrice. - Le demi-cercle de feuillure c f z - c' f' z'.

2e directrice. - une courbe A'B'M'....... ordinairement un arc de cercle de centre I', tracé sur le parement intérieur du mur et que nous nommerons la courbe de parement.

Cette directrice s'arrête en A' et en M' aux arêtes d'ébrasement AA' et MM', il faut la continuer, en ces points, par deux autres courbes A'c' et M'z' tracées dans les plans d'ébrasement et que nous nommerons les courbes d'ébrasement, nous apprendrons tout à l'heure, à les déterminer.

3e directrice. – L'axe du cylindre de tableau, c'est-à-dire la droite OO' perpendiculaire au plan vertical de projection. – La surface d'intrados sera donc engendrée par une droite assujettie à rencontrer ces trois directrices. – En projection verticale (fig. B) ces génératrices divergeront toutes du point O'. – Par exemple O'f'E' est l'élévation d'une génératrice. On rappelle f' en f sur le cercle de feuillure, E' en E sur la courbe de parement et la projection horizontale de la génératrice est fE.

On voit immédiatement comme avantage que la voûte étant appareillée comme une porte, et ayant ses plans de lit passant tous par l'axe OO' il en résultera que les lignes de lit de l'arrière voussure seront des droites.

(b) Changement de directrice. – Courbe d'ébrasement. – La courbe d'ébrasement M'Z' doit être tracée de telle sorte qu'elle satisfasse aux conditions suivantes :

1ère condition (de dégagement). – Lorsque le battant de la fenêtre sera ouvert et rabattu sur l'ébrasement, son quart de cercle devra laisser la courbe d'ébrasement toute entière au-dessus de lui.

2e condition (d'aspect). – La surface gauche qui aura M'Z' pour 2e directrice, devra se raccorder avec la surface gauche qui a A'M' également pour 2e directrice, tout le long de la génératrice O't'M' dite *génératrice de passage*.

On a vu en géométrie descriptive que pour que deux surfaces gauches se raccordent il suffit qu'elles aient trois plans tangents communs en trois points d'une même génératrice. – Or puisque la seconde directrice, seule, change tandis que les deux autres sont conservées, il suffit qu'au point de passage M', la surface que l'on quitte et celle que l'on prend, aient le même plan tangent. Cela revient à dire que la tangente M'θ', à la courbe d'ébrasement doit être l'intersection du plan d'ébrasement ZM et du plan tangent en M', à la surface gauche dont M'B' est la directrice.

Or ce plan tangent en M' est défini par la génératrice M't' et par la tangente M'u' au cercle de parement. . Menons t'θ' parallèle à M'u' et nous aurons la ligne de front du plan tangent contenue dans le plan de feuillure. Cette ligne de front coupe en θ' la ligne de front z'z'' du plan d'ébrasement ; donc θ'M' est la tangente cherchée.

On ramène le plan d'ébrasement à être de front, par une rotation autour de z'z'' comme charnière. Le point M' vient en M'_3 le point θ' est fixe et la tangente se rabat en $\theta' M'_3$.

On peut donc tracer la courbe d'ébrasement, vraie grandeur, en $z' n'_3 M'_3$.

Pour qu'elle satisfasse à la première condition (d'échappement) il faut (voir la figure B) que si l'on rabat en $J'_2 R$ le quart de cercle du battant de la fenêtre, la courbe de feuillure $c' A'_2$ passe au-dessus de ce cercle, elle peut même être confondue avec lui sur une certaine étendue, et se continuer par un autre arc de cercle tangent en A'_2 à la tangente trouvée $A'_2 \theta''$.(1)

On pourrait prendre un arc de parabole, ayant son sommet en c' et tangent à la droite

---

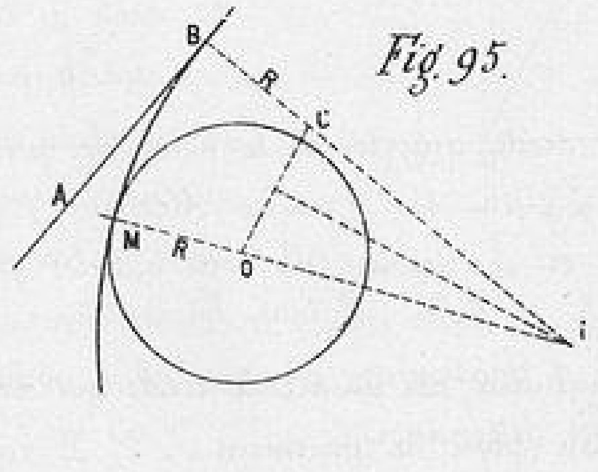


Fig. 95.

(1) Cela revient à résoudre le problème suivant (fig. 95) : construire une circonférence BM, tangente à un cercle O, et touchant une droite donnée AB, en un point donné B.

Solution. – Soit R le rayon du cercle donné O. On mène BC perpendiculaire sur AB et on prend BC = R. – On joint OC et on mène la perpendiculaire au milieu de cette droite. Le point I où elle rencontre la droite BC prolongée est le centre de la circonférence demandée.

$A'_2\,\theta''$. Mais il faudrait alors que le point A''_2-A' soit assez élevé pour que le cercle de la fenêtre ait son rayon R au plus égal au cercle de courbure de la parabole à son sommet. - Il est facile de voir que cela reviendrait à prendre la hauteur $a'A'$ telle que l'on ait : $\overline{a'A'}^2 = 2Rx$, en appelant x la longueur cA de l'ébrasement.

Dans le cas de la parabole le point θ'' serait au milieu de la verticale $c'a''$.

Fig. 96.

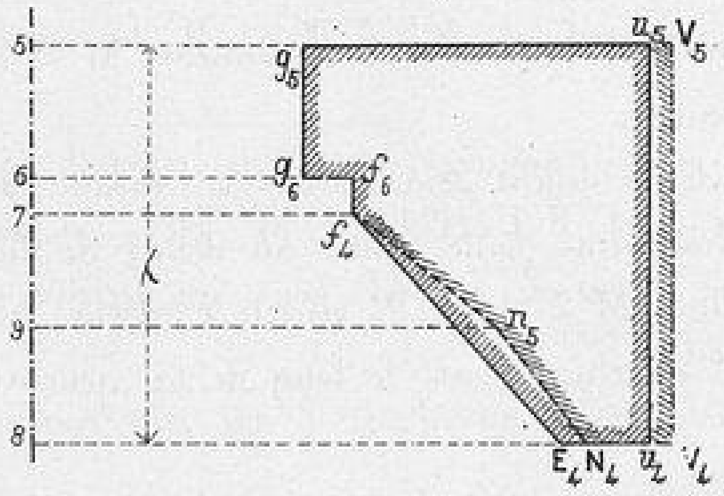
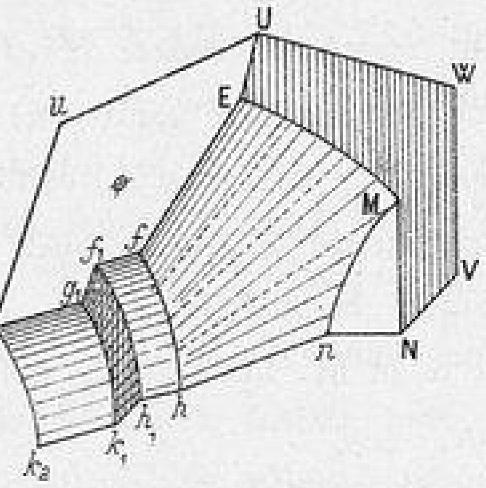


Fig. 97.



(c) Projections du voussoir d'angle. - Les figures C et D en montrent les deux projections. - Les panneaux de lit sont limités sur tout leur contour par des lignes droites. - La figure 96 en donne les rabattements en vraie grandeur ; la figure 97 montre le voussoir en perspective. - Le panneau de lit de pose y est figuré en $V_5\,g_5\,g_6\,f_6\,f_4\,n_5\,N_4\,V_4$. - La ligne $f_4\,n_5$ est une génératrice de la surface gauche ; $n_5\,N_4$ est l'intersection du plan de lit et du plan d'ébrasement.

(d) Taille du voussoir. - Le solide capable est un prisme dont la base est la projection verticale du voussoir. - On dessine sur l'intrados $g'_1k'_1$ la douelle du cylindre de tableau, ce qui donne l'arc de cercle g_1h_1 ; à l'équerre, on creuse, en prenant ce cercle pour directrice, une cavité telle que l'on puisse y appliquer le trapèze curviligne $f_1\,h_1\,k_1\,g_1$. - A l'équerre également, on fait apparaître le cylindre de feuillure et le cercle de feuillure fh est ainsi obtenu ; ce qui donne une première directrice de la surface gauche.

Sur le plan de parement intérieur EM.... on applique le panneau donné (fig. D) en E'M'. N'V'..... ce qui fournit en EM une partie de la seconde directrice.

Le plan d'ébrasement peut être préparé, car on a deux droites de ce plan ; l'une est MN, l'autre a été donnée en N n par le panneau de lit de pose. - On creusera donc, mais avec précaution, et en présentant le panneau d'ébrasement donné (fig. D) en $n'_3\,M'2'_3$. - La courbe d'ébrasement n M complète ainsi la seconde directrice de la surface gauche. Le reste de la taille est facile à imaginer.

§ 74. - Arrière voussure de Montpellier.

C'est le même problème que ci-dessus : seulement l'arc de cercle A'B'M' de parement est remplacé par une ligne droite horizontale.

§ 75. - Arrière voussure de Marseille altérée.

On se donne : 1° l'arc de parement A'B'M' ; 2° la droite qui joint le point le plus haut B' de cet arc, au point le plus haut du cercle de feuillure ; c'est la première directrice ; 3° Deux courbes égales, M'Z' et A'C' tracées dans les plans d'ébrasement et choisies de telle sorte que les ventaux de la fenêtre puissent échapper ; ce sont les deux autres directrices.

Cela posé : la surface d'intrados de l'arrière voussure est engendrée par un arc de cercle qui obéit aux conditions suivantes : 1° Son plan est toujours vertical et parallèle au plan de parement. - 2° Il rencontre toujours les trois directrices dont deux dans les plans d'ébrasement. - Cette surface est donc complètement définie.

Voûtes de révolution.

A. – Berceaux tournants.

Stéréotomie
20e Leçon.

§76. – Voûte annulaire.

(a) Définitions et données. – On appelle berceaux tournants les voûtes dont les intrados sont des surfaces de révolution. Soit OO'Z' (fig. 98) l'axe de la surface, et A'B'C'D'......H' la courbe méridienne qui en tournant autour de l'axe, engendrera la voûte.

(b) Appareil. – Nous divisons la courbe méridienne en un nombre impair de parties égales aux points B'C'D'.... par ces points nous menons les normales B'J' – C'L' – E'M', etc.... et nous achevons de tracer le contour B'J'K'L'C' d'un voussoir comme nous le ferions pour un berceau cylindrique qui aurait cette méridienne pour courbe de section droite.

Si, maintenant, nous faisons tourner toutes ces lignes autour de l'axe elles engendreront toutes les surfaces qui doivent limiter le voussoir, ainsi:

L'arc de méridienne B'C' engendrera la douelle du berceau tournant. – La normale B'J' engendrera un cône, dont le sommet est ω' et qui sera le cône de lit de pose. – La normale C'L' engendrera le cône de lit de dessus. – La droite horizontale K'L' engendrera le plan supérieur et la verticale K'J' engendrera le cylindre extérieur.

Les assises auront donc la forme de couronnes annulaires limitées par ces différentes surfaces. Dans une même assise les pierres seront limitées par des plans méridiens tels que c_2k_2 et c_1k_1 qui constitueront les surfaces de joint. – Dans une même assise les voussoirs pourront avoir, tous, la même longueur.

§77. – Taille d'un voussoir.

(a) Position symétrique à lui faire prendre. – Les voussoirs d'une même assise étant tous égaux entre eux, on en prendra un seul que l'on amènera (fig. M) à occuper une position de symétrie par rapport au méridien principal OV; c'est-à-dire que les méridiens de joint Oj_1 et Oj_2 seront symétriques par rapport au méridien principal.

Dans ces conditions le voussoir (fig. M') se projette verticalement de telle sorte que ses méridiens de joint c_1j_1 et c_2j_2 (fig. A) aient une seule projection verticale $c_1'b_1'j_1'$..... (fig. B).

Cela fait, on adopte deux procédés de taille suivant que le voussoir occupe une position (MM') voisine des naissances ou une autre Q'Q, voisine de la clef.

(b) Voussoir voisin des naissances. – Le solide capable est un prisme vertical droit dont la base horizontale, est le contour mixtiligne $c_1k_1k_2c_2$ relevé (fig. A) et dont la hauteur h, est prise en élévation. Ce solide préalable est donc en réalité une couronne cylindrique.

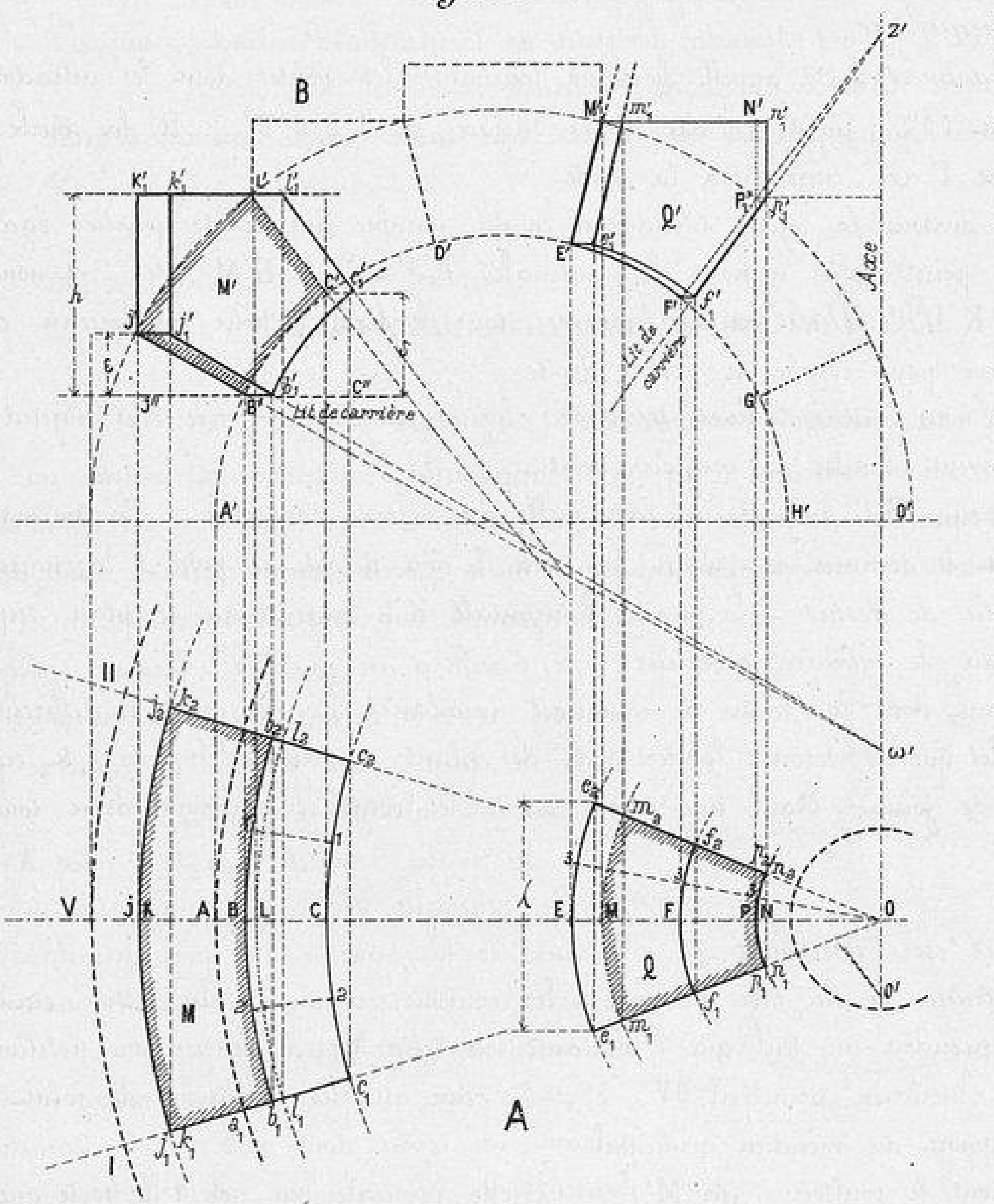
Sur le plan supérieur on applique le panneau $b_1b_2k_1k_2$ (fig. M) et cela donne en b_2b_1 une directrice du cône de lit supérieur.

Sur la partie cylindrique concave, avec une règle flexible placée à la hauteur δ (fig. M') on trace un cercle c_1c_2 – $c_1'c_2'$ et cela donne une seconde directrice de ce cône, lequel peut, dès lors, être taillé en joignant par des droites des points qui diviseraient en parties égales les

deux cercles directeurs.

De même le panneau curviligne $b_2c_2 - b_1c_1$ appliqué sur la base inférieure du cylindre capable donne une directrice du cône de lit de pose, tandis qu'une règle flexible placée à la hauteur E (fig. M') en donne une autre. — Les deux cônes de lit sont donc terminés.

Fig. 98.



Pour avoir la douelle d'intrados : 1° On construit un biveau-cerce suivant le profil L'C'B' ; 2° Guidant ce biveau sur les deux parallèles c_1c_2 et b_1b_2 ou le fait passer par les points qui les divisent en parties égales et on pratique, à sa demande, des jouées équidistantes, entre lesquelles, avec un peu d'habitude, on achève la taille au jugé.

(c) Voussoir voisin de la clef (fig. Q'Q). — Cette méthode mettrait la pierre trop en délit pour un voussoir tel que Q'Q, voisin de la clef. Alors on prend pour solide capable un prisme horizontal dont la base, relevée en élévation est le contour mixtiligne $M'n'_1 p'_1 f'_1 F'E'$, qui limite la projection verticale du voussoir. Et l'on a soin que la ligne de dessous $f'_1 p'_1$ soit très sensiblement parallèle au lit de carrière. — Sa longueur est λ, donnée en plan par la distance des points e_1 et e_2, et l'on doit en marquer soigneusement sur la face supérieure la ligne d'axe ONE qui servira surtout de repère pour les différents panneaux. D'ailleurs ce plan supérieur M'N' (fig. Q') du prisme capable doit être soigneusement dressé, les autres ne demandent pas à être préparés avec autant de soin.

On relève (fig. Q) le panneau supérieur $m_2 m_1 p_2 p_1$ et l'appliquant on obtient :

1° en m_2m_1 une directrice du cône de lit de dessus. Ce cône va donc se tailler avec un biveau relevé en N'M'E' (fig. Q') que l'on présentera bien normal et de telle sorte que sa branche horizontale (3.3.3. fig. Q) soit dirigée suivant des plans méridiens. — L'extrémité E' du biveau donnera une directrice e_1e_2 de la douelle d'intrados.

2° en m_2n_2 et m_1n_1 on a une directrice des plans méridiens de joint, lesquels se tailleront

à l'équerre.

3° en $n_1 n_2$ on a une directrice du cylindre extérieur, lequel s'obtient également à l'équerre. Une longueur constante $n'_1 p'_1$ (fig. Q') prise sur les génératrices fait connaître une directrice circulaire $p_1 p_2$ du cône de lit de pose.

4° Le lit de pose se déduit du cylindre extérieur à l'aide d'un biveau à 3 branches relevé en M'N'P'F' sur le méridien en élévation (fig. Q').

5° Dès lors, on a en $f_1 f_2$ une seconde directrice de la douelle d'intrados, laquelle s'obtient par un biveau-cerce comme dans la méthode précédente.

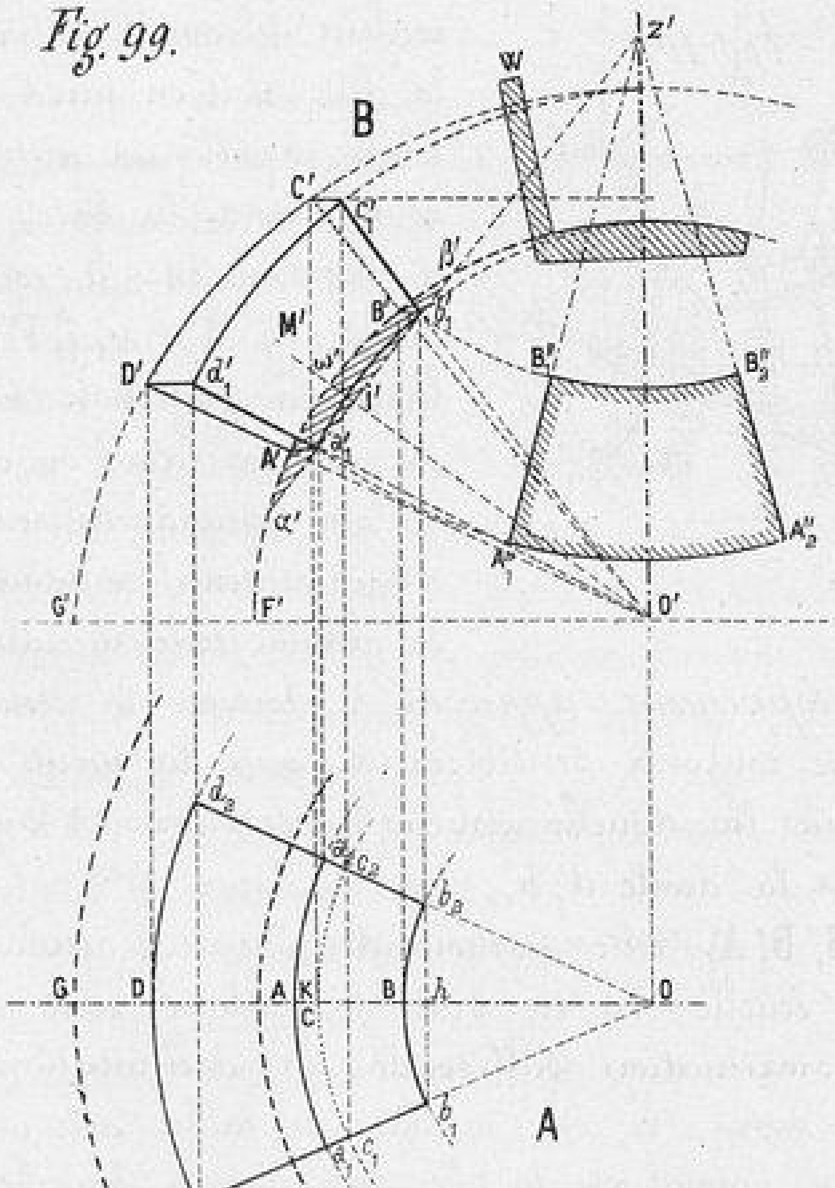
En résumé on voit que ce procédé est plutôt une taille directe qu'une taille par équarrissement.

B.- Voûtes sphériques simples.

§78.- Appareil par assises horizontales.

(a) Appareil.- Une voûte sphérique (fig. 99) s'appareille ordinairement comme un berceau tournant et ses voussoirs peuvent se tailler par les mêmes procédés; mais sur les chantiers on est dans l'habitude d'employer un procédé particulier de taille directe connu sous le nom de taille par l'écuelle que nous allons décrire.

Fig. 99.



(b) Taille d'un voussoir.- Prenons (fig. 99) le voussoir courant d'une assise et amenons-le, en M'M, à occuper une position de symétrie par rapport au plan du méridien principal.

Les quatre sommets $a_1 a_2 b_1 b_2$ (fig. A) de la douelle sphérique sont dans un même plan qui, à cause de la symétrie, est perpendiculaire au plan vertical et est projeté, en élévation, tout entier suivant la droite $\alpha' a'_1 b'_1 \beta'$.

Ce plan, supposé indéfini, coupe la sphère suivant un cercle dont $\alpha'\beta'$ est le diamètre et laisse, à sa gauche, une calotte sphérique que l'on nomme l'écuelle.

La méthode de taille consiste à faire apparaître d'abord, dans un bloc de volume suffisant, (fig. 100) une cavité $\alpha \beta \alpha_1 \beta_1$ creusée suivant cette écuelle.

(c) Creusement de l'écuelle.- A cet effet, on commence par dresser une face K aussi plane que possible.- On y trace au compas un cercle $\alpha\alpha_1 \beta\beta_1$ dont le diamètre est donné en $\alpha'\beta'$ (fig. 99.B).- On découpe une cerce sur le profil circulaire $\alpha'\omega'\beta'$ (fig. B) et on creuse la pierre (fig. 100) dans l'inté-

-rieur du cercle jusqu'à ce que la cerce, placée de telle sorte que les deux bouts $\alpha\,\beta$ - $\alpha_1\,\beta_1$ soient toujours aux extrémités d'un même diamètre, puisse s'y appliquer en la mettant normale au plan K.

A ce moment on dit que l'écuelle est creusée.

(d) *Délimitation de la douelle ; méthode par reports de points.* - Il faut alors tracer dans son intérieur le trapèze curviligne $b_1 b_2 a_1 a_2$ (fig. 101).

A cet effet les quatre points $b_1 b_2$ et $a_1 a_2$ ont été facilement placés sur le cercle du pourtour de l'écuelle, en prenant βh et αk de la figure 101 égaux à $\beta' b'_1$ et $\alpha' a'_1$ de la figure 99, B, longueurs marquées sur la cerce.

En élevant par ces points h et k des perpendiculaires à $\alpha\beta$ on obtient par recoupements avec le cercle les sommets $b_1 b_2$ et $a_1 a_2$ du trapèze de douelle.

D'ailleurs, comme vérification, on doit avoir $b_1 b_2$ (fig. 101) = $b_1 b_2$ (fig. 99, A) et $a_1 a_2$ (fig. 101) = $a_1 a_2$ (fig. 99).

Les points B et A (fig. 101) résultent dans le fond de l'écuelle des points B' et A', marqués sur la cerce (fig. 99).

Dès lors les deux parallèles de la sphère $b_1 B b_2$ et $a_1 A a_2$ (fig. 101) sont définies par trois points et peuvent, pratiquement, se tracer avec une règle flexible, quoique la sphère ne soit pas une surface développable.

Fig. 100.

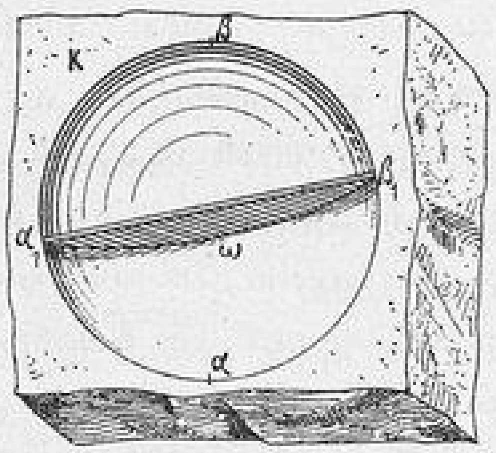
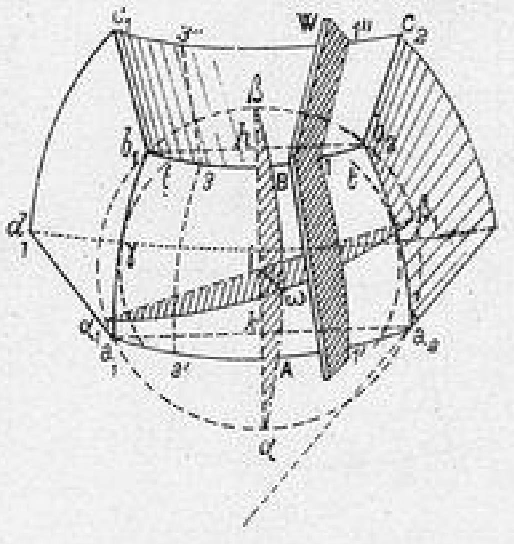


Fig. 101.



Les arcs de méridien $a_1 b_1$ et $a_2 b_2$ se traceront avec la cerce, que l'on guidera, d'une part, sur les extrémités b_1 et a_1 et qui sera, d'autre part, tangente en γ à un cercle t, t que l'on tracera sur le fond de l'écuelle avec un rayon égal à la distance à laquelle le point ω, pôle de l'écuelle, se trouve de chaque grand cercle méridien.

(e) *Procédé expéditif par un développement approché.* - Lorsque la sphère est de grand rayon, l'arc de cercle $\alpha'\,\omega'\,\beta'$ se confond sensiblement avec la corde $\alpha'\beta'$ et on peut, sans erreur sensible, admettre que la douelle sphérique se confond avec la douelle conique qu'engendrerait, en tournant, la droite $a'_1\,b'_1$.

Dès lors, on développe en $A''_1\,B''_1\,B''_2\,A''_2$ cette portion de cône et, appliquant le trapèze curviligne dans le fond de l'écuelle, on en suit le contour avec une pointe traçante, ce qui donne, avec une approximation suffisante, la délimitation de la douelle sphérique.

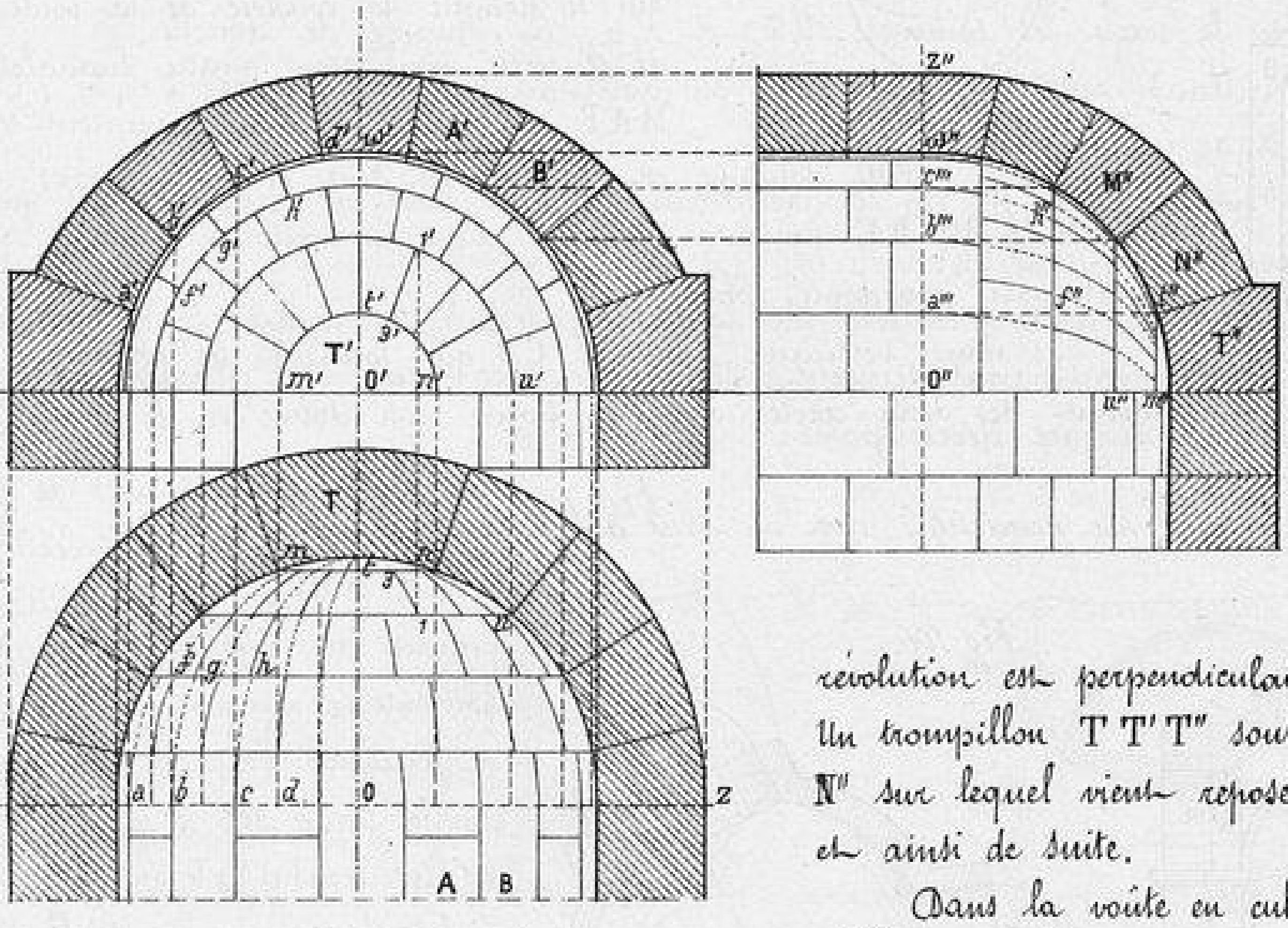
(f). *Taille des cônes de lit.* - Avec un biveau cerce W (fig. 99 - B) dont la branche

courbe est le méridien et dont la branche droite est la normale à la sphère, on fait apparaître successivement plusieurs génératrices 1,1" - 3,3' ..... (fig. 101) des cônes. Il faut avoir soin que les extrémités 1'1 et 3'3 de la branche courbe soient toujours sur des points d'égal partage des petits cercles $a_1 a_2$ et $b_1 b_2$.

(g) Taille des plans méridiens de joint. - Le même biveau cerce servira pour tailler les plans de joint méridien. Seulement la branche courbe devra passer toujours par le point ω, qui, dans le fond de l'écuelle, en est le pôle.

§79. - Appareil en cul de four.

Fig. 102.



Cet appareil (fig. 102) s'emploie surtout dans la construction des niches. Mais on conçoit facilement qu'en soudant par leur plan méridien deux niches appareillées de cette manière, on puisse avoir une demi-sphère complète.

Dans ce cas l'axe OO' de la surface de révolution est perpendiculaire au plan vertical. - Un trompillon T T' T" soutient un premier anneau N" sur lequel vient reposer un second anneau M" et ainsi de suite.

Dans la voûte en cul-de-four, le quart de sphère se prolonge par un berceau cylindrique.

Dans la niche la sphère est limitée à son méridien de front OZ - O"Z".

Il est facile de comprendre que, avec cet appareil, chaque anneau vertical N", M"...... exerce sa poussée sur les piédroits; on évite ainsi la poussée au vide qui se produirait nécessairement si la niche était appareillée, comme les berceaux tournants, par assises coniques horizontales.

C. - Voûtes sphériques composées.

Stéréotomie
21e Leçon.

§80. - Descriptions.

(a) Voûte sphérique sur pendentifs avec fermeret[1] (fig. 103). - On veut couvrir à l'aide d'une

[1] On dit quelquefois formeret au lieu de fermeret. - Un fermeret est un arc noyé dans un mur.

sphère, une salle carrée.

A cet effet: Imaginons la demi-sphère qui passerait par les quatre sommets A, B, C, D, du carré. - Coupons cette demi-sphère par quatre plans verticaux passant par les côtés AB - BC - CD ..... du carré.

Fig. 103.

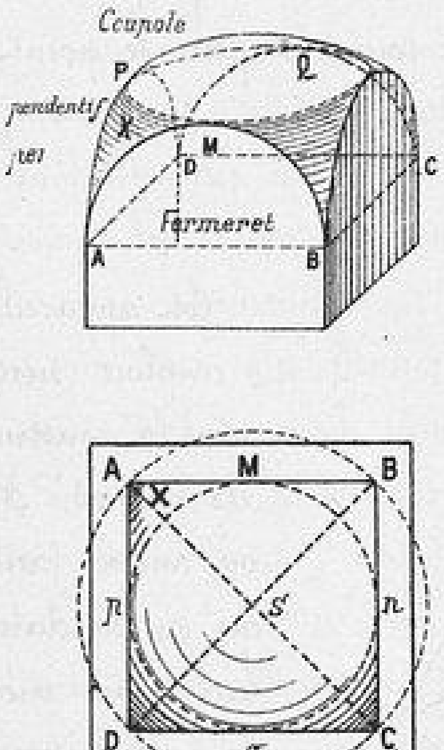
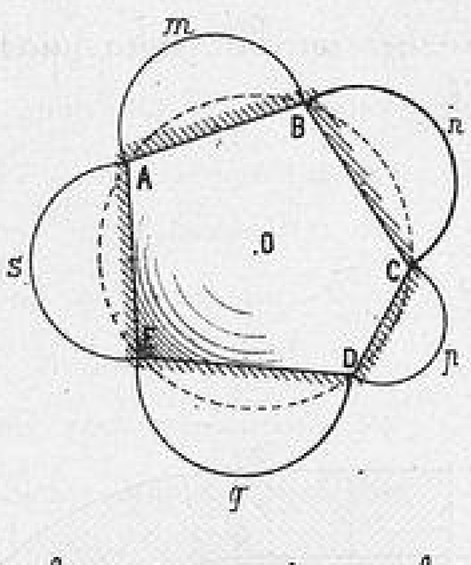


Fig. 104.



Nous obtiendrons quatre demi-cercles égaux, qui laisseront subsister entre eux et au-dessus d'eux une portion de sphère. Ces demi-cercles se nomment les *fermerets*.

Traçons le cercle horizontal m n p q qui passe par les points les plus hauts des cercles verticaux. Il restera au-dessus de ce cercle une calotte sphérique qui se nomme la *coupole* de la voûte; au-dessous de ce cercle nous avons quatre triangles sphériques MAP - MBN, etc.... qui se nomment les *pendentifs* de la voûte. - Cette solution est générale et toute salle (fig. 104) dont les sommets A B C D E peuvent s'inscrire dans un cercle de centre 0, peut être couverte par une demi-sphère.

Les murs verticaux AB - BC - CD qui forment les parois de la salle recouperont cette sphère suivant des demi-cercles dont la figure 104 donne en AmB - BnC .. etc.... les rabattements.

(b) *Voûte sphérique sur pendentifs, avec ou sans arcs doubleaux.* - (fig. 105). - Les quatre fermerets

Fig 105.

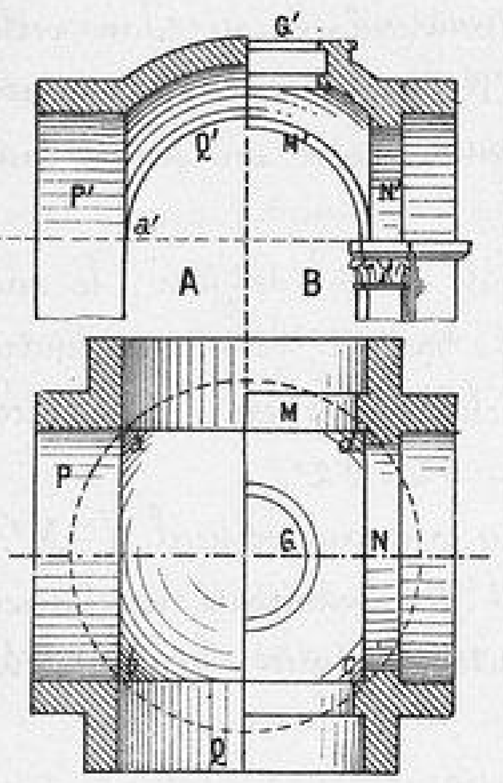
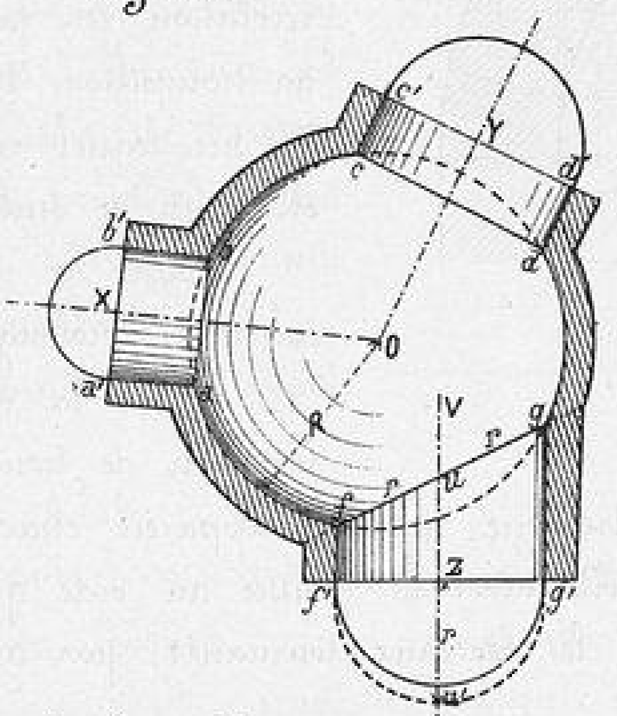


Fig. 106.



AMB, BMC..... de la figure précédente peuvent être pris pour bases de cylindres horizontaux auxquels la sphère servira de jonction. - On a la disposition indiquée sur la figure 105 à gauche. - De plus les intersections ab ou bc peuvent être renforcées par un arc doubleau NN' et MM'. - La coupole peut en plus être coupée par un cercle horizontal servant de base à un cylindre vertical GG', formant ce que l'on nomme une lunette sphérique. - Cette disposition permet de prendre du jour à la partie supérieure de la voûte.

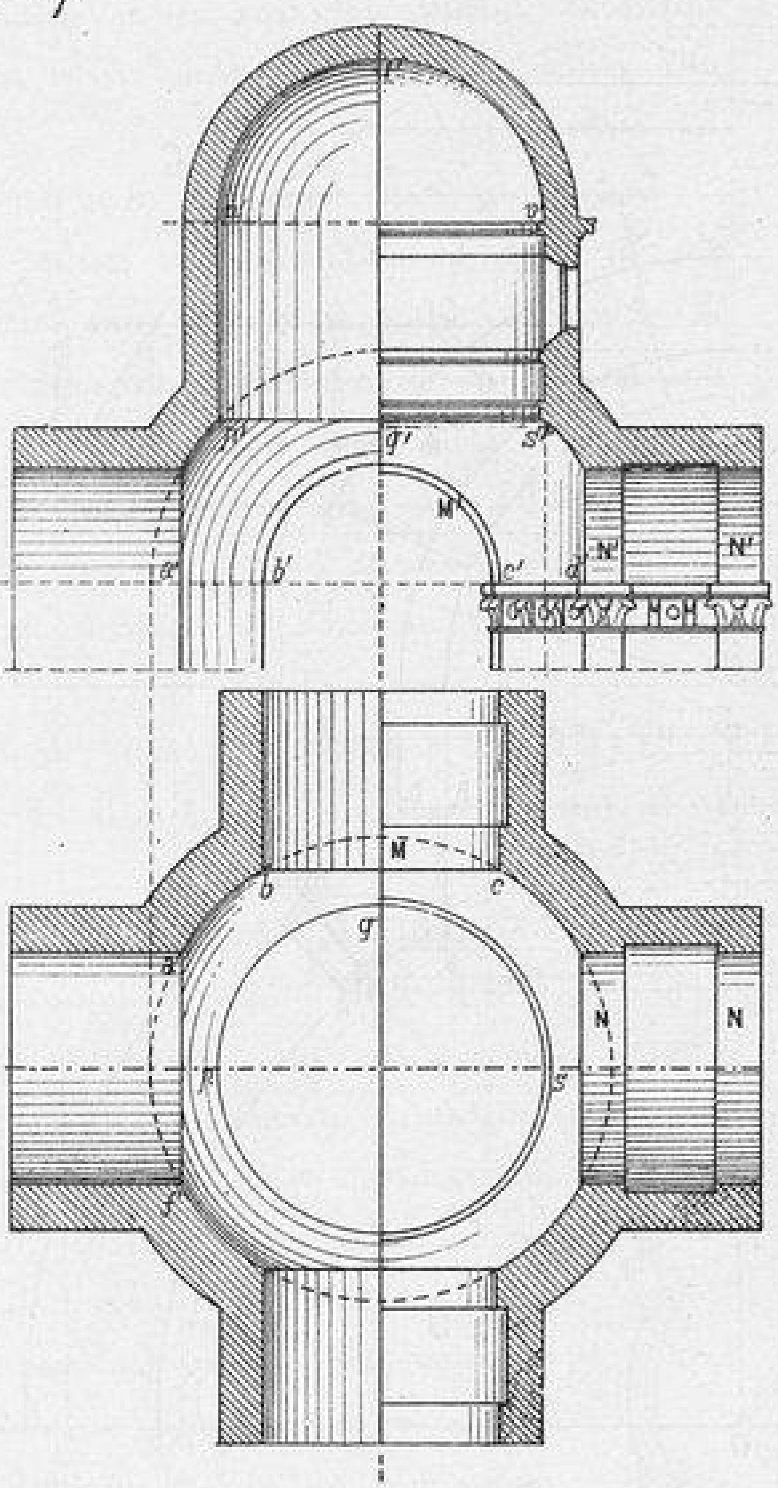
(c) *Jonction de plusieurs berceaux cylindriques par une voûte sphérique.* - (fig. 106). - Plus généralement, si plusieurs berceaux cylindriques OX - OY - VZ, doivent se réunir ensemble on peut prendre pour nœud de jonction une sphère quelconque de centre O. - Les berceaux tels que OX et OY dont les axes passeront par le centre de la sphère auront pour section droite les cercles d'intersection ab ou cd; ils seront donc en plein cintre.

Mais un berceau tel que VZ dont l'axe ne passerait pas par le centre O de la sphère aurait le cercle fg pour section oblique et sa section droite f'g' serait une ellipse surhaussée dont le petit axe

serait f'g' et dont le demi grand axe vertical, serait Zu' égal au rayon fu du cercle d'intersection du cylindre et de la sphère.

(d) Coupole sphérique sur trumeaux et supportant un dôme. – (fig 107). – Les cercles de base af et bc peuvent laisser entre eux, sur la sphère, une partie libre ab, qui se nomme un trumeau. – Le trumeau n'est donc autre chose qu'un pendentif élargi à sa base. – Cette disposition permet d'avoir au croisement des berceaux un espace plus considérable que dans la voûte sur pendentifs.

Fig. 107.



On peut couper la coupole qui reste au-dessus des trumeaux par un plan horizontal p's' donnant naissance à un cercle, prendre ce cercle pour base d'un cylindre vertical formant tour-ronde et couvrir ce cylindre par une surface de révolution u't'v', sphérique, elliptique ou autre, constituant un dôme. – La partie en tour-ronde peut être percée de fenêtres.

Tel est le principe des coupoles et des dômes de Saint Pierre de Rome, du Panthéon, des Invalides, et de beaucoup de monuments du même genre.

On voit combien l'emploi de la voûte sphérique permet de combinaisons variées; c'est aux architectes bizantins que l'on doit d'avoir imaginé ces combinaisons qui sont toutes basées sur la propriété que possède la sphère d'avoir toujours pour section plane une circonférence.

Nous étudierons, en épure, la voûte dont l'ensemble est indiqué sur la figure 107.

§81. – Voûte sphérique sur trumeaux avec arcs doubleaux (fig. 108).

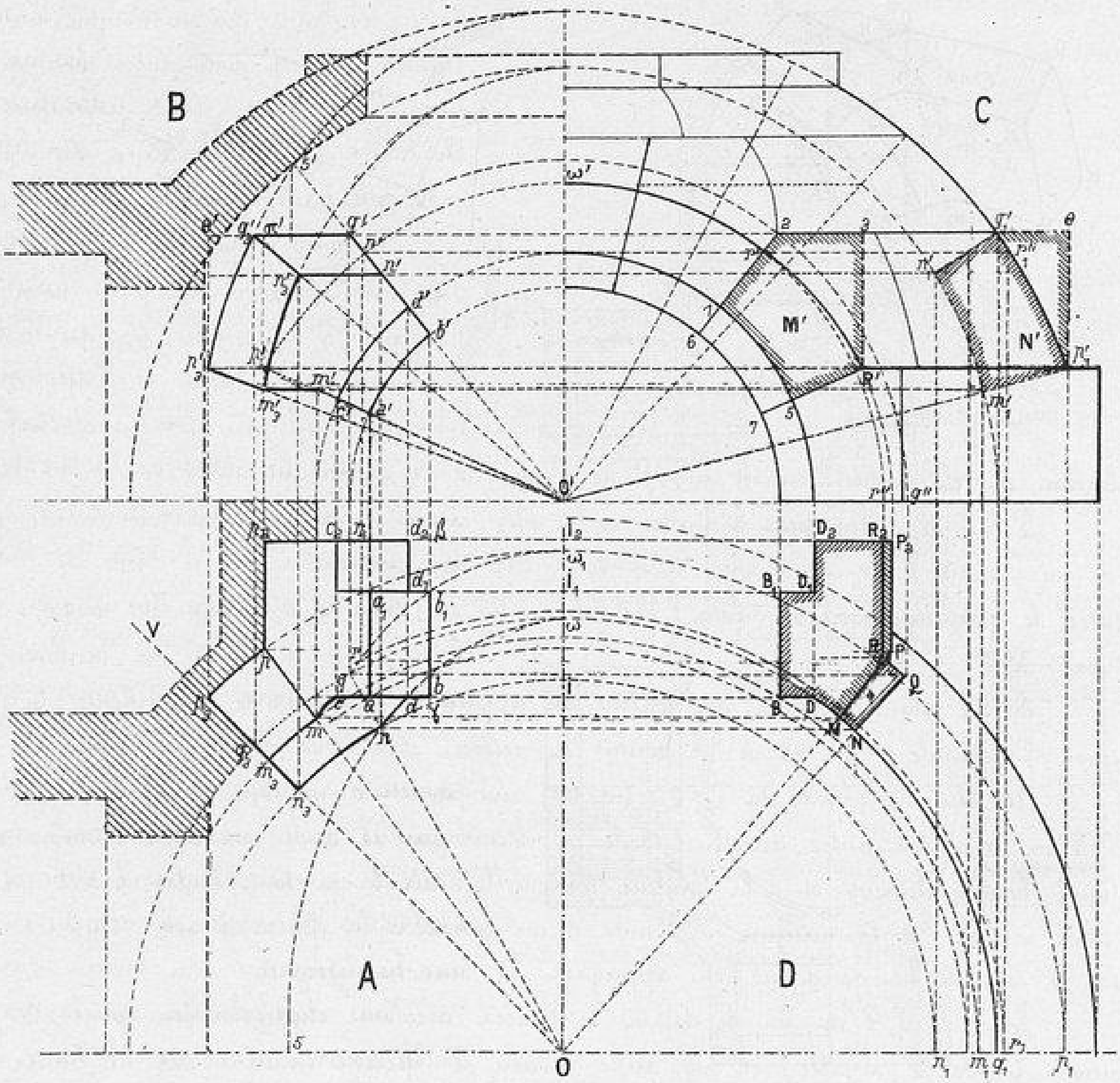
La figure A, donne le quart du plan, vu par dessous. – La figure B est une demi-coupe méridienne. – La figure C est une demi-élévation extérieure; elle donne en n'm', la méridienne d'intrados et en p'q', la méridienne d'extrados de la sphère. – Sur cette même figure C, on voit en r'p' l'extrados du berceau, dans le cas où cette voûte serait extradossée parallèlement. – Si elle était extradossée en tas de charge, il conviendrait alors de prendre le plan supérieur 2.3 de son tas de charge au même niveau que le plan supérieur q'θ du tas de charge de la sphère.

Dans le cas des extrados parallèles le voussoir présente l'aspect indiqué sur la figure 109 en perspective. – Dans l'autre cas, il se présente comme l'indique la figure 110. – Remarquons qu'il n'y a aucune économie de pierre à extradosser parallèlement, et qu'il faudra toujours que le solide capable passe, à un instant donné, par l'état indiqué sur la figure 110.

Le voussoir que nous étudions comprend une partie de l'arc doubleau ; il est limité dans le berceau à un plan de joint $p_2 d_2$ et dans la sphère à un plan méridien OV orienté à 45°.

Les intersections sont faciles à comprendre et à déterminer, nous nous contenterons de les décrire.

Fig. 108.



Le plan de lit de dessus du berceau O'q' (fig. B) donne comme intersection avec l'intrados de la sphère un arc de grand cercle projeté verticalement en d'n' et horizontalement en d n. En plan d n est un arc d'ellipse dont le point 5'5 est l'extrémité du petit axe et qui, prolongée, irait passer par le point ω, situé sur l'équateur de la sphère.

Le même plan recoupe l'extrados de la sphère suivant l'arc rq, r'q'.

Le panneau de ce lit de dessus est rabattu (fig. D) en $BB_1D_1D_2R_2RQND$.

De même, le plan de lit de pose O'a'p' (fig. B) recoupe l'intrados de la sphère suivant l'arc de cercle c'm' - cm. - Sur l'extrados l'arc de courbe est réduit à un point pp', ce qui tient à ce que (fig. C) les points p' et p'_1 d'extrados du berceau et de la sphère ont été pris au même niveau.

Le panneau de lit de pose est rabattu (fig. D) en $BB_1D_1D_2P_2PMD$.

Le panneau de section droite du berceau est obtenu en M' (fig. C) et le panneau de section

méridienne OV de la sphère est en N' (fig. C).

Dès lors tout est prêt pour la taille.

Fig. 109.

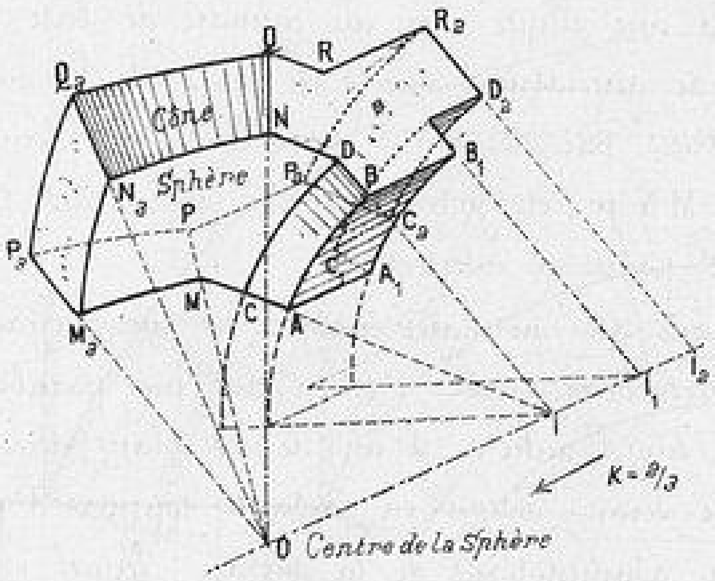
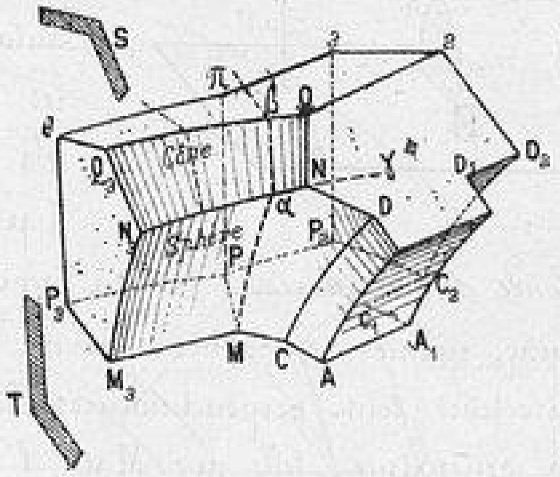


Fig. 110.



§ 82. – Taille d'un voussoir.

Le solide capable sera un prisme vertical dont la base est le contour simplifié $n_3\,p_3\,p\,p_2\,\beta\,\gamma$ de la projection horizontale.

Sur le plan arrière $p_2\,\beta$ du prisme on applique le panneau de section droite M', du berceau et cela permet en se servant de l'équerre, d'abattre les plans de lit du berceau.

Le lit de dessus peut s'abattre à la volée, car il laisse le voussoir tout entier d'un même côté de lui, mais le lit de dessous doit se tailler avec précaution et il faut, de temps en temps, présenter le panneau correspondant $PMCAA_1$.... (fig. 110) afin d'être sûr de ne pas dépasser la ligne rentrante MP.

Sur le plan supérieur du prisme on applique le panneau $\theta\,Q_3\,Q\,2\,3\,\pi$ (fig. 110) que la projection horizontale (fig. 108 - A) a permis de relever.

Dès lors on possède en $Q_3\,Q$ (fig. 110) une directrice du cône de lit de dessus de la sphère. En $N_3\,N$ on aura une autre directrice facile à obtenir car ce cercle peut être tracé avec un règle flexible appliqué horizontalement et à la hauteur convenable, sur la partie cylindrique concave $n_3\,n\,\gamma$ (fig 109) du solide capable. A la rigueur, à l'aide d'un biveau obtus S, relevé en $n_1'\,q_1'\,\theta$ (fig. C) on pourrait creuser le cône de lit de dessus, en appuyant la branche horizontale du biveau sur le plan supérieur.

Le cercle $P_3\,P$ du lit de dessous se tracera avec une règle flexible, sur la partie cylindrique extérieure du solide capable, et un autre biveau T, permettra d'obtenir le cône de lit de dessous, et par conséquent, le cercle $M_3\,M$ de la douelle sphérique. – Cette douelle s'obtient ensuite avec un biveau-cerce comme dans l'épure précédente.

Le reste de la taille ne présente pas de difficulté.

Voûtes annulaires composées.

Stéréotomie
22e Leçon

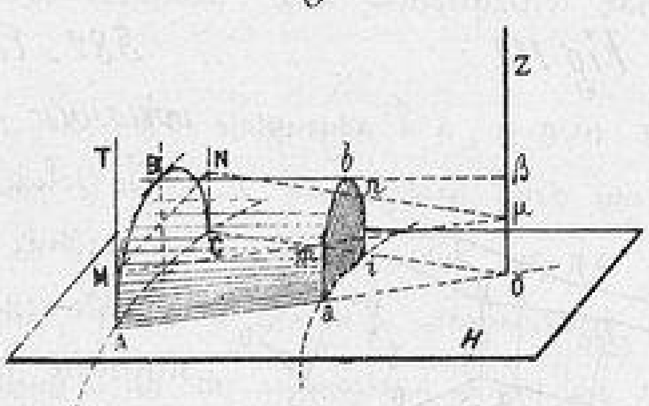
§ 83. – Considérations géométriques.

(a) Conoïde. – Dans l'épure que nous allons exécuter, nous rencontrerons comme surface d'intrados une surface gauche que nous avons étudiée dans le cours de géométrie descriptive sous le nom de conoïde. Il est utile de rappeler d'abord quelques principes ou constructions géométriques dont nous aurons à faire usage :

Un conoïde est une surface gauche, à plan directeur H (fig. 111) et à deux directrices ABC et

OZ, dont l'une OZ est droite; cette dernière se nomme l'axe du conoïde. — Le conoïde est droit si l'axe OZ est perpendiculaire au plan directeur H.

Fig. 111.

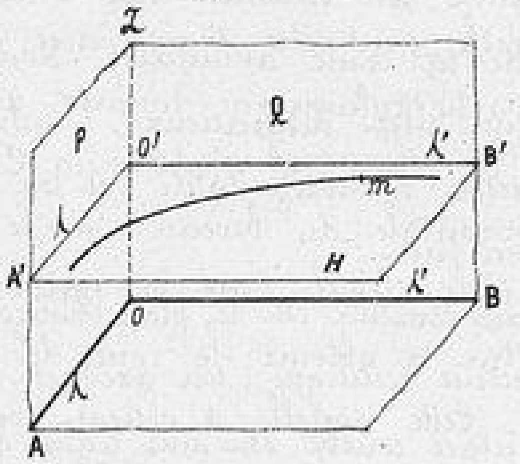


Dans le conoïde dont nous aurons à faire usage, et qui est connu sous le nom de *conoïde de tour ronde*, la directrice courbe ABC est une courbe gauche résultant de l'enroulement d'une ellipse sur un cylindre de base AC. — On obtient autant de génératrices que l'on veut, de la surface, en coupant les directrices par des plans parallèles au plan directeur et tels que $MN\mu$, et joignant par des droites telles que $M\mu$ — $N\mu$, les points d'intersection.

(b) *Paraboloïde des normales.* — Le lieu géométrique des normales menées à une surface gauche aux divers points d'une même génératrice est un *paraboloïde droit*, c'est-à-dire un paraboloïde dont les deux plans directeurs sont perpendiculaires l'un sur l'autre. — L'un de ces plans directeurs est perpendiculaire à la génératrice, telle que $M\mu$, l'autre serait obtenu en faisant tourner d'un angle droit autour de la génératrice comme charnière, le plan asymptotique de la surface, lequel est ici parallèle au plan directeur H.

(c) *Intersection d'un paraboloïde par un plan.* — Sauf dans des cas particuliers, la section d'un paraboloïde par un plan est une hyperbole. Les asymptotes ont leurs directions données par les génératrices λ et λ' du paraboloïde qui sont elles-mêmes parallèles à ce plan; comme position elles sont les intersections du plan sécant et des plans asymptotiques des génératrices λ et λ'. On sait d'ailleurs que le plan asymptotique d'une génératrice λ ou λ' est le plan P ou le plan Q mené par cette droite et parallèle au plan directeur correspondant (fig. 112)

Fig. 112.



Cela posé: Soient P et Q les deux plans directeurs d'un paraboloïde. Supposons-les tous les deux verticaux et soit OZ leur intersection. Cherchons l'intersection de ce paraboloïde par un plan H, perpendiculaire à la droite OZ.

Il existe deux génératrices, de système différent, OA et OB, qui sont parallèles à ce plan H, et nous pouvons supposer que les plans directeurs passent précisément par ces droites.

Soient O'A' et O'B' les intersections du plan sécant et des plans directeurs; la section du paraboloïde par le plan sera une hyperbole dont les asymptotes seront les droites O'A' et OB'. — De telle sorte que la connaissance d'un seul point m, de la courbe entraînera celle de tous les autres, en employant la méthode que nous allons indiquer.

(d) *Tracé d'une hyperbole connaissant les asymptotes et un point de la courbe.* — On sait que si par un point m, ou m' de la courbe on mène des parallèles aux asymptotes et si l'on appelle x et y et x' et y', les coordonnées ainsi définies, on a: (fig. 113)

$$xy = x'y' = K^2 \text{ (quantité constante).}$$

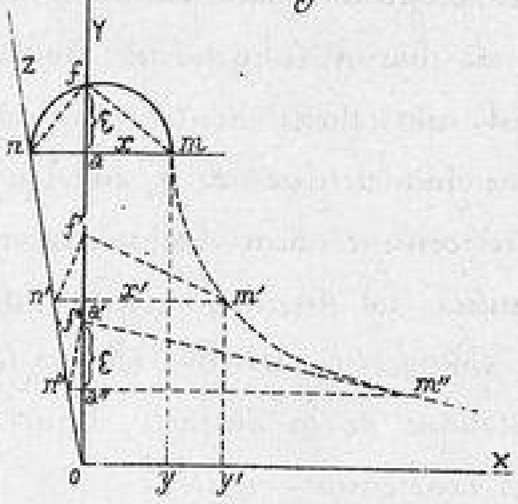
Si au lieu de y et de y' on prend des longueurs proportionnelles my et my', le produit mxy, sera encore égal au produit $mx'y'$; d'où l'on déduit le tracé suivant applicable sur un chantier parce qu'il ne nécessite que l'emploi de l'équerre et du compas:

1° Par le centre O, on mène une droite quelconque OZ. — Il est évident que si par des points a,

a', a'' de l'asymptote oy, on mène des parallèles à l'autre, les longueurs interceptées a n - a'n' - a''n'', seront proportionnelles aux distances oa - oa' - oa'' et, par conséquent, aux ordonnées des points m, m', m'' de la courbe.

2° Par le point donné m, on mène une parallèle m a n, à l'asymptote OX; sur cette ligne comme diamètre on décrit une demi-circonférence et par le point a on mène une perpendiculaire af au diamètre m n; soit ℓ la longueur de cette ligne. On a évidemment $\overline{am} \times \overline{an} = \overline{af}^2$, ou $x \times my = \ell^2$.

Fig. 113.



3° Pour avoir un point quelconque m' de l'hyperbole, on mène une autre droite quelconque n'a', parallèle à l'asymptote OX; par a' on élève une perpendiculaire à cette asymptote et sur cette droite on porte de a' en f' la longueur ℓ. On joint n' au point f' et on mène f'm' perpendiculaire sur n'f' jusqu'à la rencontre en m' avec a'n'. Le point m' ainsi obtenu, est un point de l'hyperbole, car on aura aussi $a'm' \times a'n' = \overline{a'f'}^2 = \overline{am} \times \overline{an}$.

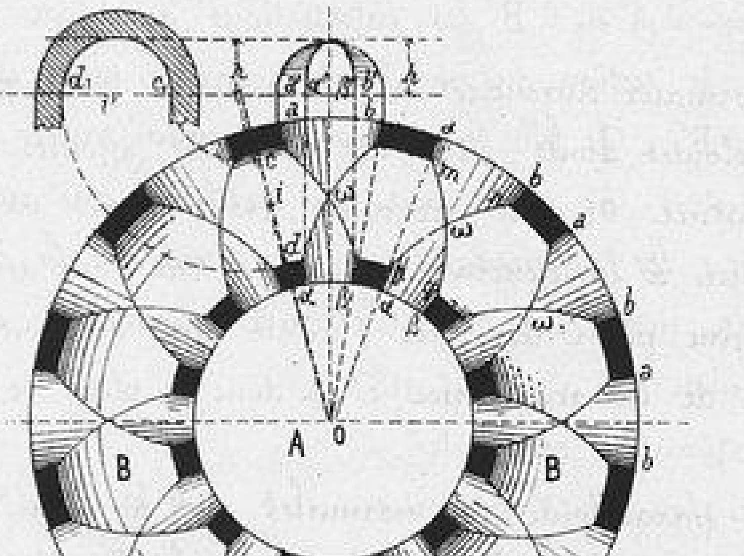
§ 84. – Voûte d'arête en tour ronde. – Description. (fig. 114).

Une tour ronde A, est entourée par une galerie annulaire B, B. On veut que cette galerie forme portique, et, à cet effet, l'on pratique dans son mur extérieur des ouvertures ab - ab - ab ....; si par les points a, b, a, b.... on mène des droites convergeant au centre, on obtient en α, β, α β.. les ouvertures à ouvrir dans la tour.

Comment couvrir le passage compris entre ab et α β?

Évidemment on pourrait prendre un cône qui aurait son sommet sur l'axe de la tour, et pour base la courbe ab; l'intersection de ce cône et de la voûte annulaire donnerait une sorte de lunette conique. – Mais cette voûte conique produirait un effet disgracieux; l'intrados paraîtrait plonger du côté du sommet; on préfère lui garder le caractère d'horizontalité, et on prend, pour intrados des passages transversaux, un conoïde défini comme suit:

Fig. 114.



1° Son plan directeur est le plan horizontal;

2° Sa directrice rectiligne (son axe) est l'axe O de la tour;

3° Sa directrice courbe est une ligne gauche résultant de l'enroulement sur le cylindre extérieur d'une ellipse qui aurait pour grand axe l'ouverture ab, et pour demi petit axe vertical la montée h, du berceau tournant. Dans ces conditions les conoïdes et le berceau tournant se couperont suivant des courbes gauches m q, n p, etc.. Nous démontrerons que si la méridienne du berceau tournant est une demi-circonférence, ou une demi-ellipse, la projection horizontale n p de cette arête gauche est un arc de spirale d'Archimède.[1]

---

(1) Un des plus remarquables exemples de ce genre de voûtes existait à Paris, à la halle au blé, en démolition à l'heure où ces lignes sont écrites.

§85. – Épure de la voûte d'arête en tour ronde, pénétrant une voûte sphérique (fig. 115)

(a) Le Tore et la Sphère. – Les données sont les mêmes que sur la figure d'ensemble (fig. 114). Nous supposerons, en plus, que la tour intérieure est couverte par une coupole sphérique que le conoïde viendra rencontrer suivant une courbe gauche $e_1 d_1$..... (fig. A). – La coupe ox_1 (fig. C) montre les méridiens de la sphère et de la voûte annulaire qui n'est autre chose qu'un tore. – On y voit en A'B'C'.... M'N' l'appareil de ces voûtes, si elles étaient seules.

Nous pouvons donc tracer, en plan, (fig. A et B) les projections des parallèles bb_2, cc_2 .....etc. pour le tore et me_1 - nn_1 ..... pour la sphère, qui sont les lignes de lit d'intrados des voûtes de révolution.

(b) Le conoïde. – Prenons en 4.4, en plan, l'écartement des pieds droits extérieurs, rectifions la longueur circulaire 4-M_1-0_1-c_1-b_1-4 et portons-la (fig. D), une fois rectifiée, de F_1' en A_1'. Sur cette droite, comme grand axe, avec la montée h de la voûte annulaire comme demi-petit axe, décrivons une demi-ellipse. – Cette courbe enroulée sur le cylindre extérieur, donnera la directrice courbe du conoïde. Cherchons sur elle les points B_1' C_1'..... qui sont aux mêmes hauteurs que les points B'C'D'... (fig. C) du berceau tournant.

La meilleure manière pour obtenir ces points très exactement consiste :

1° à décrire (fig. D) les deux cercles sur le petit et sur le grand axe comme diamètres ; 2° à diviser le petit cercle a'b'c'e'f' comme est divisé l'intrados du berceau, et à mener les rayons $0_1'a'$ - $0'b'$....; 3° des horizontales et des verticales menées par les points où ces rayons coupent les cercles, donnent, comme recoupements, les points voulus de l'ellipse ; 4° des tangentes c"γ ou b"θ au grand cercle, on déduit en γC_1' ou en θB_1' les tangentes à l'ellipse et, par conséquent les normales $B_1'G_1'$ et $C_1'I_1'$ que l'on limitera aux hauteurs δ et γ où sont limitées (fig. C) les normales B'G' et C'I' au tore.

(c) Arêtes d'intersection. – 1° avec le tore. – Par les points B_1' C_1' etc... enroulés sur le cylindre extérieur en $b_1 c_1$ .... on mène les génératrices $b_1 0$, $c_1 0$ ..... du conoïde ; et comme elles sont au même niveau que les parallèles du tore, elles les recoupent aux points cherchés de l'arête $b_2 c_2 d_2 e_2$.

2° avec la sphère. – Les parallèles, lignes de lit de la sphère, ne sont pas au même niveau que les génératrices de lit du conoïde. – On est donc obligé de mener en α' et γ' (fig. C) des parallèles auxiliaires qui seront au même niveau que les points E' et D', et cela donne en $d_1 e_1$... l'arête sphérique.

(d) Surfaces de lit. – 1° Pour le tore. – Ce sont les cônes normaux engendrés par la rotation des normales B'G' - C'I' etc..... (fig. C).

2° Pour la sphère. – Ce sont les cônes normaux engendrés par les normales à la sphère M'L' - N'P'.

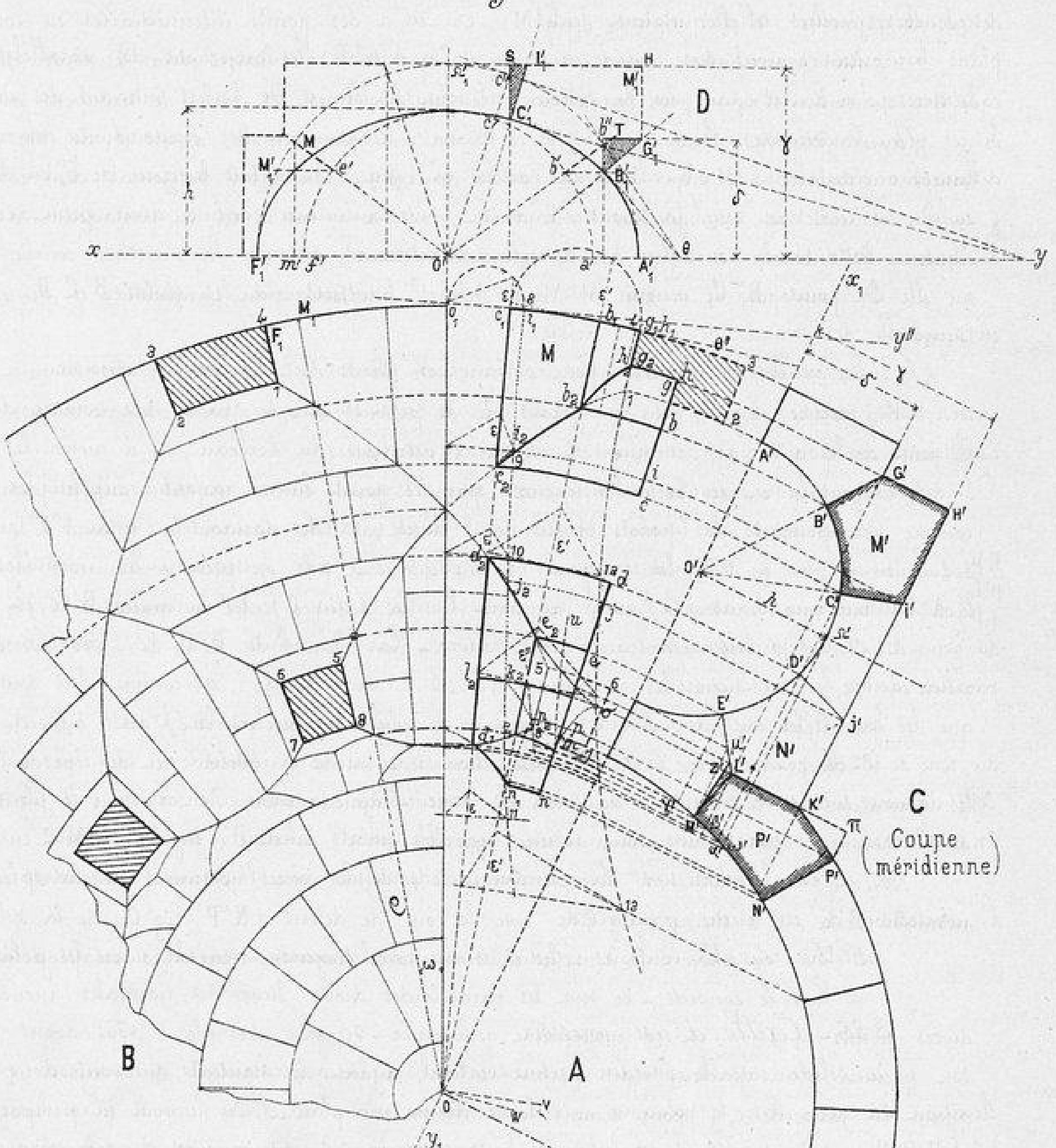
3° Pour le conoïde. – Ce sont les paraboloïdes droits, lieux des normales menées au conoïde, aux divers points c_1 d_2 ..... etc, d'une même génératrice, $0c_1$ par exemple. – Nous avons vu (§ 83. b) que son premier plan directeur était perpendiculaire à la génératrice $0c_1$; ce sera donc un plan vertical ayant la tangente $c_1 \gamma''$ pour trace ; le deuxième plan directeur (ici le plan horizontal) que nous avons fait tourner d'un angle droit autour de la génératrice, c'est donc le plan $0c_1$ projetant horizontalement cette génératrice.

Il faut trouver l'intersection de ce paraboloïde des normales avec le plan supérieur du voussoir, lequel est à la hauteur γ et avec les divers cônes de lit ; la première intersection sera une hyperbole $c_1 i_2 j_2 k_2$, qui (voir § 83. c) a pour asymptote la projection horizontale $0c_1$ de la génératrice et pour autre asymptote, une perpendiculaire 0V, à cette droite, menée par le point 0. – C'est donc une hyperbole équilatère. – Or, nous avons facilement en i_1 (fig. M) un premier point de cette hyperbole, en

portant sur la tangente $c_1 y''$ la distance $c_1 i_1$ égale au segment $S I'_1$ (fig. M'_1) que la normale détache sur le plan supérieur du voussoir, situé au niveau γ.

Dès lors ayant un point i_1 de l'hyperbole, nous faisons en $\mathcal{E}$ la construction indiquée plus haut (§ 33. d) nous reproduisons plusieurs fois en $\mathcal{E}, \mathcal{E}, \mathcal{E}$ .... la construction et nous obtenons, par points, en $i_1\, i_2\, j_2\, k_2\, 11$ cette hyperbole sur toute la longueur voulue. Nous avons obtenu de même, en prenant

Fig. 115.



$b_1 g_1$ (fig. M) égale à TG'_1 (fig. M'_1) un point de l'hyperbole d'intersection du lit paraboloïde de pose avec le plan horizontal situé au niveau δ.

Par la construction indiquée en E', E', E', ... nous avons tracé par points cette hyperbole en $g_1 g_2 \sigma$ 13.

(e) *Intersection des paraboloïdes et des cônes de lit.* - Tout d'abord les points i_2 j_2 k_2 ... déjà trouvés en sont les extrémités pour le paraboloïde de dessus et g_2 et σ pour celui de dessous. - Ces intersections sont des courbes gauches telles que $b_2 g_2$ (fig. M). - On en a des points intermédiaires en coupant par des plans horizontaux auxiliaires qui donneraient des parallèles auxiliaires dans les cônes, et des hyperboles équilatères auxiliaires dans les paraboloïdes; les hyperboles et les cercles se recoupent aux points cherchés. Si ces plans auxiliaires sont bien choisis, s'ils passent par exemple, à moitié, au tiers, ou au quart des distances qui séparent le plan horizontal de la génératrice, du plan horizontal déjà considéré de niveau γ ou δ, ces cercles et ces hyperboles s'obtiendront, presque à vue d'œil, en partageant à moitié, au tiers, ou au quart les distances des lignes d'intersection déjà tracées.

On voit pour le voussoir M'M, en $b_2 g_2$ l'intersection du paraboloïde et du cône de dessous, et en $c_2 i_2$ celle des surfaces de lit de dessus.

(f) *Intersections des paraboloïdes de lit et de la sphère.* - Les paraboloïdes donnent avec la sphère des intersections gauches $d_1 n_1$ (pour le paraboloïde de dessous) et $c_1 m$ (pour celui de dessus), dont on obtient également des points par des plans horizontaux auxiliaires.

Voyons par exemple comment est obtenu le point limite m, situé sur le parallèle M' de la sphère.

On remarque que le plan M'μ' (fig. C) de ce parallèle partage la distance E'L' dans le rapport $\frac{E\mu'}{\mu' L}$ = (sensiblement) $\frac{5}{4}$, par conséquent, presque à vue d'œil, on peut construire l'hyperbole auxiliaire um (fig. A) en partageant dans le même rapport ($^5/_4$) la distance entre la génératrice $0 e_2 b_2$ .... qui est au niveau du point E' et l'hyperbole déjà tracée $g_2 \sigma$ 13 qui est au niveau δ du point L'. - Son intersection m, avec le parallèle donne le point cherché.

Pour les voussoirs N' et P' qui sont près de la sphère, la ligne courbe $\mathcal{E}_2 \sigma$ est l'intersection du paraboloïde et du cône de lit de pose du tore; m σ est l'intersection de ce même paraboloïde et du cône de lit de pose de la sphère. Cette dernière tombe en dehors du voussoir; elle devient donc inutile. De sorte que le plan méridien de joint Onmd, recoupe ce paraboloïde suivant une hyperbole m z, rabattue (fig. C) en M'Z'.

$k_2 p_2$ est l'intersection du paraboloïde de dessus avec l'extrados de la sphère, et $n_1 p_2$ est l'intersection de ce même paraboloïde avec le cône de dessus (N'P', fig. C) de la sphère.

Dès lors tous les voussoirs étudiés sont complètement représentés en projection horizontale.

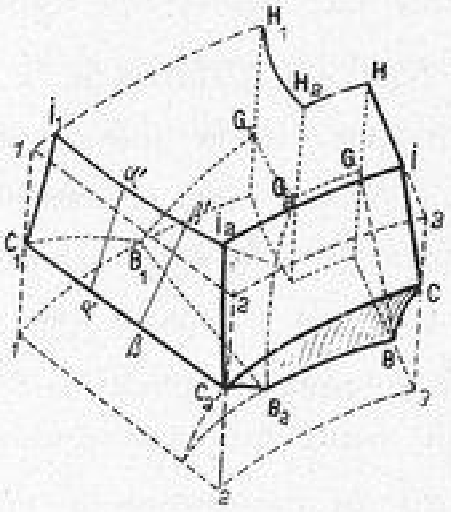
§ 86. - Taille d'un voussoir.

Le solide capable est un prisme vertical ayant la hauteur du voussoir prise (fig. D) en élévation et pour base le polygone mixtiligne donné en plan. - On le voit en perspective (fig. 116) en 1, 2, 3, H, H_1 H_2. - De 1 en 2 il est plan: la génératrice $c_1 c_2$ du conoïde s'y tracera avec une règle tenue horizontalement à la hauteur voulue; de 2 en 3 c'est un cylindre; le parallèle $c_2 c$ du tore, s'y tracera aussi avec une règle; de 3 en H c'est un plan, on y appliquera le panneau méridien du tore CIHGB relevé (fig. 115) en M'; de H en H_2 c'est un cylindre; l'arc du cercle d'extrados GG_2 du cône de lit de dessous s'y tracera à la règle; de H_2 en H_1 c'est un cylindre ayant pour base un arc d'hyperbole équilatère; l'hyperbole $G_2 G_1$ s'y tracera à la règle et servira de directrice au paraboloïde de dessous $G_1 G_2 B_1 B_2$. Enfin de H_1 en I, c'est le cylindre extérieur; on y appliquera le panneau déroulé, fourni

en $B_1' G_1' H_1'$ etc... (fig. 115 - D).

Sur le plan supérieur du prisme capable, on applique le panneau $I_1 I_2 I\, II_2 H_1$ donné par le plan (fig. 115 - A) et l'hyperbole $I_1 I_2$, sert de directrice courbe au paraboloïde de dessus, dont $C_1 C_2$ est une directrice droite.

Fig 116.



Ce paraboloïde se taillera donc par des droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ perpendiculaires sur $C_1 C_2$.

Du cône de lit de dessus $I_2 I - C_2 C$ on possède aussi deux cercles directeurs ; on peut donc le tailler et, avec un biveau cercle, qui glissera sur $C_2 C$, en déduire la douelle du tore.

Le cône de lit de pose $B_2 B - G_2 G$, est limité déjà par un arc de cercle $B_2 B$ et par un autre $G_2 G$ ce qui permet d'en tailler une première partie ; l'autre s'obtiendra par biveau cerce ; mais il aura fallu d'abord développer le quadrilatère conique $B_2 B G_2 G$ que l'on présentera souvent afin d'être sûr de ne pas dépasser l'intersection rentrante $B_2 G_2$.

Le dernier paraboloïde $B_1 B_2 - G_1 G_2$ est dès lors limité sur tout son contour et peut se tailler comme le premier.

Escaliers.

A. Escalier suspendu dit : vis à jour.

Stéréotomie
23e Leçon.

§87. Préliminaires.

Nous avons déjà donné dans la charpente les généralités sur le tracé des escaliers, sur le balancement et sur leur construction. - Les escaliers en pierre s'établissent presque exactement de la même manière que ceux en bois. Les marches s'appuient sur un limon indépendant, ou bien comme dans l'escalier anglais, elles reposent les unes sur les autres par une portée et par un recouvrement. La seule différence pour le limon en pierre consiste en ce que, dans les joints, on supprime les tenons et les mortaises ; en outre, on donne en général des épaisseurs plus grandes aux marches et aux limons lorsqu'ils sont en pierre que lorsqu'ils sont en bois.

§88. Plan d'ensemble. (fig. 117).

L'escalier que nous étudierons doit s'inscrire dans une cage rectangulaire dont les axes sont AC et BD. Nous admettrons un emmarchement de $1^M,10$; on le porte en AE - BF - CG et DH, ce qui donne en EFGH les sommets de ce que nous nommerons la *courbe de jour* laquelle sera la base du *cylindre de jour*. - Ainsi que nous le verrons plus loin cette courbe n'est pas une ellipse.

A $0^M,50$ des sommets de cette courbe et, par conséquent à $0^M,60$ des murs de la cage, nous prenons en MNPQ les sommets de la *ligne de foulée*. - On prend pour celle-ci une véritable ellipse ; on en rectifie la longueur L ; on connaît en outre la hauteur totale H, à franchir d'un étage à l'autre, par conséquent on peut calculer comme nous l'avons déjà fait pour les escaliers en charpente, le giron (g) et la hauteur (h) de chaque marche. - Le calcul fait a donné ici : $g = 0^M,31$; $h = 0^M,17$.

Cela fait, l'ellipse de foulée a été partagée aux points 1, 2, 3 ..... 25, 26, en 28 parties égales, et 3 de ces parties ont été prises pour former le palier ; il y a donc en réalité 26 degrés par étage, en comptant le palier pour une marche.

Par les points de division 1, 2, 3, ... on a mené les normales à l'ellipse, ce qui a donné les arêtes des marches ; sur ces normales on a porté de a en a_1, de g en g_1, etc... une longueur constante égale à $0^M,50$ et cela nous a donné en E F b, d, f, G ..... des points de la courbe de jour.

On sait que les normales à l'ellipse ont pour enveloppe une courbe φψφψ qui se nomme sa *développée* et qui est le lieu de ses centres de courbure. Elle présente en φ et ψ, sur les axes, des points de rebroussement. Pour avoir les points φ et ψ, on mène la diagonale MQ du rectangle construit sur les demi-axes et du sommet H de ce rectangle on abaisse une perpendiculaire sur cette diagonale, ce qui donne par recoupement avec les axes les points de rebroussement φ et ψ (1).

On peut obtenir un point intermédiaire i de la courbe, de la manière suivante : m, étant le point de l'ellipse situé sur la diagonale OH, la normale mi est perpendiculaire à l'autre diagonale MQ et si on mène Oi perpendiculaire sur mo, le point de rencontre i, avec la normale, donne le centre de courbure répondant au point m, c'est-à-dire un point de la développée.

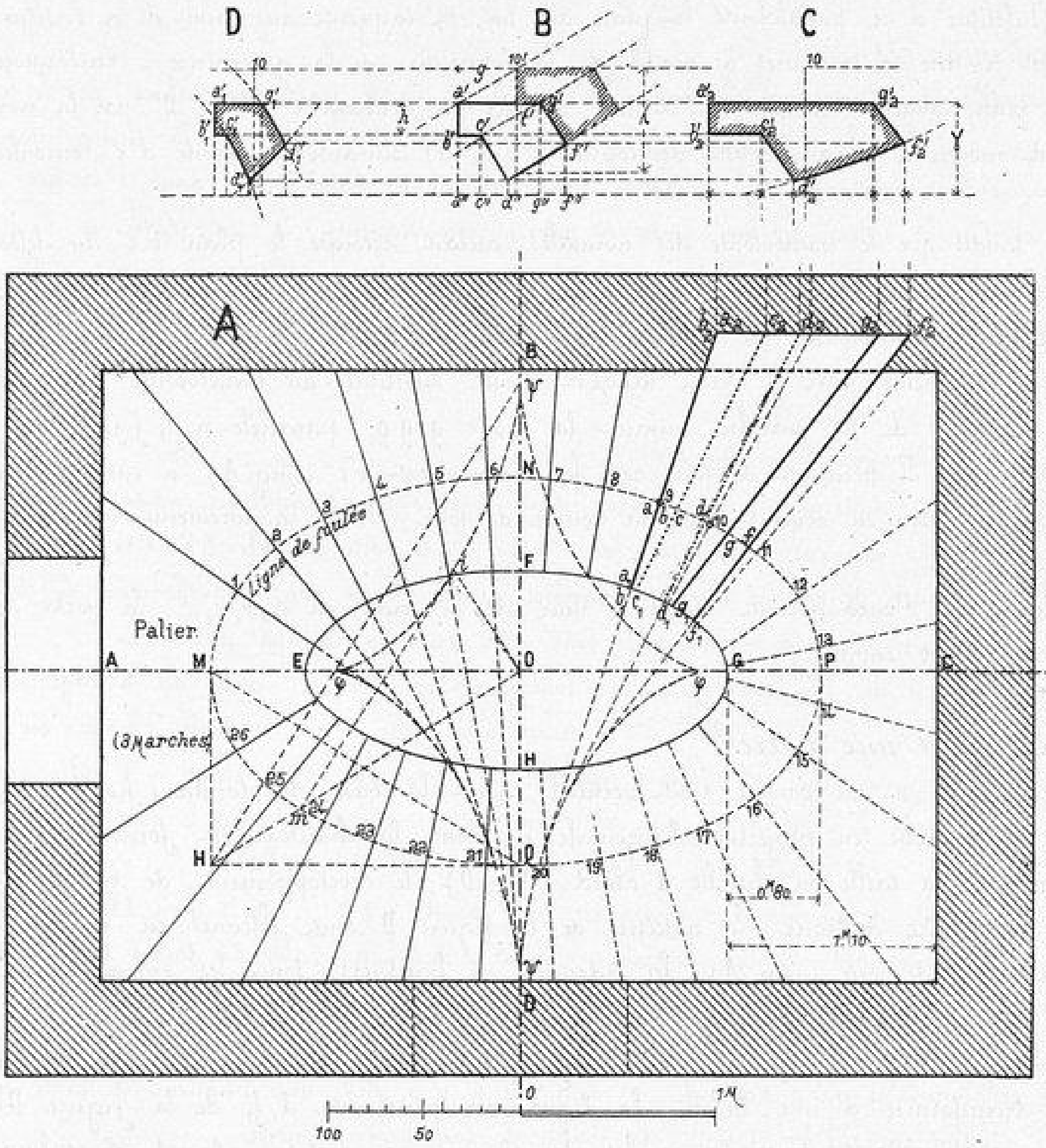
D'après ce qui précède, on voit que la courbe de jour n'est pas une ellipse, mais bien une

---

(1) Voir dans le cours de Géométrie descriptive le tracé de la développée de l'ellipse.

développante de la développée, φ ψ φ ψ, de l'ellipse de foulée.

Fig. 117.



§ 89. – Construction des marches (même figure 117).

Ce tracé général achevé on construira chaque marche, comme nous allons l'indiquer pour celle qui porte le N° 9.

On détermine tout d'abord, la coupe faite, sur la marche, par le cylindre de foulée. Cette coupe est développée (fig. B). – On se donne arbitrairement la grandeur t'g' du recouvrement et celle g'f' de la portée. Cette droite g'f' est prise perpendiculaire à la ligne a'10' qui passerait par les arêtes des marches. – Le dessous de l'escalier, ce que nous nommerons son *intrados* d'f' sera donc une surface gauche continue, obtenue en surbaissant de la hauteur voulue h (fig. B) toutes les arêtes des marches.

En réalité cet intrados sera donc une surface gauche, à plan directeur, à directrice gauche et à noyau définie géométriquement de la manière suivante :

1° Son *plan directeur* est le plan horizontal ;

2° Sa *directrice* est une hélice tracée sur le cylindre de foulée, c'est à dire sur un cylindre elliptique ;

3° Son *noyau* est le cylindre vertical qui aurait pour base la développée φ ψ φ ψ. – Ce cylindre se nomme le *développoïde*.

Le profil B, une fois établi, avec des épaisseurs suffisantes pour la solidité, on le suppose enroulé sur le cylindre de foulée. Les points a" c" d" g" f" etc... viennent se placer (fig. A) en a c d g f..., et nous pouvons tracer immédiatement l'arête a a, de la marche, ainsi que les génératrices d d, et f f, de l'intrados ; ces trois droites sont tangentes au développoïde. – Les surfaces de lit répondant à ces génératrices devraient,

pour chacune d'elles, être comme dans la voûte d'arête en tour ronde, le paraboloïde des normales. Mais, pour simplifier on substitue à ce paraboloïde le plan qui lui est tangent au point d ou f situé sur la ligne de foulée, c'est-à-dire, à peu près à moitié de la longueur de la génératrice. — Raisonnons pour la droite $d d_1$. Ce plan tangent moyen est défini : 1° par la génératrice $d d_1$; 2° par la normale à l'intrados au point moyen d, laquelle est développée (fig. B) suivant la droite d'c', enroulée (fig. A) suivant d c.

Dès lors, tandis que le paraboloïde des normales aurait recoupé le plan b'c', du dessous de la marche suivant une hyperbole équilatère [1], le plan tangent moyen qui lui est substitué, recoupera ce même plan de dessous suivant une droite $c_1 c c_2$, parallèle à la génératrice $d_1 d d_2$.

Il en sera de même pour le plan tangent moyen substitué au paraboloïde pour la génératrice $f_1 f f_2$; il coupe le dessus de la marche suivant la droite $g_1 g g_2$ parallèle à $f_1 f f_2$.

Remarques : 1° Il pourrait se faire que le recouvrement bc (fig. A) n'eût pas été assez grand. — On en serait averti en voyant, sur la courbe de jour, si le recouvrement $b_1 c_1$ qui en est la conséquence, est suffisant.

2° Les marches s'encastreront dans le mur de la cage, en $a_2 b_2 c_2$..... La portée de l'encastrement doit être de $0^M,20^c$ environ.

§ 90. — Taille d'une marche.

Le solide capable est un prisme droit vertical, dont la base est donnée (fig. A) par le contour $b_1 f_1 ..... b_2 f_2$, de la marche en projection horizontale et dont la hauteur est fournie en γ (fig. C).

Pour préparer la taille on cherche d'abord (fig. D), le développement de l'intersection de la marche avec le cylindre de jour. Les abscisses de la figure D sont obtenues en rectifiant les arcs $b_1 c_1 d_1 f$ ..... de la courbe de jour (fig. A), les ordonnées, ou hauteurs, sont les mêmes que sur la figure B.

On remarquera que tandis que sur la figure B, la ligne d'intrados d'f' était une droite comme étant la transformée d'une hélice, la ligne correspondante $d_1' f_1'$ de la figure D, est une courbe. — De même $c_1' d_1'$ et $g_1' f_1'$ sont des courbes, transformées de sections planes du cylindre de jour.

On cherche de même, (fig. C) la vraie grandeur de la section de la marche par le plan d'encastrement $b_2 f_2$.

Une fois ces panneaux (fig. D et fig. C) obtenus, on les applique sur les faces voulues du solide capable et la taille s'exécute facilement car toutes les surfaces qui limitent cette marche sont ou planes ou réglées et l'on en possède les directrices nécessaires.

B. — Vis à noyau plein.

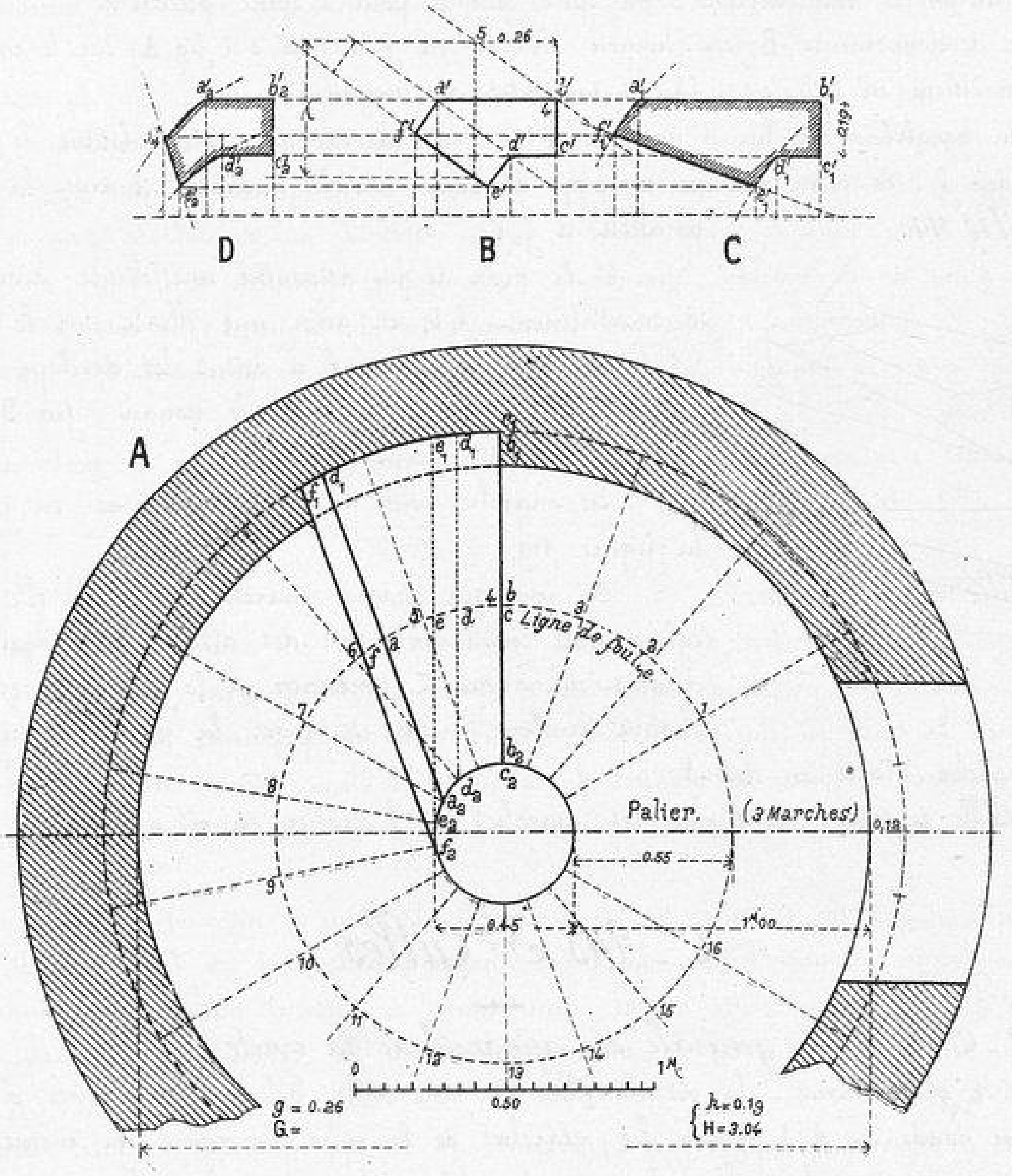
§ 91. — Épure.

(a) Ensemble. — Si la cage de l'escalier avait été carrée, l'ellipse de foulée serait devenue un cercle. La développée VVVV se serait réduite à un point, qui eût été le centre du carré. — Cependant si

(1) Voir l'épure de la voûte d'arête en tour ronde.

la largeur de la cage est trop faible, comme sur la figure 118, où elle n'est que de $2^{M},45$, il est presque impossible de laisser un vide au centre et les marches doivent s'appuyer sur un cylindre central (sur la figure 118 son diamètre est de $0^{M},45$) qui constitue ce que l'on nomme un *noyau plein*.

Fig. 118.



La figure 118, A, donne le plan d'ensemble d'un pareil escalier établi dans une tour ronde; sur la ligne de foulée tracée à 0,55 du noyau on a marqué en 1, 2, 3, ... 15, 16, les arêtes des marches. — Pour le palier on a pris trois largeurs de marche.

Comme pour l'épure précédente on a déterminé d'abord (fig. B) avec des épaisseurs suffisantes pour la solidité le développement de la section faite sur une marche par le cylindre de foulée.

On voit que les arêtes 1, 2, 3, ... des marches forment des génératrices isolées de la surface gauche connue sous le nom de *surface de vis à filets carrés*.[1]

(b) *Intrados*. — L'intrados, ou dessous des marches, pourrait être formé par la même surface surbaissée de la hauteur h (fig. B); mais cela aurait pour inconvénient de donner aux marches, à leur attache avec le noyau, une largeur, au collet, trop faible, ce qui les rendrait fragiles.

C'est pourquoi on s'impose que les génératrices d'intrados soient toutes tangentes au noyau. — Par conséquent la surface d'intrados est définie comme suit :

C'est une surface réglée à plan directeur, à directrice et à noyau.

Le plan directeur est le plan horizontal.

[1] Voir l'étude des surfaces hélicoïdes réglées, dans le cours de géométrie descriptive.

La directrice est l'hélice de foulée descendue de la hauteur h.

Le noyau est le cylindre central plein $b_2\, a_2\, f_2$.....

Par conséquent cette surface est celle que nous avons étudiée en géométrie descriptive sous le nom de : *Hélicoïde gauche quelconque, à plan directeur.*

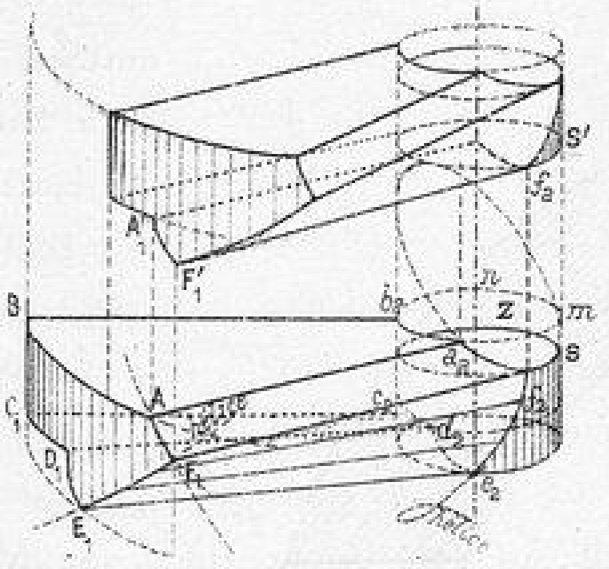
(c) *Construction d'une marche.* — On opère comme pour l'épure précédente :

1° Le développement, B, est supposé enroulé en f, a, e, d, c (fig. A) sur le cylindre de foulée.

2° On mène en $c\,c_2 - e\,e_2 - f\,f_2$ les tangentes au noyau.

3° Au paraboloïde de lit d'une génératrice $f\,f_1$, par exemple, on substitue le plan tangent au point moyen f. Ce plan recoupe le plan de dessus de la marche suivant la droite $a_2\,a\,a_1$, parallèle à $f_2\,f\,f_1$.

Fig. 119.



4° Ce plan de lit détermine une ellipse dans le cylindre d'encastrement $f_1\,b_1$ et aussi une ellipse sur le cylindre noyau.

On détermine comme ci-dessus les développements des intersections des marches avec le noyau (fig. D) et avec le cylindre d'encastrement (fig. C).

Les marches ont la forme indiquée, en perspective, sur la figure 119.

On voit que chaque marche porte avec elle un tambour cylindrique constituant une des assises du noyau. Dans l'évidement cylindrique Z, ménagé à la partie supérieure de chaque tambour, vient se loger la partie inférieure du tambour de la marche placée au-dessus.

La taille se fait comme pour les marches de l'escalier en vis à jour.

C. — Vis S^t Gilles.

Stéréotomie
24^e Leçon.

§ 92. — Description générale et appareil de la voûte.

(a) *Surface géométrique.* — La vis S^t Gilles est une voûte hélicoïdale destinée à couvrir un escalier en tour ronde et à supporter les marches de la volée supérieure du même escalier.

Géométriquement parlant, la surface d'intrados de cette voûte est engendrée par le mouvement hélicoïdal d'un demi cercle de centre II' (voir plus loin, fig. 123) dont le plan est vertical et passe toujours par l'axe vertical ZZ' du mouvement.

Nous avons déjà étudié cette surface dans le cours de géométrie descriptive et nous avons appris à lui mener des plans tangents et des normales.

La figure 120 donne en A le plan de la moitié de l'escalier ; on voit en 6, 7, 8 .... 15, 16, sur la ligne de foulée les arêtes des marches. On a pour le giron : $g = 0^M,35$ et pour la hauteur des marches : $h = 0^M,16$.

Le pas du mouvement hélicoïdal est donc connu : Sur notre épure nous avons pour le demi-pas : $\frac{1}{2} H = 1^M,76$; ce qui nous permettra de déterminer, par les procédés indiqués en géométrie descriptive, les projections verticales d'autant d'hélices qu'il sera nécessaire.

(b) *Appareil*. — Le demi-cercle G'C'B'H'.... (fig. 120. B), que nous nommerons le cercle méridien de la vis, est divisé en un nombre impair de parties égales (ici cinq) aux points G'.. C'B'.. ; nous menons les normales au cercle I'C' - I'B' etc.... et nous traçons les mêmes lignes C'D'E'F'B' que si nous avions à appareiller une porte.

Déplaçons maintenant du mouvement hélicoïdal voulu, toute cette figure méridienne et ses différentes lignes engendreront toutes les surfaces d'appareil, ainsi :

1° L'arc de cercle C'B' engendrera la douelle d'intrados, vis St Gilles.

2° La normale B'F' engendrera une vis à filet triangulaire, qui constituera le lit de pose, tandis que la normale C'D' engendrera une autre vis à filet triangulaire qui sera le lit de dessus.

3° L'horizontale D'E' engendrera une vis à filet carré qui formera la partie supérieure du voussoir.

4° La verticale E'F', que l'on a soin de mener à plomb du point de naissance H', engendrera un cylindre s'inscrivant bien exactement dans le cylindre de la tour.

(c) *Remarque importante relative aux surfaces de lit*. — En prenant la normale au cercle, C'D', comme génératrice de la vis à filet triangulaire, cela ne nous donne pas une surface de lit exactement normale à l'intrados. Il aurait fallu mener, au point C C', la normale à l'intrados. Cette normale ne passerait pas par l'axe, ainsi que nous le montrerons plus loin (§98) ; en se déplaçant hélicoïdalement elle engendrerait non plus une vis à filet triangulaire, mais un *hélicoïde gauche quelconque*. — Néanmoins en prenant le rayon C'D'. au lieu de la vraie normale, on obtient un appareil très acceptable.

§93 — *Projections d'un voussoir.*

(a) *Position et longueur*. — Le pentagone mixtiligne C'D'E'F'B' en se déplaçant engendrera une sorte de couronne hélicoïdale qui constituera une assise inclinée de la voûte. — Tous les voussoirs d'une même assise seront égaux pourvu que leur longueur soit la même : Il suffit donc d'en étudier un seul.

A cet effet on commence par prendre le point I' (fig. B) qui est le milieu de l'arc d'intrados C'B' et nous nommerons *hélice moyenne*, l'hélice qu'il engendre. On la voit projetée verticalement suivant la sinusoïde I'i'I''.[1]

Sur le côté, en TZ' (fig. B) nous avons dessiné une échelle verticale, d'une hauteur égale à la moitié du pas. — Ses divisions 6'.7'.8'...... répondent à des hauteurs et à des demi-hauteurs de marches de l'escalier.

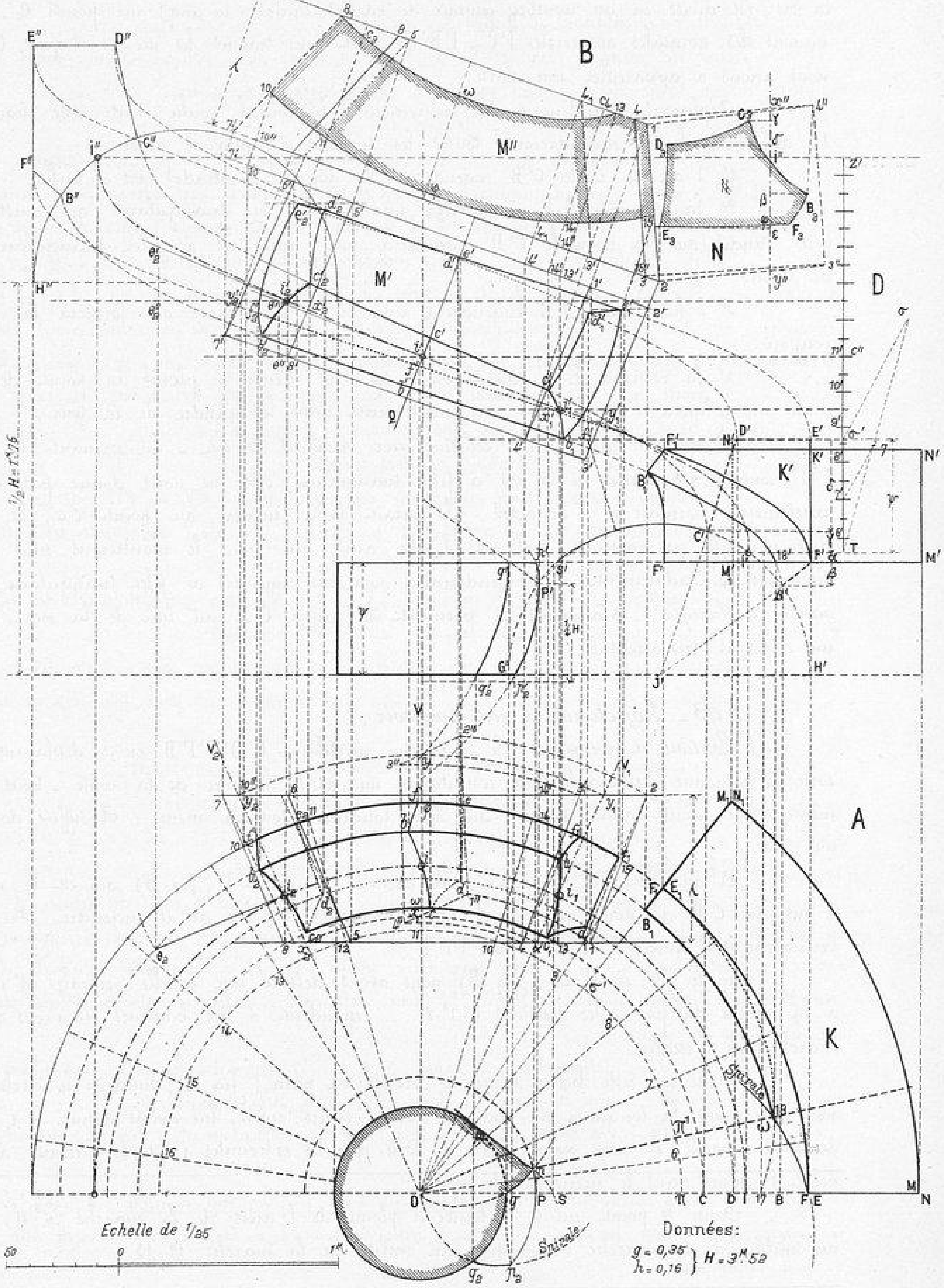
C'est sur cette hélice moyenne projetée en plan (fig. A) suivant le cercle I i_1 i i_2 ...... que nous mesurons la longueur du voussoir. — Sur l'épure, nous lui avons donné de i_1 en i_2 trois profondeurs de marche, et nous avons fait en sorte que les extrémités i_1 et i_2 fussent à égale distance du point i situé dans le méridien de profil.

Ainsi le point milieu i tombe à plomb de l'arête de la marche N° 11, tandis que i_1 tombe au milieu de la marche 9-10, et i_2 au milieu de la marche 12-13.

---

[1] Nous n'indiquons pas la manière dont les sinusoïdes, projections verticales des hélices, sont obtenues.

Fig 120.


B
M''
N
M'
D
K'
A
K
Spirale
Echelle de 1/25
Données:
g = 0,35
h = 0,16
H = 3M.52
1/2 H = 1M.76

Par conséquent, entre i_1 et i, il y a une différence de niveau qui est égale à une hauteur et demie de marche, de même entre i et i_2.

On détermine de même en $C'c'C''$ - $D'd'D''$ - $E'e'E''$ etc..... toutes les projections des hélices engendrées par les sommets du pentagone $C'D'E'$.

(b) Plans de joint. - Par les points limite i_1 et i_2 de l'hélice moyenne nous mènerons des plans normaux à cette hélice et nous les prendrons pour surfaces de joint.

Raisonnons pour le point inférieur i'_1.

A cet effet, amenons par un mouvement hélicoïdal le point $i_1 i'_1$ à occuper la position médiane $i\,i'$ (fig. M M'). - Alors le plan normal sera projeté tout entier verticalement suivant la droite Q (fig. M) qui est perpendiculaire à la tangente $i'\theta'$ à la sinusoïde au point i', qui est son point d'inflexion[1].

Ce plan recoupe les hélices tracées précédemment aux points c', d', e', f', b', (fig. M') rappelés (fig. M) en plan sur les cercles correspondants. - Nous obtenons donc ainsi en b i c d e f (fig. M) la projection horizontale de cette section de joint dans la position médiane que nous lui avons choisie. La droite OV qui passe par le point moyen i, sera prise comme *ligne de repère*, de cette figure. - Nous ramenons alors le point i à droite en i_1 et à gauche en i_2, par mouvement hélicoïdal, et nous entraînons avec le point tout le panneau de joint que nous venons d'obtenir.

Graphiquement cette opération est très simple :

1° En plan, on prend pour lignes de repère les droites OV_1 et OV_2 qui sont les déplacements de la ligne OV et au compas, sur les cercles des points b, c, f..... etc... on reporte les distances prises par rapport à la ligne de repère OV.

2° En élévation, on aura les points $b'_1 c'_1 d'_1$.... (fig. M') par les rencontres des lignes de rappel menées des points $b_1 c_1 d_1$... de la figure M, et des hélices des points $b'c'd'$.....

D'ailleurs, ce qui sera plus exact encore, on remarquera que les points $b'_1 c'_1 d'_1$..... sont au-dessous des points médians correspondants $b'c'd'$..... et à une distance qui, pour tous, est de une hauteur et demie de marche.

Le joint de gauche $b'_2 c'_2 d'_2$..... s'obtient de la même manière.

Dès lors le voussoir est complètement représenté.

§ 94. - Préparation de la taille d'un voussoir.

(a) Le solide capable. - Cette taille est tout à fait analogue à celle du limon d'escalier. - Le solide capable sera limité horizontalement (fig. M) par deux plans de front 1-8 (plan avant), et 2-7 (plan arrière). - Verticalement il le sera par deux plans inclinés à la pente générale du voussoir, qui seront (fig. M') 2'-6' (plan supérieur) et 3'-7' (plan inférieur). - Latéralement le solide sera limité précisément par les plans de joint.

Il faut donc déterminer les lignes 5'-8' et 6'-7' suivant lesquelles un plan de joint (celui de gauche par exemple), vient recouper les faces du solide déjà connues.

A cet effet : La ligne de repère $i_2 V_2$ projeté verticalement (fig. M') suivant l'horizontale $i'_2 \theta''_2$,

---

[1] Pour mener exactement cette tangente, nous avons pris la sous-tangente $i'\theta''$, égale à une longueur et demie de marche, mais comptée, en plan, en $i\,i_2$ sur le cercle du point I et la hauteur $\theta''\theta'$ a été prise égale à une hauteur et demie de marche.

recoupe en x_2 et y_2 (fig. M) rappelés en $x'_2 - y'_2$ (fig. M'), les faces avant et arrière. - Cela donne déjà deux points x'_2 et y'_2 des lignes cherchées.

Un autre point 5-5 par exemple, s'obtiendra de la même façon en menant par un point quelconque $e_2 e'_2$ du panneau de lit, une parallèle à la droite de repère $i_2 V_2$ et cherchant en 5-5' son intersection avec la face avant du solide.

Remarques: 1° Les droites 5'-8' et 6'-7' sont parallèles.

2° Elles sont toutes deux perpendiculaires à la projection de la tangente $i'_2 \theta'_2$; à l'hélice moyenne au point $i_2 i'_2$. - En effet, le plan de joint est, dans l'espace, perpendiculaire par construction, à cette tangente; or la droite 5'-8' est une ligne de front de ce plan, donc elle doit être, en élévation, perpendiculaire à la projection verticale de cette tangente.[1]

3° La face de droite 1'-2'-3'-4' du solide s'obtient de la même manière.

4° De la projection verticale, on déduit facilement, par lignes de rappel, la projection horizontale du solide.

(b) *Cylindre capable*. - Comme pour le limon d'escalier nous considérons le cylindre extérieur $e_1 f_2$ (fig. M) et le cylindre intérieur $c_1 c c_2$; et nous chercherons sur les faces inférieures et supérieures du solide les ellipses d'entrée et de sortie de ces cylindres.

A cet effet nous lui donnons quartier en M″ et par des reports de profondeurs prises sur le plan (fig. M) nous obtenons en 10-11-9-14-15 etc.... ces ellipses.

Comme pour le limon d'escalier, on a supposé que la face inférieure 3'-7' du solide a été amenée, par une translation verticale, à se confondre avec la face supérieure. - Cela nous donne un seul et même panneau dont une partie sera commune aux deux faces.

(c) *Panneaux de joint*. - Il est nécessaire d'avoir aussi en N, le rabattement de la face latérale. - Cette face est projetée (fig. M″) suivant le parallélogramme 1.2.3.4; on prend 1.2, comme charnière, et les points 3″ et 4″ sont obtenus en rabattement en remarquant:

1° qu'ils sont sur les perpendiculaires 3-3″ à la charnière et 2° que la longueur 2-3″ est égale à la longueur 2'-3' de la figure M'.

Les extrémités y″ et x″ de la ligne de repère sont obtenues de la même manière; et on doit avoir $x''y''$ (fig. N) = $x_1 y_1$ pris sur la ligne de repère OV_1 (fig. M).

Quant aux points C_3, D_3, F_3..... du panneau O, la figure M' donne sur la droite Q, en i'c'-i'd' etc..... leurs distances à la ligne de repère, et la figure M, donne sur la ligne de repère OV leurs profondeurs par rapport au point milieu i_1: Ils sont donc par cela même déterminés.

§ 95. - Taille du voussoir.

Les panneaux de joint une fois appliqués sur les faces latérales du solide, lequel est supposé maintenant avoir la forme d'une couronne cylindrique, on fait passer, à l'aide d'une règle flexible des hélices par les points $c'_1 - c'_2$ (sur le cylindre intérieur) $e'_1 - e'_2$ et $f'_1 - f'_2$ (sur le cylindre extérieur. - Avec un biveau taillé sur le profil méridien E'F'B' et dont on fait glisser la branche verticale F'E' sur le cylindre extérieur, on fait apparaître la vis à filet triangulaire

---

[1] La tangente $i'_2 \theta'_2$ est obtenue comme suit: En plan on a pris la sous-tangente $i_2 \theta_2$ égale à une longueur et demie de marche, comptée sur le cercle du point i; et en élévation $\theta''_2 \theta'_2$ égale à une hauteur et demie de marche.

engendrée par B'F'.

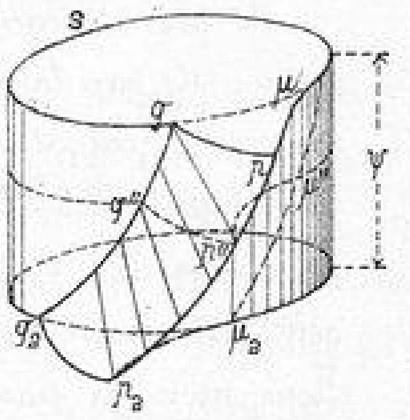
De même avec une équerre on obtient la vis à filet carré engendrée par D'E'. – Avec un biveau taillé sur le profil E'D'C' et glissant sur cette dernière, on obtient la vis triangulaire engendrée par D'C'.

Enfin la douelle de vis St Gilles engendrée par l'arc de cercle C'B' s'obtient par un biveau cerce.

§96 – Noyau plein.

Les pierres du noyau plein ont la forme indiquée perspectivement sur la figure 121.

Fig. 121.



Le panneau supérieur μ p q s est donné par le plan (fig. A).

La courbe p q est un arc de spirale d'Archimède, intersection d'un plan horizontal et de la vis à filet triangulaire engendrée par la ligne droite P'q'.

La courbe μ p est la section, par le même plan horizontal, de la surface de la vis St Gilles.

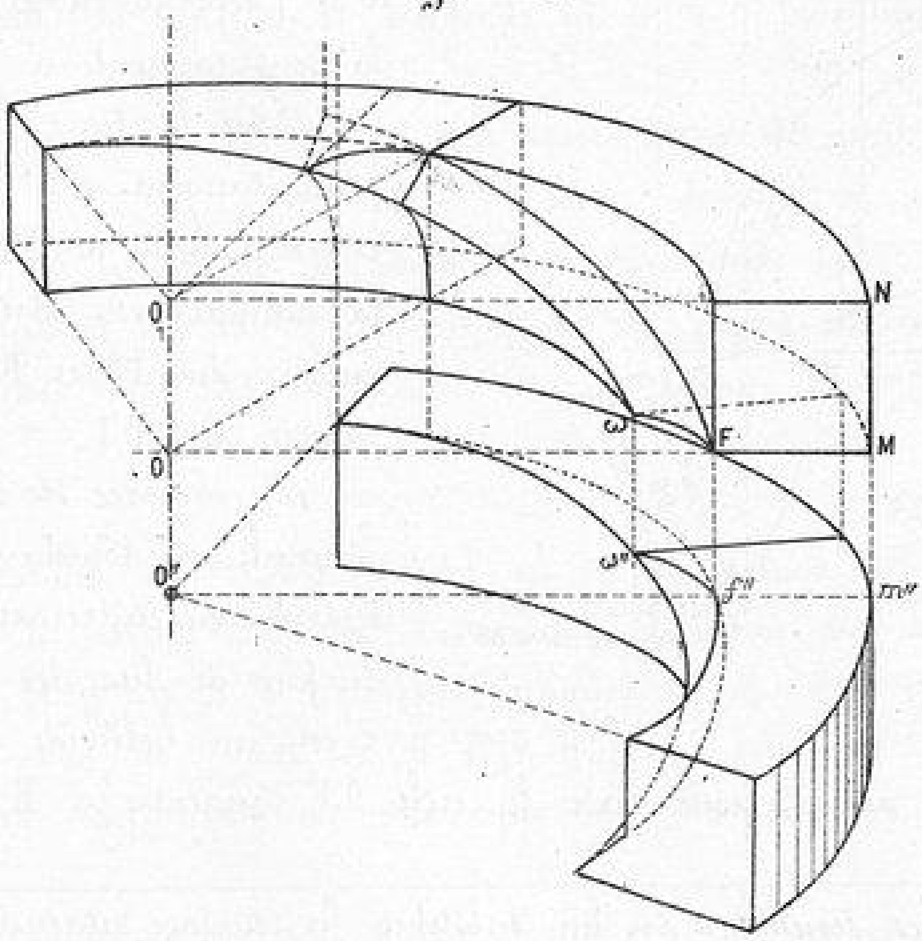
On voit en S'S le point de cette courbe qui est dans le plan méridien. (fig. 120)

Le point μ, situé sur le cercle $q_2 q$, s'obtient en cherchant de quel angle il faut que le plan méridien tourne pour que le point de naissance G' du cercle méridien, monte hélicoïdalement de la hauteur V, de l'assise considérée dans le noyau.

On voit (fig. D) sur l'échelle TZ' la construction graphique faite pour y arriver.

1° La longueur Tσ' est égale à la hauteur V de l'assise. – 2° Sur une ligne oblique quelconque Tσ, on a pris en T7, la longueur d'une marche et demie, comptée sur la ligne de foulée ; et l'on a joint 7'-7. – 3° En menant σ'σ parallèle à 7'.7, on obtient en TS, la longueur de ligne de foulée qui répond à la hauteur V.

Fig. 122.



Dès lors, on a porté (fig. A) sur la ligne de foulée, de π en σ' la longueur trouvée, et joignant Oσ', on a obtenu en μ le point cherché.

En ce point μ, la courbe de section est tangente au cercle de base du noyau.

Le reste de l'épure se comprend facilement. – La pierre d'assise du noyau s'obtiendra en déplaçant hélicoïdalement le patron curviligne μ p q q_2 fourni par le plan.

§ 97. –

§ 97. – Sommiers.

Le sommier (fig. K' et K) affecte une forme analogue à celle du noyau.

On voit, sur le plan, en F-18, un arc de spirale d'Archimède, section horizontale de la vis triangulaire engendrée par B'F' et en E_1-18, la courbe de section de la vis St. Gilles par le plan horizontal de dessous de la pierre et de 18 en E, la section horizontale de la vis St. Gilles par le même plan.

La figure perspective 122, montre comment les pierres des sommiers se superposeront les unes sur les autres. – Il sera bon que les plans de découpe passent, de deux en deux, par les points ω, ω'' où se rencontrent les deux courbes de sections horizontales.

§ 98. – Surfaces de lit normales.

(a) Problème. – Construire en un point BB' le plan tangent et en déduire la normale.

Fig. 123.

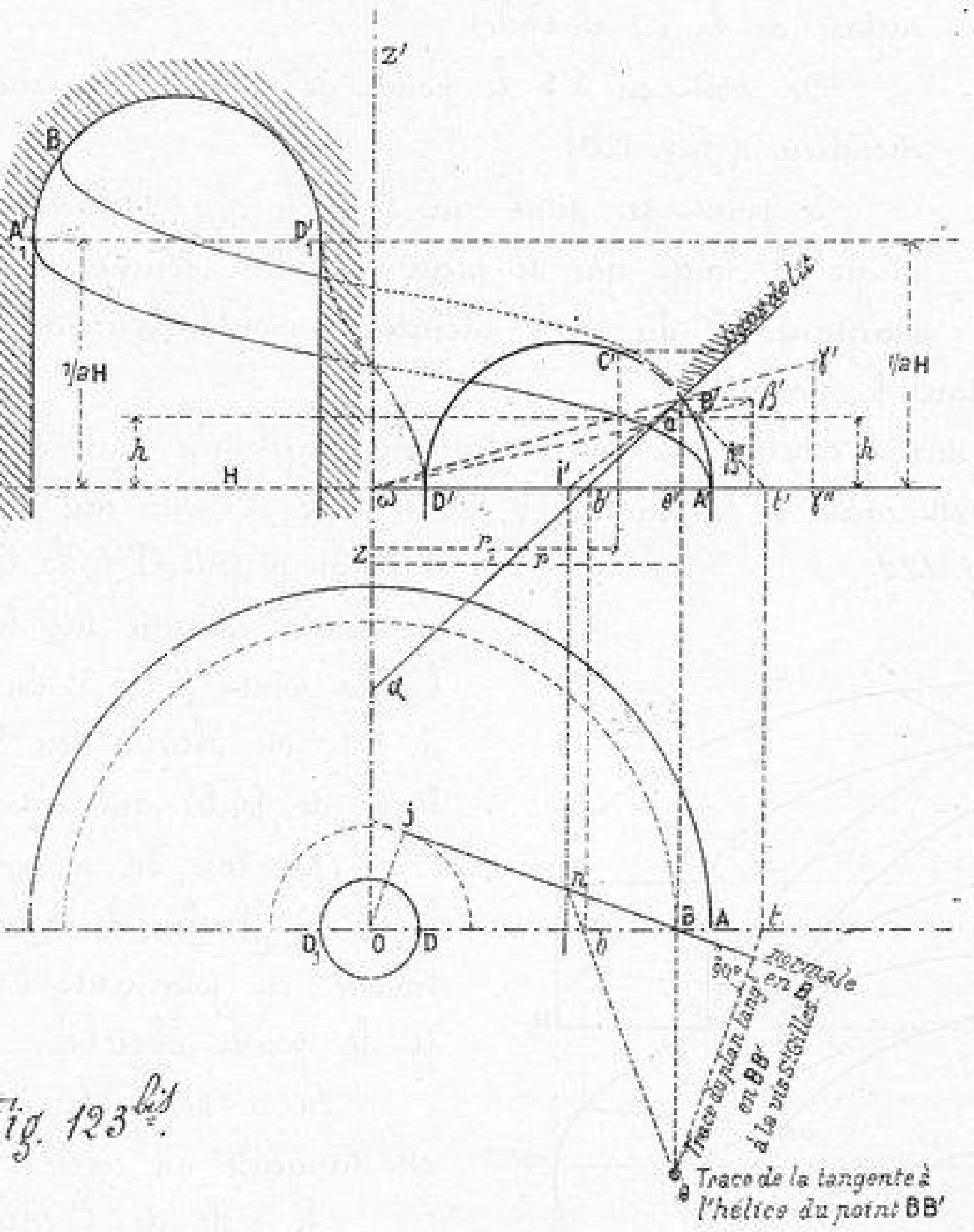


Fig. 123 bis.

Le plan tangent en BB' sera défini : 1° par la tangente B't'-Bt au cercle générateur et 2° par la tangente Bθ-B'θ' à l'hélice du point B. – Cette dernière tangente est dans un plan de profil : Pour avoir sa trace θ_1 on cherche le pas réduit $h = \frac{H}{2\pi}$. – On construit en ωθ'd' le triangle rectangle ayant h pour hauteur et pour base r, rayon du cercle B. – La cote de B' donne en ωβ'' (reportée en Bθ sur le plan) la sous-tangente à l'hélice.

Donc la trace horizontale du plan tangent est tθ, et B't' en est une ligne de front. – Donc la normale est Bn perpendiculaire sur tθ et B'I' perpendiculaire sur B't'.

(b) Surface de lit. – Cette normale en tournant hélicoïdalement engendrerait la vraie surface de lit des voussoirs. – C'est un hélicoïde gauche quelconque dont le noyau cylindrique aurait pour base le cercle OJ tangent à Bn prolongée (fig. 123 bis).

(c) Autre surface de lit plus simple. – On lui substitue la surface engendrée par la droite B'b' suivant laquelle le plan tangent en BB' à cet hélicoïde couperait le plan de front OA, pour obtenir cette droite on cherche en n la trace horizontale de la normale, et

joignant à la trace horizontale O de l'hélice, on a en $n\theta$, la trace du plan tangent à l'hélicoïde gauche : - D'où l'on déduit $B'b'\alpha$, droite demandée, intersection avec le plan de front OA. - En tournant hélicoïdalement, cette ligne engendre alors une vis à filet triangulaire, que l'on prend pour surface de lit plus simple ; cette substitution peut se faire, car la vis à filet triangulaire a le même plan tangent en BB' que l'hélicoïde primitif.

Fin du Cours.

Table des matières.

I. – Compléments de géométrie descriptive.

Paragraphes. Pages.

Des infiniments petits dans les courbes.

1. – Rappel de théorèmes démontrés en analyse — 3
2. – De la courbure et du rayon de courbure — 4
Tableau des infiniments petits dans divers ordres (courbes planes) — 5
3. – Expression du rayon de courbure — 6
4. – Rayon de courbure des sections coniques — 7
5. – Construction graphique du rayon de courbure de l'ellipse ou de l'hyperbole — 8
6. – Rayon de courbure de la parabole — 9
7. – Points singuliers des courbes planes — 10
8. – Enveloppes et enveloppées — 10
9. – Développée d'une courbe — 10
10. – Développante d'une courbe — 11
11. – Application à l'ellipse — 12
12. – Courbe enveloppe d'un cercle mobile de rayon constant R — 13

Courbes gauches.

13. – Cylindre continu ; courbe gauche continue — 13
14. – Tangente. – Plans tangents. – Plan osculateur. – Normales. – Plan normal. – Normale principale — 13
15. – Des infiniments petits dans une courbe gauche — 15
16. – Ordre infinitésimal de la plus courte distance de deux tangentes infiniment voisines, (dans une courbe gauche) — 16
17. – Cercle et rayon de courbure d'une courbe gauche — 16
18. – Projections diverses d'une courbe gauche — 16

Surfaces. –

Paragraphes. Pages.

Surfaces. – Leur génération. – Leur classification.

19. – Génération d'une surface continue — 17
20. – Plan tangent. – Normale — 18
21. – Surface enveloppe d'une surface mobile — 19
22. – Exemples de surfaces enveloppes — 19
23. – Classification des surfaces — 19
24. – Loi de variation du plan tangent dans une surface réglée. – Théorème de Chasles. – Discussion — 20
25. – Plan asymptotique d'une surface gauche — 22

Surfaces développables.

26. – Génération des surfaces développables — 22
27. – Arête de rebroussement d'une surface développable — 24
28. – Développement d'une surface développable — 25
29. – Rayon de courbure de la transformée d'une courbe — 26
30. – Méthode graphique pour le développement — 27
31. – Surface développable définie par deux directrices — 27
32. – Rebroussements de la ligne de striction — 28
33. – Surface développable définie par une directrice et un cône directeur — 30
34. – Développable dont les deux directrices sont deux coniques — 31
35. – Surfaces d'égale pente — 32
36. – Application ; Surface de déblai et de remblai à directrice elliptique — 33

Hélice cylindrique et hélicoïde développable.

37. – Définition de l'hélice. – Sens. Spire. – Pas total. – Pas réduit — 36

Paragraphes.		Pages.
38.	Projection d'une hélice	38
39.	Tangente. Sous-tangente. Plan osculateur	38
40.	Rayon de courbure	39
41.	Normale principale. Construction graphique du centre de courbure	39
42.	Hélicoïde développable (Enveloppe d'un plan qui se déplace hélicoïdalement)	40

Surfaces gauches

A. Généralités.

43.	Génération des surfaces gauches	42
44.	Exemples divers de surfaces gauches	42

B. Le Paraboloïde hyperbolique.

45.	Double système de génératrices rectilignes	45
46.	Plan tangent en un point de la surface	46
47.	Un plan contient une génératrice reconnaître le point où il est tangent	47
48.	Contour apparent horizontal	48
49.	Ligne d'ombre propre	48
50.	Plan tangent parallèle à un plan donné	49

C. Hyperboloïde à une nappe.

51.	Définition et double système de génération	51
52.	L'hyperboloïde est une surface à centre	53
53.	Plans asymptotiques. Leur enveloppe. Cône asymptotique	54

D. Surfaces gauches quelconques.

54.	Interprétation géométrique du théorème de Chasles. Point de vue d'une génératrice	54
55.	Détermination des éléments constitutifs d'une génératrice	55
56.	Raccordement des surfaces gauches	56
57.	Ligne de striction dans les surfaces à cône directeur de révolution	56
58.	Hyperboloïdes et paraboloïdes de raccordement	57
59.	Paraboloïde des normales	58
60.	Surfaces gauches ayant une génératrice commune. Trouver les deux plans tangents communs	58

E. Application des surfaces de raccordement.

61.	Emploi d'un paraboloïde de raccordement	59
62.	Conoïde oblique à noyau sphérique	60
63.	Biais passé gauche	63
64.	Arrière voussure de Marseille	65

Surfaces hélicoïdales réglées.

65.	Classification de ces surfaces	66
66.	Expression du paramètre de distribution dans les surfaces à cône directeur de révolution, définies par leur ligne de striction	67
67.	Mêmes surfaces. Plan tangent en un point. Pôle d'une génératrice	68
68.	Hélicoïde gauche quelconque	70
69.	Séparatrice d'ombre	71
70.	Surface de vis à filet triangulaire	73
71.	Séparatrice d'ombre	75
72.	Section horizontale de la surface	75
73.	Représentation d'une vis à filet triangulaire (Tracé exact)	76
74.	Tracé sommaire	77
75.	Sujet d'une épure	77
76.	Hélicoïde gauche à plan directeur	78
77.	Ombre de la surface	78
78.	Surface de vis à filet carré	80
79.	Séparatrice d'ombre	80
80.	Représentation d'une vis à filets carrés	81
80 bis.	Vis Saint-Gilles	82

Courbure des surfaces.

81.	Courbe indicatrice, infinitésimale	83
82.	Loi de variation des rayons de courbure des sections normales	84
83.	Indicatrices finies	85
84.	Formule d'Euler	86

Paragraphes.		Pages.
85.	Courbure moyenne	86
86.	Intersection d'une surface à courbures opposées par son plan tangent	87
87.	Loi de variation des rayons de courbure des sections obliques. - Théorème de Meusnier	87
88.	Lignes de courbure	88
89 et 90.	Lignes de courbure des surfaces développables, des surfaces de révolution, et des surfaces enveloppes de sphères	89
91.	Surfaces osculatrices	90
92.	Hyperboloïde osculateur de raccordement d'une surface gauche	91
93.	Surfaces du second degré, osculatrice d'une surface de révolution le long d'un parallèle	92
94.	Lignes asymptotiques et lignes géodésiques	94
	Compléments de la théorie générale des ombres.	
95.	Théorème des tangentes conjuguées	95
96.	Conséquences pour les lignes d'ombre ou de perspective	95
97.	Lignes d'ombre ou de perspective sur les surfaces à courbures opposées. - Classification des branches de courbes	96
98.	Surfaces en creux	96
99.	Passages des parties réelles aux parties virtuelles	96
100.	Théorème relatif à la tangente au point limite	97
101.	Tangente en un point de la courbe d'ombre auto-portée	98
102.	Généralisation pour les contours apparents	98
103.	Ombres des surfaces de révolution méthode des enveloppées coniques, et des enveloppées cylindriques	99
104.	Ombres au soleil. - Méthode des enveloppées sphériques	101
105.	Même problème. - Rayon lumineux de front	102

Paragraphes.		Pages.
106.	Tangente en un point de la séparatrice d'ombre d'une surface de révolution	102
107.	1er Sujet d'épure. - Ombres d'un tore	104
108.	2e Sujet d'épure. - Ombres d'un serpentin	104
109.	Recherche directe d'un point de l'ombre propre situé sur une hélice donnée	108
	Surfaces topographiques.	
	A. - Généralités.	
110.	Définitions	109
111.	Section plane	109
112.	Trouver la cote d'un point	110
113.	Intersection de deux surfaces topographiques	110
114.	Intersection avec une droite	110
115.	Lignes d'égale pente	111
116.	Ligne d'égale pente, entre deux points	111
117.	Lignes de plus grande pente	112
118.	Plan tangent à une courbe cotée, et passant par une droite donnée	112
119.	Plan tangent à une surface topographique et passant par une droite donnée	113
120.	Même problème: la droite est horizontale	113
121.	Cône circonscrit à une surface topographique	114
	B. - Application à la représentation des tables et à l'exécution des calculs.	
122.	Esprit de la méthode	115
123.	Anamorphoses	116
	C. - Éléments de topographie.	
124.	Définition de la topographie	118
125.	Échelles	118
126.	Méthode de projection	118
127.	Planimétrie. - Nivellement	119
128.	Lignes de niveau. - Lignes de pente. - Équidistance	119
129.	Dessin des cartes	121
130.	Mouvements de terrain. - Éminences de la terre	122
131.	Dépressions de la terre	124
132.	Examen des hauteurs, des versants, des basses plaines et des cours d'eau	125

II. _ Charpente.

Paragraphes.		Pages.
	Généralités.	
1.	Définition et objet de la stéréotomie : Charpente et coupe des pierres	129
2.	Marche à suivre dans toute opération de stéréotomie	129
3.	Caractères d'une construction en charpente. Assemblages	130
4.	Triangulation	130
	Assemblages.	
5.	Définitions. Classification des assemblages	131
6.	Assemblage oblique, à mi-bois	132
7.	Assemblage avec embrèvement	132
8.	Assemblage par moises	133
9.	Assemblage droit à tenon et mortaise	134
10.	Assemblage oblique à tenon et mortaise	134
11.	Assemblage oblique avec embrèvement	135
11 bis.	Assemblage oblique à deux abouts	135
12.	Assemblage oblique avec embrèvement et encastrement	136
13.	Assemblage oblique par embrèvement et enfourchement	136
14.	Assemblage oblique avec renfort en chaperon	136
15.	Assemblage droit en queue d'hironde	136
16.	Assemblage oblique en queue d'hironde avec clef	137
17.	Assemblage droit, à tenon et mortaise sur l'arête	138
18.	Pièces délardées : assemblage oblique à tenon et mortaise	138
19.	Assemblage d'onglet, à tenons croisés	139
20.	Enture par quartier, à mi-bois	139
21.	Enture à tenon et tenaille en croix	139
22.	Enture en queue d'hironde à mi-bois	140
23.	Enture à trait de Jupiter	140
	Ferrures.	
24.	Fers employés pour fixer ou pour lier les pièces de bois	141
25.	Fers employés pour consolider les assemblages	142
	Exécution des ouvrages en charpente.	
26.	Dessins	143
27.	Ételon	143
28.	Établissement des bois	143
29.	Trait rameneret	144
30.	Lignage des bois	144
31.	Établissement de devers	145
32.	Contre-lignage	145
33.	Noix de niveau	145
34.	Pique des bois	146
35.	Reconnaissance des piqûres	147
36.	Tracé des assemblages	147
37.	Coupe des assemblages. _ Outils du charpentier	147
	Combles.	
38.	Couverture. _ Voligeage. _ Chevronnage	148
39.	Fermes de différents modèles	150
40.	Combinaisons de toitures	152
41.	Rencontres et nœuds de bâtiments. _ Croupes et noues	153
	Croupes biaises.	
42.	Définitions	154
43.	Diverses dispositions d'ensemble des croupes biaises	154
44.	Remarque relative aux échelles d'une épure de charpente	156
45.	Mise en place des pièces d'une croupe	156
46.	Assemblage des pièces aux environs du poinçon	158
47.	Enrayure	158

Épure de

Paragraphes. Pages.

Epure de la croupe biaise.

48. — Arbalétrier de long pan — 159
49. — Arbalétrier d'arêtier — 160
50. — Empanon de long pan — 162
51. — Empanon déversé de croupe — 162
52. — Mortaise de l'empanon dans l'arêtier — 166
53. — Arbalétrier, de croupe, déversé — 166
54. — Empanon délardé de croupe — 169
55. — Arbalétrier délardé de croupe — 170

Noue biaise.

56. — Ensemble d'un nœud de bâtiments — 171
57. — Mise en place des pièces — 171
58. — Empanon droit, de noue — 173
59. — Empanon déversé de noue — 174

Escaliers.

60. — Généralités — 175

Paragraphes. Pages.

61. — Relations entre le giron et la hauteur — 175
62. — Calcul des dimensions des marches — 176
63. — Principe du balancement — 178
64. — Balancement géométrique — 180
65. — Balancement arithmétique — 181

Epure du limon d'escalier.

66. — Construction d'un escalier à volées droites — 181
67. — Limon d'un escalier en quartier tournant (Epure) — 183
68. — Taille du limon — 186
69. — Détails de construction. Ferrures — 187
70. — Assemblage du limon avec le palier — 188
71. — Escalier suspendu dit escalier anglais — 191
72. — Escalier avec limon à crémaillère ou escalier demi-anglais — 191

III. - Coupe des Pierres.

1. — Généralités — 193
2. — Définitions — 194
3. — Tracé des épures et procédés de taille — 196
4. — Tracé des cercles de grand rayon — 199

Les murs.

5. — Mur droit en talus — 200
6. — Mur en pan coupé — 201
7. — Mur conique dit: de tour ronde en talus — 202

Voûtes cylindriques horizontales, simples.

8. — Définition d'une voûte simple — 204

A. - Porte biaise dans un mur en talus.

9. — Epure d'ensemble — 204
10. — Préparation de la taille — 207
11. — Application du trait sur la pierre — 208

B. - Porte biaise en tour ronde, en talus, rachetant une voûte sphérique.

12. — Description de la voûte — 209
13. — Epure d'ensemble — 209
14. — Préparation du trait — 211
15. — Application du trait sur la pierre — 212

Voûtes plates.

16. — Description — 214
17. — Porte en plate-bande — 214
18. — Voûtes plates composées — 215

Descentes.

19. — Définitions — 217

A. - Descente

Paragraphes. Pages.

A. Descente biaise entre deux murs verticaux parallèles.

20. Données — 217
21. Épure d'ensemble et appareil — 218
22. Préparation de la taille — 219
23. Taille d'un voussoir — 220

B. Descente biaise dans un mur en talus, rachetant un berceau cylindrique.

24. Données — 220
25. Épure d'ensemble; recherche des intersections — 221
26. Préparation de la taille — 224
27. Taille d'un voussoir — 224

Voûtes cylindriques composées.

28. Généralités; définitions et descriptions — 225

A. Épure du berceau coudé.

29. Épure d'ensemble — 228
30. Taille par équarrissement — 231
31. Taille directe — 231
32. Recherche du biveau des douelles plates — 232

B. Voûtes d'arête et voûtes en arc de cloître.

33. Voûte d'arête sur plan barlong — 233
34. Voûte d'arête avec arcs doubleaux — 234
35. Voûte d'arête, avec double arêtier, pendentifs et plafond — 234
36. Voûtes en arc de cloître — 237

C. Lunette cylindrique biaise.

37. Épure d'ensemble — 237
37bis. Taille d'un voussoir — 239

Arches biaises.

A. Appareil orthogonal.

38. Poussée au vide — 241
39. Voûtes biaises par arceaux distincts — 241
40. Extension à une voûte biaise continue — 241
41. Aperçu sommaire de l'appareil orthogonal parallèle — 244

Paragraphes. Pages.

42. Appareil orthogonal convergent — 245

B. Appareil hélicoïdal.

43. Description générale de l'appareil — 247
44. Considérations théoriques. Hélices de lit et de joint. Surfaces de lit et de joint — 247
45. Joints des têtes. Théorie des foyers — 249
46. Considérations sur l'équilibre d'un voussoir de tête — 252
47. Cylindre d'équilibre — 253
48. Étude d'un trièdre de tête — 254
49. Résumé de l'étude qui précède — 255.

C. Dessin des arches biaises et Taille des voussoirs.

50. Dessin des arches biaises — 257
51. Taille d'un voussoir courant; méthode par équarrissement — 258
52. Taille par la méthode directe. Règle gauche. Panneau monté — 260
53. Voussoirs de tête — 263

D. Voûtes biaises appareillées sur la tête seulement.

54. Appareil dit: Hélicoïdal simplifié — 264
55. Taille d'un voussoir — 266

Voûtes coniques.

56. Porte conique biaise dans un mur en talus — 268
57. Taille d'un voussoir — 269
58. Tracé des joints normaux — 269
59. Lunette cylindro-conique — 270
60. Taille d'un voussoir — 273

Voûte d'arête cylindro-conique.

61. Description de la voûte. Considérations géométriques — 274
62. Épure de la voûte d'arête cylindro-conique — 275

Paragraphes.		Pages.
	Trompes.	
63.	Généralités	278
64.	Trompe cylindrique sur pan coupé	278
65.	Taille d'un voussoir	279
66.	Trompe cylindrique supportant une tour ronde	280
67.	Taille d'un voussoir	281
68.	Trompe conique sur l'angle	281
69.	Trompe conique biaise dans un mur en talus	283
70.	Trompillon	285
71.	Étude d'un voussoir courant	286
	Arrière-voussures.	
72.	Description et définitions	287
73.	Arrière voussure de Marseille	287
74.	Arrière voussure de Montpellier	289
75.	Arrière voussure de Marseille altérée	289
	Voûtes de révolution.	
	A. – Berceaux tournants.	
76.	Voûte annulaire	290
77.	Taille d'un voussoir	290
	B. – Voûtes sphériques simples.	
78.	Appareil par assises horizontales	292
79.	Appareil en cul de four	294
	C. – Voûtes sphériques composées.	
80.	Descriptions	294
81.	Voûte sphérique sur trumeaux avec arcs doubleaux	296
82.	Taille d'un voussoir	298
	Voûtes annulaires composées.	
83.	Considérations géométriques	298
84.	Voûte d'arête en tour ronde. – Description	300
85.	Épure de la voûte d'arête en tour ronde pénétrant une voûte sphérique	301
86.	Taille d'un voussoir	303
	Escaliers.	
	A. – Escalier suspendu dit: Vis à jour.	
87.	Préliminaires	305
88.	Plan d'ensemble	305
89.	Construction des marches	306
90.	Taille d'une marche	307
	B. – Vis à noyau plein.	
91.	Épure	307
	C. – Vis St Gilles.	
92.	Description générale et appareil de la voûte	309
93.	Projections d'un voussoir	310
94.	Préparation de la taille d'un voussoir	312
95.	Taille du voussoir	313
96.	Noyau plein	314
97.	Sommiers	315
98.	Surfaces de lit normales	315
	Table des matières	317

Fin de la table des matières.